

# La vulgarisation mathématique dans le second degré

## **Laboratoire de Mathématiques de Trappes**

Lycée de la Plaine de Neauphle, Collège Courbet, Collège Gagarine, Collège le Village

Membres : Boushaba Sabila, Crougneau Dimitri, Gaulin Nils, Kenba Ayoub, Ladrem Louise, Lenox Matou Sabrina, Parent Alexia, Taleb Tewfik.

Coordinatrice : Lenox Matou Sabrina

## **Introduction**

### **Actions**

1. Un mini cours sur les graphes au collège
2. A la découverte du théorème des 4 couleurs au collège

## **Conclusion**

## ANNEXES

# Introduction

Ce rapport a été réalisé à partir des travaux du Laboratoire de Mathématiques de Trappes lors de l'année scolaire 2023/2024. Nous avons travaillé autour du thème de la vulgarisation mathématique car depuis l'introduction du grand oral au baccalauréat nous sommes confrontés à la difficulté des élèves de Terminale spécialité mathématiques à trouver un sujet de grand oral à partir d'une problématique et à le concevoir à partir d'écrits et vidéos scientifiques fiables en se basant sur les programmes de spécialité mathématique du cycle terminal. Pour les terminales, le choix du sujet n'est pas chose aisée, l'argumentation à l'oral sans support numérique, peu conventionnelle pour eux et cet exercice les obligent à argumenter à l'oral en débattant de mathématiques sans papier, ni crayon, ni calculatrice. Et par ailleurs, nous constatons que les collégiens boudent et/ou méconnaissent la littérature ou émissions jeunesse à vocation scientifique. Pour entériner notre réflexion, nous avons recensé les différents écrits scientifiques auxquels les élèves avaient accès : les revues scientifiques, les vidéos de vulgarisation, les programmes et leurs prolongements avec des exercices issus du quotidien et enfin internet. De là nous avons pu dégager et mener différentes actions qui seront développées dans les différentes parties de notre rapport d'activité. Chaque partie est articulée de manière chronologique : la préparation, la mise en œuvre, suivies des observations et des commentaires. Nous avons confronté nos élèves à la vulgarisation mathématique en tant que récepteurs d'un discours via des conférences par le biais d'une écoute active, visite guidée de musée et en tant qu'émetteurs via des exposés ou des interventions inter-niveaux. Les établissements où ces actions ont été expérimentées sont les collèges Courbet, Gagarine, Le Village et le lycée de la Plaine de Neauphle, tous situés à Trappes.

# ACTIONS

## 1. Un mini cours sur les graphes au collège

### 1. Préparation

Le mini-cours sur les graphes a été préparé par les élèves de Terminale option maths expertes à partir du cours de Terminale maths expertes avec utilisation de l'algorithme de Dijkstra à destination de 2 classes de troisièmes très enthousiastes et participatives. Les présentations se sont tenues le 16/05/2024 de 11h15 à 12h20 au collège Courbet.

Cette action a permis aux élèves de terminale de se confronter aux difficultés de la vulgarisation.

Ils devaient :

- proposer des situations problèmes modélisables par un graphe et qui demeurent accessibles à des élèves de troisième,
- adopter une posture de médiateur en interagissant avec l'auditoire et réfléchir à la manière de vulgariser un problème par exemple faisant appel à l'algorithme de Dijkstra réalisable à la main.
- se mettre en scène dans leur ancien collège en relevant le défi de bien exposer, ce qui était valorisant pour eux, mais aussi valorisant pour les collégiens qui voyaient d'autres jeunes aller vers eux pour leur offrir la possibilité de comprendre des questions scientifiques.
- prendre conscience des articulations d'un cours, des différents temps, de la formulation écrite d'un problème de niveau Terminale pour le rendre compréhensible par des élèves de troisième sans changer le sens des questions et comprendre l'importance de la précision du langage oral (par exemple : chaîne eulérienne, cycle eulérien, chaîne hamiltonienne...)

Dans un premier temps la classe a travaillé sur le problème du facteur chinois mais ce problème a été jugé trop difficile d'accès par les élèves de troisième.

Ils ont donc décidé de créer une séance de travaux dirigés comportant 3 exercices :

un exercice d'introduction au vocabulaire des graphes, un exercice dénombrant les degrés de chaque sommet d'un graphe donné et son nombre d'arêtes et enfin le classique problème des poignées de main pour un groupe de 7 personnes.

Les élèves de troisième ont bénéficié d'un cours sur les graphes, mis à leur niveau.

Les supports utilisés ont été :

- le cours sur les graphes et les travaux dirigés de terminale (vocabulaire et théorème d'Euler)
- des vidéos de vulgarisateurs mathématiques sur l'algorithme de Dijkstra

## 2. Mise en œuvre

Samet et Thomas, Hasan et Steven ont effectué un exposé d'une heure sur les graphes aux 3C et 3D, sur la dernière heure de la matinée, heure où les élèves sont moins réceptifs.

## 3. Observations de Monsieur Taleb, professeur des 3e D

L'exercice n°1 était un exercice d'introduction au vocabulaire des graphes.

La situation s'est révélée être trop complexe pour une première approche. Néanmoins, et c'est là le fait le plus intéressant, les élèves se sont accrochés et ont essayé de comprendre. Nous pensons que le fait que ce "savoir" soit dispensé par des pairs, quoique plus âgés, a joué favorablement.

L'exercice 2, plus calculatoire et plus abordable, a été très bien suivi, car plus proche d'un niveau de troisième. Il a été l'occasion de nombreux échanges et questions.

Quant à l'exercice 3, une seule classe y est parvenue. La situation choisie, le problème du nombre de poignées de mains, a permis aux élèves d'entrer dans la tâche. Ils ont représenté sans difficulté la situation sous forme de graphe.

## 4. Analyse de l'action

### Du point de vue des élèves 3<sup>e</sup> :

- La posture de sachant des élèves de terminale et le fait qu'ils soient lycéens dont un ancien élève du collège a plu et suscité l'envie d'écouter des 3es.
- Le fait d'introduire le problème avec une modélisation avec un schéma et partir d'un problème concret a facilité l'adhésion du plus grand nombre. La situation était « visuelle » d'abord avec le graphe dessiné puis avec le tableau de l'algorithme de Dijkstra.
- Le fait de pouvoir « suivre avec le doigt » les chemins rendait les exercices plus accessibles.

- Le langage utilisé par les terminales pour expliquer le vocabulaire des graphes était bien choisi et a facilité la compréhension. Les élèves ont apprécié d'avoir deux « professeurs » pour la séance, avec des explications qui convergeaient mais pas tout à fait formulées à l'identique.
- Les élèves ont éprouvé de la satisfaction d'avoir pu comprendre une notion « de terminale » en 55 min.

#### Du point de vue des élèves de terminale :

- Ils ont eu du mal à créer tout de go des exercices niveau 3<sup>e</sup>, l'exercice qui a demandé le plus de travail est l'exercice 1, ils l'ont d'abord écrit version terminale puis ils l'ont reformulé pour le rendre accessible et compréhensible par les troisièmes ; ils ont aussi joué sur les pondérations des arêtes pour faciliter le calcul mental et ensuite ils ont dû s'approprier l'algorithme de Dijkstra de façon à pouvoir l'expliquer à un pair plus jeune.
- Lors de la simulation réalisée en classe de terminale, certains binômes ne s'étaient pas entraînés et de fait le temps de parole entre les 2 acteurs était mal réparti et des notions peu claires pour les récepteurs du message.
- On a dû faire un travail sur la gestion du tableau pour que le graphe ne soit pas effacé lors de la réalisation de l'exercice.
- Ceux qui avaient réalisé des simulations pouvaient mieux anticiper les réponses des élèves, valider ou au contraire écarter certaines en les justifiant.
- Se mettre en position d'émetteur de messages leur a permis de mieux asseoir les connaissances.
- Cet exercice a été très formateur pour rentrer dans l'épreuve du grand oral du bac. Ils ont dû répondre à un exercice donné en utilisant la théorie des graphes en le vulgarisant de façon à ce qu'il soit accessible à un novice. Le choix des mots, réfléchir aux questions éventuelles des interlocuteurs...

#### Du point de vue des professeurs observateurs de la séance :

Au cours de l'intervention des élèves de Terminale dans la classe de 3<sup>e</sup>C :

- Ce TD nécessitait une écoute soutenue des élèves car le plus gros du travail était fait à l'oral.

- Les 3<sup>e</sup> ont participé activement et en particulier certains élèves en difficulté dans la discipline qui habituellement ne participent pas se sont investis.
- Le sujet choisi n'ayant aucun lien avec les mathématiques de collège et ne nécessitait pas de prérequis, la présentation a uniquement nécessité l'introduction de la définition de graphe et du vocabulaire associé au graphe ( sommet, arêtes, degré d'un sommet ). Cette notion qui aurait sans doute pu être pénible a en fait été bien acceptée par les élèves, y compris les plus en difficultés. Les élèves de Terminale ont ainsi présenté tout le vocabulaire autour de la théorie et les élèves de troisième, y compris les plus décrocheurs, ont fait des efforts pour comprendre ce que des élèves leur présentait. Ainsi une élève ayant beaucoup de difficultés et un profil « dys » très prononcé a beaucoup participé et s'est investie car ce n'était pas « le prof » qui présentait mais un élève comme elle. À l'instar des exposés présentés en classe, le fait qu'un sujet soit abordé par des pairs a semblé beaucoup mieux accepté.
- Ainsi le travail fait par d'autres élèves est mieux perçu : les élèves apprécient davantage d'être aidés par leurs camarades. Cela se voit notamment lors d'activités en classe où les élèves qui ont fini une tâche vont aller aider leurs camarades en leur expliquant avec une autre façon que celle du professeur. Ce type d'activité est donc très intéressant à utiliser pour aider à la compréhension même s'il n'est pas possible de se satisfaire que de cela, la rigueur du vocabulaire utilisé n'étant pas toujours à la hauteur des attentes que l'on serait en droit d'attendre.
- L'exercice 1 a permis d'investir aussi le calcul mental avec réinvestissement des ordres de grandeur pour vérifier la cohérence du résultat trouvé.
- Pour trouver le plus court chemin entre deux sommets, tous les chemins ont été explorés, testés pour enfin retenir que le plus court.
- L'exercice 1 a facilité l'accès et la compréhension des consignes des exercices 2 et 3.
- L'exercice 1 permettait de montrer qu'à une question posée, il pouvait y avoir plusieurs réponses possibles, toutes les réponses proposées ont été notées et ont permis et de valider la compréhension de l'élève immédiatement ( feed back de validation immédiat).
- Les exercices proposés ont montré que la modélisation mathématique n'induisait pas uniquement l'utilisation d'équations

- L'exercice 2 a été très bien réussi par la majorité des élèves, le fait d'avoir bien compris l'exercice 1 leur a donné confiance et donné envie de continuer la fiche d'exercices.
- L'exercice 3 a suscité l'intérêt des plus curieux qui sont restés à la sonnerie pour valider leurs réponses et avoir la solution.
- Il est intéressant de voir que le binôme Hassan / Samet a rencontré des problèmes techniques pour vidéoprojeter le TD distribué à chacun des élèves de 3<sup>e</sup> qu'ils ont dû résoudre à l'aide de 3<sup>e</sup> avant de commencer le travail avec eux. Cette coopération spontanée montre l'envie déjà de découvrir ce que les terminales avaient à montrer.
- Les élèves étaient réellement dans une posture de recherche et ont noté la correction.
- Co construire le cours avec les terminales leur a permis de mieux comprendre et retenir le cours.
- Le mini-cours sur les graphes a été proposé uniquement en fin d'heure aux volontaires en nombre restreint, le document a été réclamé au professeur de 3<sup>e</sup> de la classe.

#### Écueils rencontrés lors de l'action :

- La logistique a été facilitée car les terminales sont des élèves assez autonomes et les binômes ont bien fonctionné et le déplacement/ travail a pu se faire sur un créneau de 2 heures. Nous avons beaucoup échangé via le casier numérique pour lecture et axes d'améliorations du travail à présenter aux troisièmes.
- C'est un travail qui était familier au professeur car très proche de celui qu'on fait pour le grand oral avec les élèves.
- La très grande proximité du lycée et du collège a permis de s'y rendre à pied

## **2. A la découverte du théorème des 4 couleurs au collège**

### 1. Préparation

Pour les 6<sup>e</sup>, nous avons cherché une activité à leur portée et qui ouvrait sur un théorème intéressant et non conventionnel : le théorème des quatre couleurs. Nous sommes partis de la problématique suivante : combien de couleurs suffisent pour colorier n'importe quelle carte géographique, avec la contrainte que deux pays partageant une frontière commune soient coloriés de couleurs différentes ? Le théorème des quatre couleurs qui affirme que quatre couleurs suffisent a été prouvé en 1976 par Kenneth Appel et Wolfgang Haken : c'est le premier théorème prouvé à l'aide de l'ordinateur.

L'intervention s'est déroulée le 24 mai 2024 au collège Youri Gagarine. En classe de 6e, une activité de coloration de cartes géographiques a été proposée aux élèves, les élèves avaient des cartes de 6 pays d'Europe (Espagne, Belgique, Bulgarie, Pologne, Pays-Bas et Roumanie) découpés en régions à colorier avec la contrainte d'avoir des zones limitrophes de couleurs différentes et avec l'utilisation du moins de couleurs possible, ceci afin de les amener à conjecturer le théorème des 4 couleurs par eux-mêmes avant que le professeur n'intervienne pour formaliser l'idée impulsée par l'exercice.

Au départ le choix avait été porté sur une seule carte, la France métropolitaine, et finalement Mesdames Ladrem et Matou ont préféré partir sur plusieurs cartes de pays d'Europe afin que les différents groupes d'élèves n'aient pas les mêmes cartes et qu'une conjecture du théorème des quatre couleurs émerge dans la classe à partir de plusieurs exemples.

## 2. Réalisation

Comme matériel on a eu besoin des cartes de géographie ou des pavages imaginaires (en 3 exemplaires par élève), des feutres ou crayons de couleurs.

Le but de l'activité est de colorier une carte de géographie ou un pavage imaginaire avec le moins de couleurs possibles, en sachant que deux pays limitrophes sont coloriés de deux couleurs différentes. Dans le cas d'une carte de géographie, la mer et les pays limitrophes ne doivent pas être coloriés.

L'activité a été scindée en trois parties :

D'abord un travail en groupe, où les élèves avaient la possibilité d'échanger entre eux sur le nombre de couleurs à utiliser et à la façon de procéder, ils avaient aussi la possibilité de s'améliorer en se basant sur le coloriage qui utilisait le moins de couleurs et de chercher à optimiser le nombre de couleurs à utiliser ou d'aider un camarade bloqué.

Dans un deuxième temps de mise en commun une conjecture a été émise :

*« Toute carte géographique peut être coloriée avec quatre couleurs au plus, de manière que deux pays adjacents soient de couleurs différentes »*

Nous avons admis le théorème puis dans un dernier temps, un travail individuel de coloriage d'une carte de France découpée en régions a été demandé aux élèves.

Et pour finir une question ouverte leur a été posée après un point historique sur l'émergence et l'établissement du théorème des 4 couleurs et ce afin qu'ils réfléchissent sur ce théorème et à sa portée mathématique.

## 3. Observations

Les élèves ont été très enthousiastes face à l'activité.

Ils ont commencé à mettre des points de différentes couleurs sur chacune des régions, avant de colorier toute la région. Une fois le principe de la consigne bien assimilé par le groupe, les élèves discutaient entre eux et se mettaient au défi de trouver le nombre minimum de couleurs à utiliser, jusqu'à arriver à constater par eux mêmes, pour toutes les



cartes distribuées, qu'avec 4 couleurs, on arrive à respecter la consigne. Pour certaines cartes, il suffisait même de 3 couleurs pour les colorier : c'était le cas pour la Belgique.

Nous avons pu observer une certaine émulation au sein du groupe et une inversion possible des rôles du "bon élève habituel" et de l'élève d'habitude moins en situation de réussite et de l'encouragement que cela a pu créer dans le groupe.

#### 4. Analyse

##### Du point des élèves de 6<sup>e</sup>

- Les élèves ont semblé apprécier cette activité réalisée en groupe de 3 ou 4 élèves hétérogènes. Ils sont rentrés rapidement dans l'activité qui leur a semblé ludique. Les outils utilisés ici étaient les crayons de couleur ! Et de se challenger au sein du groupe pour colorier leur pays divisé en départements ou cantons ou régions avec le moins de couleurs.
- La consigne leur a semblé claire et le fait de mettre la main à la pâte et de tester leur a plu.
- Ils ont apprécié le fait qu'il y ait deux professeurs pour valider leur travail.

##### Du point de vue des professeurs

- L'implication des élèves a été unanime, personne n'est resté inactif.
- Cette activité a permis aux élèves de retravailler sur les pays d'Europe, le choix délibéré avait été fait de prendre davantage de pays européens moins connus. On a redéfini l'Europe à l'oral, énoncé le nombre de pays de l'union européenne et après avoir fini de colorier leur carte avec le minimum de couleurs, ils devaient chercher le nom de « leur pays » et éventuellement sa capitale. Certains ont sorti leur agenda pour « trouver ».
- Travailler à partir de cartes et de lier deux matières (mathématiques et géographie) a été très constructif. Les élèves ont touché du doigt la notion de sommet d'un graphe car ils mettaient des points de couleurs sur chaque région du pays avant de colorier et la notion d'arête.
- Travailler par essai / erreur leur a permis de construire leur conjecture ou hypothèse. Et ils se sont mieux emparés du théorème des 4 couleurs.

- Les élèves de 6e ont apprécié cette activité empirique de coloriage de cartes car ludique et les mettant tous en activité sans exiger de prérequis mathématiques. Ils se sont pleinement engagés dans l'activité, avaient une liberté sur le choix des couleurs et devaient relever le défi au sein de petits groupes de 3 ou 4 élèves, finalement étonnés du résultat découvert. Ils pouvaient tester et contrôler rapidement le respect de la consigne, se corriger entre pairs et pouvaient demander une nouvelle carte pour réaliser un autre test qui devait s'avérer plus fructueux.
- Un axe de travail serait de faire réfléchir les élèves sur le lien entre la coloration de cartes et les mathématiques et de réaliser un exposé en 6e sur l'histoire de la démonstration de ce théorème en lien avec l'algorithmique.

### Du point de vue établissements

Les professeurs des différents établissements sont dans une démarche d'échanges de pratiques et d'analyse réflexive sur celles-ci et ces actions permettent un dialogue plus aisé entre les professeurs disciplinaires car ils se connaissent et ils ont un référent dans chaque établissement. Cela leur permet aux professeurs de collège de mieux cerner les attentes des programmes ambitieux de lycée et aux professeurs de lycée de mieux appréhender l'élève de seconde arrivant. Cette action a permis aux élèves à se « projeter en mathématiques » et découvrir d'autres horizons.

### Écueils de la séance

- La mise en œuvre a été facilitée par la bonne coordination entre les deux professeurs et la proximité géographique des établissements.

## Conclusion

Ce rapport termine une année riche d'échanges entre collègues du même bassin autour de nos élèves dans le cadre du labomaths de Trappes. Nous avons travaillé le thème de la vulgarisation mathématique en mettant les élèves de terminale dans le rôle de médiateurs scientifiques pour les collégiens de 3e.

L'expérimentation et l'observation de nos actions conjuguées ont montré le besoin d'un travail sur l'argumentation en mathématiques à l'oral et de la nécessité de travailler des exposés à partir d'une problématique dès le collège pour que nos élèves du secondaire adoptent la démarche scientifique dans le cadre d'un argumentaire scientifique. Ce travail nous a aussi montré l'importance de confronter nos élèves à des mini conférences scientifiques pour qu'ils maîtrisent l'écoute active mais surtout pour développer leur "culture scientifique" et améliorer leur compréhension du monde qui les entoure.

Nous sommes preneurs de tout retour, suggestion ou conseil par mail :  
sabrina.lenox@ac-versailles.fr

# ANNEXES

## 3. À la découverte du théorème des 4 couleurs au collège.

6<sup>ème</sup>

### Activité : la coloration de cartes

#### I Travail de groupe

Chaque groupe de 4 élèves a une carte d'un des 27 pays européens. Coloriez cette carte en minimisant le nombre de couleurs utilisé et en respectant la règle suivante : deux régions qui partagent une frontière commune ne peuvent pas être coloriées de la même couleur.

De combien de couleurs avez-vous eu besoin ? *j'ai eu besoin de 4 couleurs.*

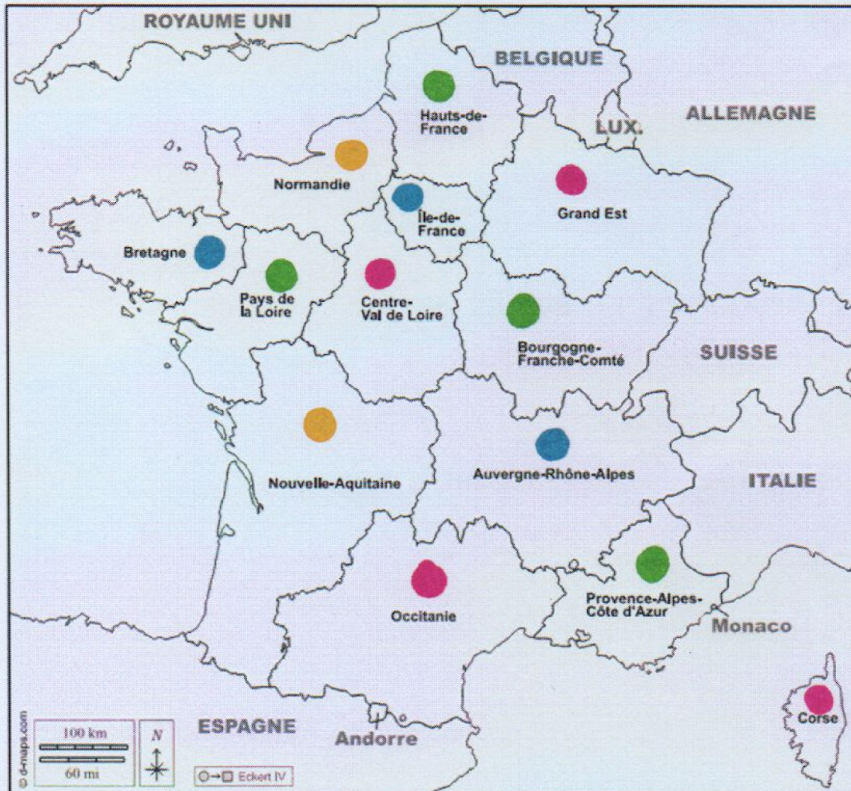
Conjecture :

*Il semble que pour colorier une carte, il faut au minimum 4 couleurs.*

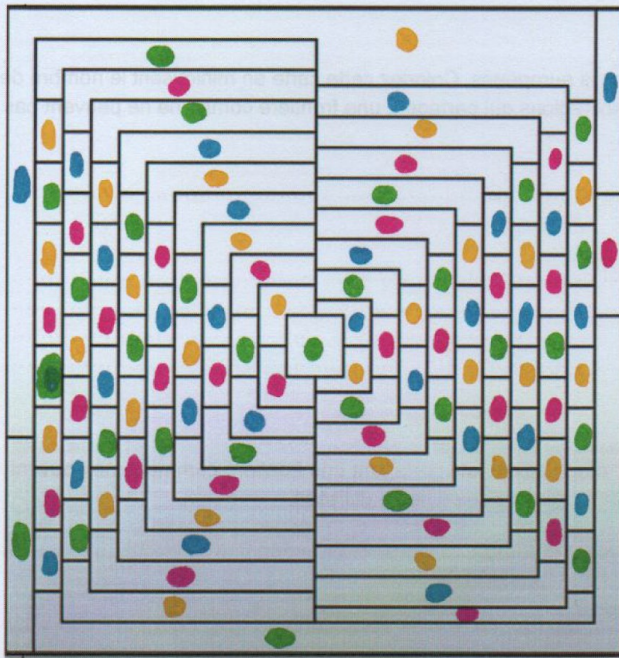
#### II Travail individuel

Coloriez ces 2 cartes en respectant la règle suivante : deux régions qui partagent une frontière commune ne peuvent pas être coloriées de la même couleur et en minimisant le nombre de couleurs utilisées.

##### a) La carte des régions de France métropolitaine.



### b) Une carte contemporaine !



### III Contexte mathématique :

Le coloriage de cartes :

En 1852, Francis Guthrie conjecture que toute carte peut être coloriée à l'aide **d'au plus** quatre couleurs afin que deux régions voisines aient des couleurs différentes.

**Le théorème des quatre couleurs est l'un des théorèmes les plus célèbres en mathématiques. Il affirme :**

**« Toute carte découpée en régions connexes peut être colorée à l'aide de quatre couleurs de façon à ce que deux régions limitrophes aient deux couleurs différentes »**

Ce théorème est important car une première preuve erronée a été donnée en 1852, et on a dû attendre 1976 pour une preuve correcte. Pendant plus de cent vingt ans, certains des meilleurs cerveaux mathématiques du monde n'ont pas réussi à prouver l'un des théorèmes mathématiques dont l'énoncé est le plus simple. Il y a eu beaucoup de fausses preuves, et une toute nouvelle branche des mathématiques - connue sous le nom de théorie des graphes - a été développée pour essayer de prouver la conjecture de Francis Guthrie. Mais, personne n'a réussi à compléter la preuve jusqu'à ce qu'Appel et Haken le fassent en 1976 et en utilisant 1200 heures de calculs par ordinateurs afin de vérifier 1478 configurations critiques. Depuis, cette preuve algorithmique a été vérifiée à l'aide de l'assistant de preuves COQ.

Certaines personnes pensent que, bien que leur preuve soit correcte, c'était de la triche d'utiliser un ordinateur. Qu'en pensez-vous ?

