

Rapport d'activité du laboratoire

“Maths et ...” du Lycée Franco-Allemand de Buc

Année scolaire 2024-2025

Fonctionnement du laboratoire.

- Composition.

Mathématiques: *Emilie Battaglin (EB)*
 Natacha Bereux (NB)
 Yves Boucly (YB)
 Elsa Chartreau (EC)
 Sacha Dhenin (SD)
 Ksenia Oguievetskaia (KO)(coordination 2024 - 2025)

SVT: *Matthias Cavelius (MC)*

Physique-chimie: *Marie Borel (MB)*
 Capucine Darpeix (CD)
 Benedicto Santos (BS)

- Actions.

Les actions du laboratoire de mathématiques étaient centrées l'année précédente sur les conférences scientifiques. Nous avons maintenu l'organisation des conférences et développé une deuxième action autour des activités interdisciplinaires entre les mathématiques et les sciences.

I. Action 1 : Mise en place d'activités interdisciplinaires.

Les documents conçus dans le cadre de ces activités sont joints en annexe.

A. Des programmes informatiques pour traiter des données génétiques (MC, KO).

Objectif: Les élèves de Spé SVT ("biologistes") ont découvert le fonctionnement du code génétique et souhaitent présenter cette notion à des élèves « naïfs » de Spé Maths ("programmeurs").

Ces "programmeurs" devront alors coder un algorithme (Python©) qui permet d'exploiter les consignes précises énoncées par les "biologistes", afin d'exploiter leurs données génétiques.

Séance 1 – Biologistes

Rédiger un script permettant de décrire les consignes à respecter par l'algorithme.

La classe est séparée en 2 demi-classes au sein desquelles on forme des groupes de 4 élèves. La première demi-classe s'intéresse à la programmation d'un algorithme qui permet à partir d'une séquence d'ADN de coder une séquence d'acides aminés en respectant le code génétique. La deuxième demi-classe s'intéresse à la programmation d'un algorithme qui permet à partir d'une séquence d'ADN de donner les conditions nécessaires à son amplification par PCR.

Chaque groupe a donc pour objectif de lister et de rédiger, avec précision, les contraintes qu'imposent leur projet :

Code génétique	• Correspondance entre séquence génétique et protéique • Association d'un triplet de nucléotides (nt) à un acide aminé • Redondance du code génétique • Codon d'initiation et codons STOP
PCR	• Détection du codon d'initiation et du 1^{er} codon STOP • Construction des amorces sens et antisens (taille > 15nt) • Calcul de la température d'hybridation

Calcul de la température d'hybridation :

*Les températures de dénaturation et de polymérisation sont fixes, seule la température d'hybridation, T_a , devra être calculée pour chaque nouvelle PCR. Cette température d'hybridation dépend de la séquence en bases des oligonucléotides amorces. Elle est légèrement inférieure (environ de 5°C) au T_m qui est la température de demi-dénaturation (si les 2 oligonucléotides amorces ont des T_m différents, il faudra prendre le T_m le plus faible pour calculer la T_a , afin de favoriser l'hybridation des 2 amorces): **$T_a = T_m - 5^\circ\text{C}$.***

Pour calculer le T_m d'un oligonucléotide inférieur à 30 nucléotides, on utilise la relation suivante : $T_m = 2(A+T) + 4(G+C)$ (où A, T, G et C sont respectivement le nombre de chacune de ces bases dans l'oligonucléotide amorce).

Séance 2 – Biologistes et programmeurs

Présenter les consignes précises aux programmeurs

Un groupe de biologistes présente à un groupe de programmeurs les consignes à respecter pour permettre de coder l'algorithme attendu.

Les programmeurs peuvent poser les questions qu'ils souhaitent.

Séance 3 – Programmeurs

Coder l'algorithme permettant de répondre au projet des biologistes

Séance 4 – Programmeurs et biologistes

Présenter l'algorithme permettant de répondre au projet des biologistes + Mettre en pratique l'algorithme avec les séquences données par les biologistes

Obtention ou non des informations attendues, retour critique des biologistes (étapes non prises en compte par les programmeurs) et des programmeurs (précisions non données par les biologistes)

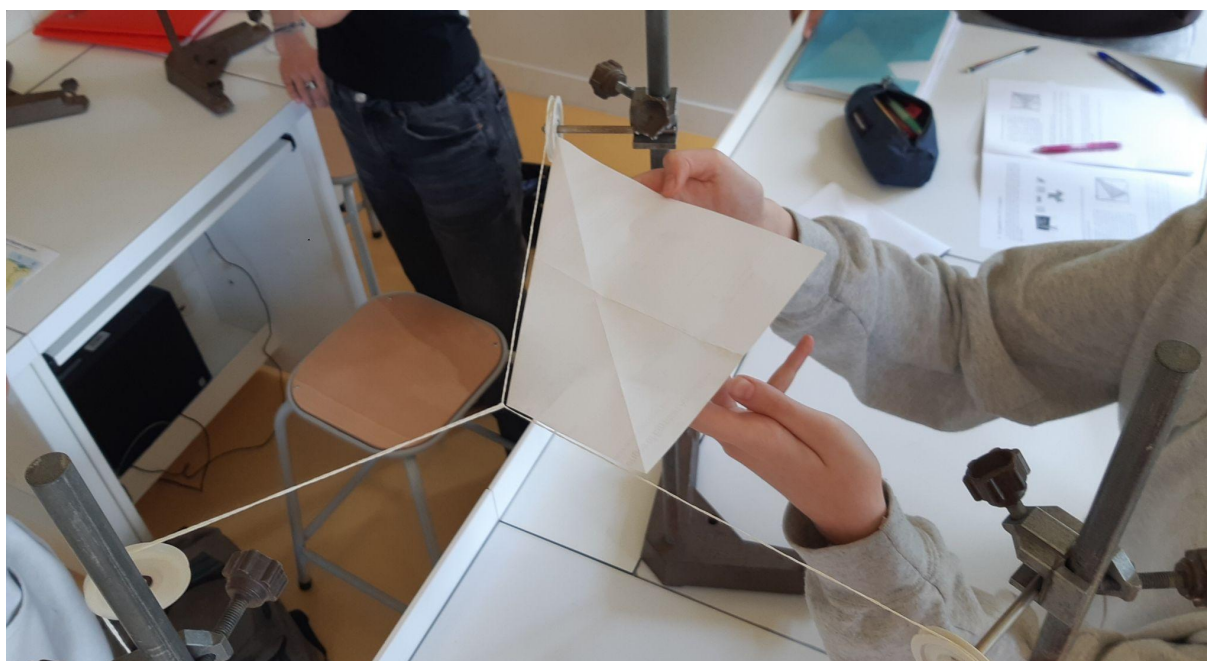
Grâce à ce travail, les programmeurs ont pu mettre en pratique dans un exemple concret les outils vus en cours de mathématiques; les biologistes ont quant à eux touché du doigt la nécessité d'être extrêmement précis dans les consignes données aux programmeurs pour obtenir les résultats attendus.

B. Le point de Fermat d'un triangle (NB, KO, BS).

Objectif: Il s'agit d'un problème géométrique: "Étant donnés trois points, en trouver un quatrième tel que la somme des distances aux trois points soit minima" (Pierre de Fermat).

L'objectif consiste en premier lieu à montrer que pour un même problème à résoudre, plusieurs approches peuvent être suivies pour la résolution mathématique.

Une illustration mécanique est ensuite proposée aux élèves qui disposent uniquement du matériel nécessaire à la réalisation du dispositif, sans protocole particulier : trois masses identiques sont suspendues chacune à un fil, les trois fils étant ensuite reliés entre eux, *via* trois poulies, dans un même plan horizontal. Un gabarit en papier, obtenu par pliage, permet de vérifier l'angle de 120° entre les fils.



Une ouverture est proposée aux élèves en modifiant les valeurs relatives des masses, non toutes trois identiques désormais.

Cette activité a été réalisée lors d'une séance de 2 heures avec un groupe d'élèves qui ont suivi simultanément (presque tous) les spécialités de mathématiques et de physique-chimie dans l'année.

La conception a été largement inspirée de l'article écrit par Aurélien Alvarez pour le site "Images des maths", et le matériel du montage pour l'illustration mécanique a été préparé avec l'aide de Christophe Lenormand, technicien de laboratoire.

II. Action 2: Conférences et visites.

A. Description.

Ci-dessous sont listées les conférences et les visites scientifiques qui ont été organisées pendant l'année 2024-2025.

Aspects pratiques :

Les conférences ont toutes eu lieu dans l'amphithéâtre du lycée franco-allemand, qui permet d'accueillir un auditoire d'environ 300 personnes.

Les conférences ont été enregistrées afin de pouvoir éventuellement les réutiliser en interne (au moins partiellement) avec des classes non présentes le jour de la conférence.

Nous avons voulu varier :

- les jours d'intervention : afin d'éviter que les mêmes collègues « perdent » trop d'heures de cours, notamment pour les classes de Première et de Terminale;
- les thèmes : mathématiques plus ou moins appliquées, physique, informatique;
- les types d'intervenants : des âges, des parcours et des notoriétés très variés, afin de donner un aperçu large du monde scientifique.

Les classes conviées ont été choisies en fonction des thèmes. Par exemple, la conférence "Maths et l'IA" était destinée en priorité aux élèves pratiquant l'informatique (option informatique en Seconde et en Première).

Planning et élèves concernés:

- Maths et jonglage : combinatoire et musique

Intervention Chant de Balles (02/2025), (EB, KO) :

- 03/02/2025, les élèves des classes de secondes, premières et terminales SMP et de terminales SIA spé math ont pu assister à une conférence-spectacle à la croisée des chemins de la modélisation mathématique et de la jonglerie.

Proposée par Vincent de Lavenère, artiste jongleur, et Florent Hivert, professeur en informatique au LISN (université Paris-Saclay), cette conférence invite le spectateur dans le processus de création des figures de jonglerie.

En modélisant l'acte de jongler, le chercheur apporte un outil facilitant le travail de l'artiste. Et même quand le jongleur complexifie la donne en rendant ses balles de jonglage sonores, une balle produisant une note de musique, le chercheur s'en empare pour tenter de comprendre comment écrire une « partition de jongleur ».

- Ateliers pour TSMP1 et 2 (03-04/02/2025, EB, YB). Lors de cet atelier, Vincent initie aussi les élèves au jonglage et Florent propose aux élèves de s'approprier l'écriture des combinaisons de jonglage, le siteswap, puis d'inventer des combinaisons que Vincent tente de réaliser pour le plaisir des élèves. Cet atelier permet de montrer une application concrète des permutations en lien avec le chapitre de dénombrement.

- **Maths et l'IA :**

Séminaire sur l'intelligence artificielle (options info 2^{ndes} et 1^{ère}), (20/12/2024), (SD, KO).

Titre de la conférence « AI meets Medicine: How Artificial Intelligence improves Healthcare »

Conférence par Hadrien Reynaud, PhD student in AI à Imperial College London et Qingjie Meng, assistant professor à l'université de Birmingham..

La conférence a permis de présenter aux élèves les bases de l'intelligence artificielle (fonction à travers un réseau de neurones, entraînement...) et les applications à la médecine et la santé.

- **Maths, sciences, problèmes mondiaux et solidarité internationale.**

- Intervention des « Shifters » (2^{ndes} et 1^{ère}), (03/2025, semaine de l'UNESCO), (KO, NB, EC).
- Animation scientifique en allemand "Eis als Klimaarchiv - La glace comme archive du climat" par trois jeunes étudiants-chercheurs de l'équipe Glacio dirigée par Amaëlle Landais du Laboratoire des Sciences du Climat et de l'Environnement de l'UMR CEA/CNRS/UVSQ : présentation générale à l'ensemble des élèves de 3ème à l'auditorium du lycée, puis animation scientifique autour d'une carotte de glace pour des élèves de 2SBC, 1SBC et 1SMP (20/03/2025, semaine de l'UNESCO) (CD, MB).

- **Sciences et recherche :**

- Travail sur l'égalité filles - garçons. Participation au "speed-meeting entre lycéennes et chercheuses, enseignantes chercheuses, étudiantes, ingénieures, entrepreneures..." organisé par l'Institut d'Optique de l'Université Paris-Saclay pour les filles des classes de 2SMP et 2SBC, suivi d'une visite de laboratoires de recherche de l'Institut d'Optique le 06/02/2025 (CD, MB).
- Sorties au synchrotron SOLEIL pour toutes les Terminales scientifiques TSMP, TSBC et TSIA (CD, MB, BS).
- Projet innovant initié par Quantum Saclay, centre de recherche interdisciplinaire regroupant des experts en physique, mathématiques,

informatique, ingénierie et chimie, avec visite du laboratoire Lumière Matière et Interfaces de l'ENS Paris-Saclay le 24/01/2025 et intervention du metteur en scène Guillaume Mika auprès d'élèves volontaires de Seconde (2SMP et 2SIA) pendant 8 séances de 2h. Restitution théâtrale en lien avec la physique quantique sur la Scène de Recherche de l'ENS-Paris-Saclay le 20/05/2025 (CD, MB)

Organisation de conférences scientifiques :

- o en amont, concertations des membres du laboratoire pour le choix des conférenciers ;
- o organisation pratique pour le jour même de chaque conférence ;
- o en amont et en aval des conférences : après concertation des membres du laboratoire, un travail avec certaines classes sur le thème en question sera effectué et les retombées pédagogiques seront discutées.

B. Objectifs.

L'objectif de cette action était double :

- *mettre nos élèves en contact avec la recherche scientifique actuelle et leur permettre d'interagir avec ceux qui la font. Notre ambition est de stimuler leur curiosité, de leur faire admirer des réalisations et leur faire prendre conscience que les sciences ne sont pas un domaine figé mais un lieu passionnant plein de défis à surmonter. A l'heure des choix d'études, cette ouverture nous paraît essentielle;*
- *profiter de la venue des conférenciers pour échanger avec eux.*

III. Action 3: Formation LaTeX.

Organisation d'une FIL de 12h pour les collègues souhaitant apprendre l'utilisation du langage LaTeX. Le formateur Sacha Dhénin est membre du laboratoire de mathématiques.

IV. Bilan global.

- L'objectif de proposer une ouverture vers le monde la recherche scientifique aux élèves a été rempli. Les élèves ont été intéressés et ont posé de nombreuses questions pendant le temps prévu à cet effet à la fin de chaque conférence.
- Les activités interdisciplinaires ont été d'une grande richesse et ont permis aux enseignants et aux élèves de travailler dans des contextes différents avec des interrogations nouvelles qui poussent à une réflexion sur la démarche scientifique en particulier. Les élèves sont confrontés aux problématiques qu'ils ne rencontrent pas dans le cursus classique.
- Ces conférences scientifiques et la mise en place des activités interdisciplinaires ont constitué un projet commun apprécié entre les enseignants de mathématiques et ceux des autres disciplines scientifiques (SVT et sciences physiques).
- La formation LaTeX sera de plus grande utilité afin de rédiger des documents personnels et faciliter le travail collaboratif.

V. Perspectives 2025-2026...

- Nous envisageons de poursuivre l'organisation d'interventions scientifiques dans l'établissement.
- De mettre au point d'autres activités interdisciplinaires en français ou/et en allemand et en anglais.
- ...

VI. Annexes.

Annexe 1 Document élève _ des programmes informatiques pour traiter des données génétiques

Annexe 2 Document Professeur _ le point de Fermat d'un triangle

Annexe 3 Document élève _ le point de Fermat d'un triangle

Annexe 1

Document élève – des programmes
informatiques pour traiter des données
génétiques

Vous êtes membre d'une équipe de généticiens au sein du Laboratoire Français d'Analyses - Scientific Intelligence A

Votre travail consiste à identifier au sein d'un génome, une séquence d'ADN qui code une protéine d'intérêt. Une fois ce gène identifié, vous souhaitez l'amplifier par PCR, pour pouvoir ensuite intégrer ce gène dans un organisme modèle (type bactérie) qui sera capable de l'exprimer et de produire votre protéine d'intérêt en grande quantité.



Vous êtes actuellement en train de développer vos outils et souhaitez travailler de manière plus efficace en rendant automatiques certaines étapes de vos analyses génétiques.

Deux tâches vous semblent idéales pour cela,

- la conversion de séquences génétiques en séquences protéiques
- la préparation d'une expérience de PCR

Vous avez obtenu un financement afin de travailler en collaboration avec une équipe de programmeurs qui pourraient vous aider. Le problème ? Leurs connaissances en génétique s'arrêtent à leurs cours de seconde générale, qui commencent à dater pour certains d'entre eux : ils se souviennent avoir entendu les mots « ADN », « gène » et « protéine », c'est tout !

Vous devez présenter en 10 minutes à cette équipe l'ensemble des notions de génétique nécessaires à la compréhension de la tâche que vous souhaitez automatiser & rédiger des consignes claires et très précises que les programmeurs pourront formaliser dans un langage informatique.

Capacités	Critères	-	+	+
Réaliser une présentation scientifique 	• Aspect général (diaporama soigné, bien organisé, agréable à suivre)			
	• Utilisation de termes scientifiques précis explicités par la présentation (schémas)			
	• Utilisation de documents scientifiques de qualité (titre, légendes, source)			
Rédiger une liste de consignes pour programmer un algorithme 	• Identification des étapes clés du travail à réaliser à partir de la séquence génétique			
	• Lister les différentes étapes à réaliser, dans l'ordre (à partir du cours)			
	• Identifier les éléments à ne pas oublier pour que l'algorithme fasse le bon travail (checklist)			
	• Construction d'une liste de consignes claires imposées par la tâche à réaliser (sur document)			
	• Obtention de résultats en faisant fonctionner l'algorithme qui respecte les consignes			

1

Vous devez expliquer comment à partir de la séquence d'ADN fournie, l'algorithme peut prédire la séquence protéique issue de l'expression génétique de ce gène.

2

Vous devez expliquer comment à partir de la séquence d'ADN fournie, l'algorithme peut construire les amorces sens et anti-sens (20nt chacune) et déterminer la température d'hybridation nécessaires à l'amplification du gène par PCR.

Séquence d'ADN du gène de la chaîne A de l'insuline

5' AGTCCACGTCACTGATGGGTATAGTCGAGCAGTGTTGCACAAGCATATGTAGCCTGTATCAGCTCGAGA
ATTACTGCAATTAAGTCATCGCATCGGC 3'

Séquence d'ADN du gène de la chaîne B de l'insuline

5' AGTCCACGTCACTG[ATGTTTCGTAAACCAGCACCTCTGCGGGAGCCATCTTGTAGAGGCCCTTTATCTG
GTTYGCGGGGAACGCGGGTTCTTTTATACACCCAAAGCCTAA]GTCATCGCATCGGC 3'

1

Vous devez expliquer comment à partir de la séquence d'ADN fournie, l'algorithme peut prédire la séquence protéique issue de l'expression génétique de ce gène.

2

Vous devez expliquer comment à partir de la séquence d'ADN fournie, l'algorithme peut construire les amorces sens et anti-sens (20nt chacune) et déterminer la température d'hybridation nécessaires à l'amplification du gène par PCR.

Calcul de la température d'hybridation

Les températures de dénaturation et de polymérisation sont fixes, seule la température d'hybridation devra être calculée pour chaque nouvelle PCR.

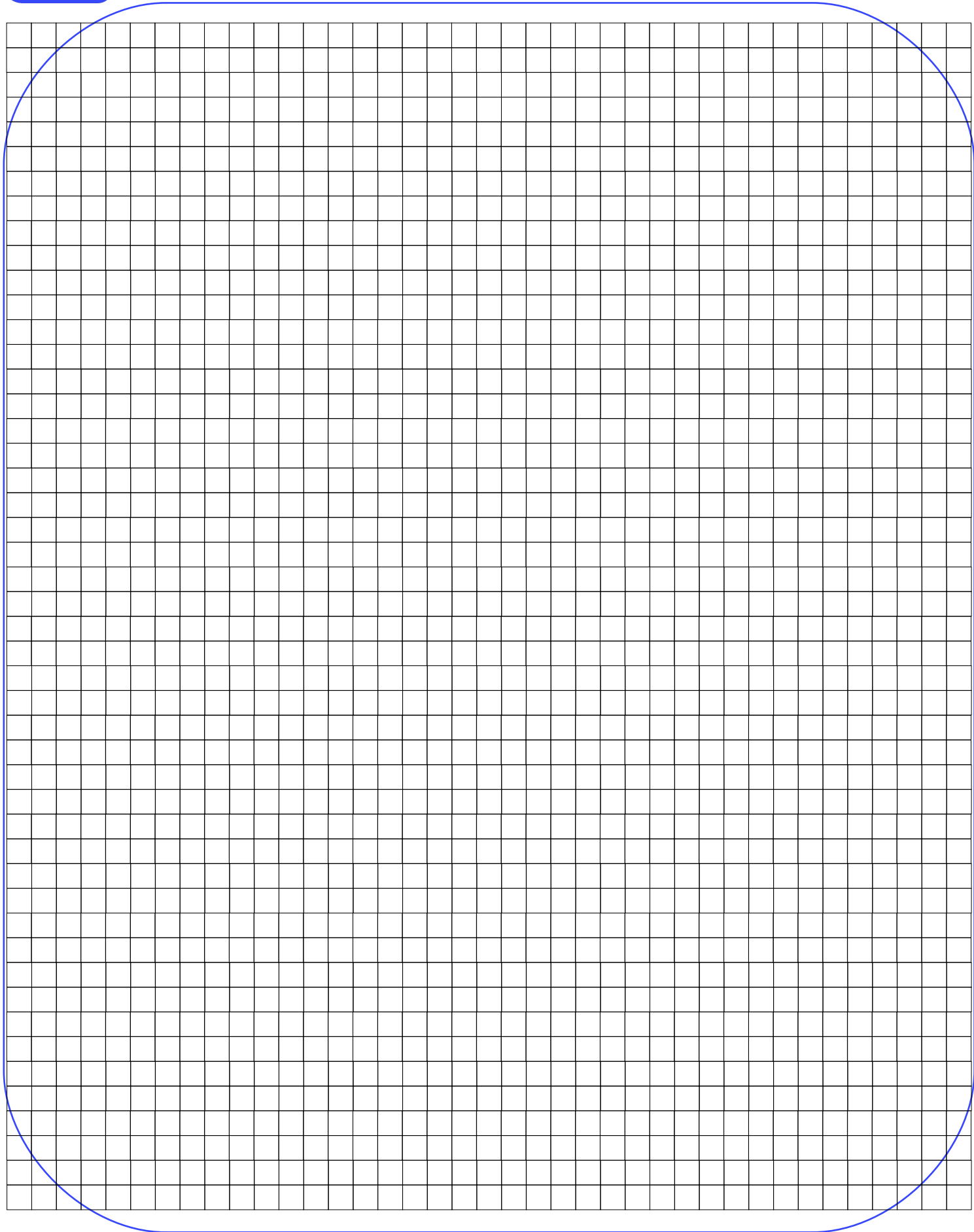
Cette température d'hybridation dépend de la séquence en bases des amorces. Elle se calcule grâce à la formule suivante :

$$T_m = 2 \times (A + T) + 4 \times (G + C)$$

(où A, T, G et C sont respectivement le nombre de chacune de ces bases dans l'oligonucléotide amorce).

Attention, si les 2 amorces ont des T_m différentes, il faudra prendre le T_m le plus faible pour réaliser la PCR, afin d'assurer l'hybridation des 2 amorces.

Liste de consignes pour programmer l’algorithme

A large grid of graph paper with rounded corners, intended for programming an algorithm. The grid is composed of small squares and is enclosed in a blue border. The corners of the grid are rounded with a blue arc. The grid is intended for programming an algorithm.

Annexe 2

Document Professeur _ le point de Fermat d'un triangle

Le point de Fermat d'un triangle

Introduction

En 1636, Pierre de Fermat pose le problème suivant : « Étant donnés trois points, en trouver un quatrième tel que la somme de ses distances aux trois points donnés soit minima ». Torricelli en 1640, puis d'autres mathématiciens en proposent des solutions.

1 Analyse du problème

On considère un triangle ABC .

On suppose qu'il existe un point du plan, nommé F , tel que la somme $MA + MB + MC$ est minimale quand $M = F$.

1. F peut-il se trouver à l'extérieur du triangle ABC ?

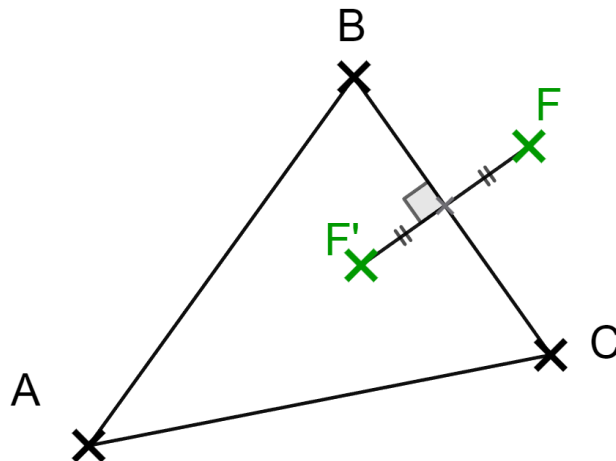
Non. Soit F' le symétrique de F par rapport à (BC) .

Alors,

$$FA > F'A, FB = F'B \text{ et } FC = F'C$$

donc

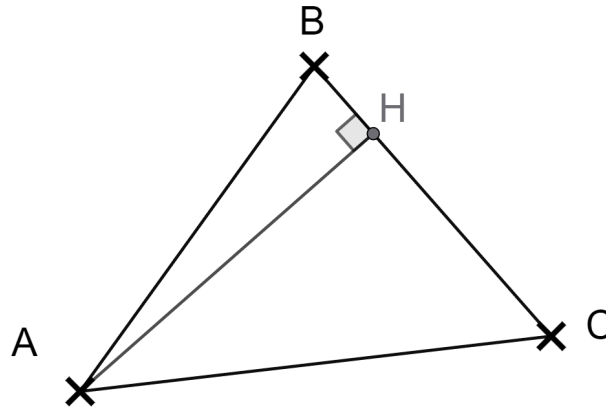
$$FA + FB + FC > F'A + F'B + F'C$$



2. F peut-il être confondu avec l'un des sommets ?

On suppose que $\widehat{ABC} < \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{BCA} < \frac{\pi}{2}$.

Alors, H , le pied de la hauteur issue de A , appartient à $]BC[$.



On a alors :

$$HB + HC = BC$$

D'après le théorème de Pythagore, $HA < AB$ et $HA < AC$. On en déduit

$$HA + HB + HC < BA + BB + BC \text{ et } HA + HB + HC < CA + CB + CC$$

Donc, le minimum de $MA + MB + MC$ n'est atteint ni en B ni en C .

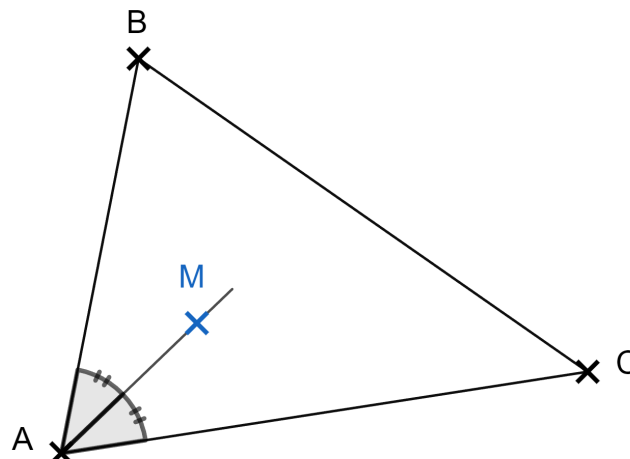
Peut-il être atteint en A ?

— si $\frac{\pi}{3} \leq \widehat{BAC} < \frac{\pi}{2}$, de même que ci-dessus ;

— si $\frac{\pi}{2} \leq \widehat{BAC} < \frac{2\pi}{3}$:

On considère un point M de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ à l'intérieur de ABC .

On nomme $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.



Avec la formule d'Al-Kashi, on écrit :

$$MB^2 = AB^2 + AM^2 - 2 \times AB \times AM \times \cos \alpha,$$

on a

$$MB^2 = AB^2 \left(1 - 2 \cos \alpha \frac{AM}{AB} + \left(\frac{AM}{AB} \right)^2 \right)$$

donc

$$MB = AB \sqrt{1 - 2 \cos \alpha \frac{AM}{AB} + \left(\frac{AM}{AB} \right)^2}.$$

On fait ensuite tendre M vers A sur la bissectrice.

Quand M tend vers A , $\frac{AM}{AB}$ tend vers 0.

On admet que

$$\sqrt{1 - 2 \cos \alpha \frac{AM}{AB} + \left(\frac{AM}{AB} \right)^2} \approx 1 - \cos \alpha \frac{AM}{AB}.$$

On en déduit qu'une valeur approchée de MB est :

$$MB \approx AB \left(1 - \cos \alpha \frac{AM}{AB} \right) \approx AB - AM \cos \alpha.$$

De même avec la formule d'Al-Kashi :

$$MC^2 = AC^2 + AM^2 - 2 \times AC \times AM \times \cos \alpha,$$

et on obtient une valeur approchée de MC est :

$$MC \approx AC - AM \cos \alpha.$$

Donc,

$$\begin{aligned} MA + MB + MC &\approx AM + AB + AC - 2AM \cos \alpha \\ &= AA + AB + AC + AM(1 - 2 \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$\text{Or, par hypothèse : } 0 < 2\alpha \leq \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{donc } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{3},$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} \leq \cos \alpha \leq 1.$$

$$\text{donc } 1 - 2 \cos \alpha \leq 0.$$

Ceci implique que $MA + MB + MC \leq AA + AB + AC$.

Donc, le minimum n'est pas atteint en A .

Conclusion : si tous les angles du triangle ABC sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$, si le point F existe alors il est à l'intérieur du triangle et n'est pas l'un des sommets.

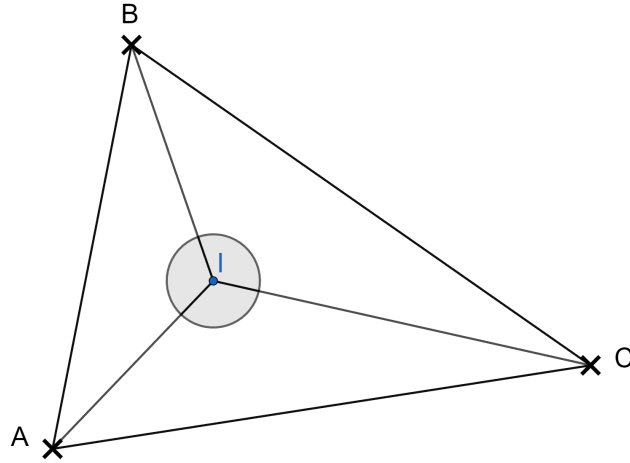
2 Observation d'une animation Geogebra

On considère un triangle dont tous les angles sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

Il semble que le point à l'intérieur du triangle tel que les angles aux sommets valent $\frac{2\pi}{3}$ minimise les distances.

On nomme I ce point. C'est le centre **isogonique** du triangle.

Le point I "voit" les trois côtés du triangle sous le même angle.



3 Centre isogonique et point de Fermat

On démontre à présent que dans un triangle dont tous les angles sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$, le centre isogonique est le point de Fermat du triangle.

Lemme 1. *Trois vecteurs unitaires $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ ont une somme nulle si et seulement si ils forment deux à deux des angles de $\frac{2\pi}{3}$.*

Démonstration. — Notons θ_{ij} la mesure de l'angle $(\vec{e}_i; \vec{e}_j)$ avec $\theta_{ij} \in [0; \pi]$. On multiplie l'égalité

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0}$$

par les $\vec{e}_i$, pour $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$.

On obtient

$$1 + \cos \theta_{12} + \cos \theta_{13} = 0$$

$$\cos \theta_{12} + 1 + \cos \theta_{23} = 0$$

$$\cos \theta_{13} + \cos \theta_{23} + 1 = 0$$

Donc,

$$\cos \theta_{12} = \cos \theta_{13} = \cos \theta_{23} = -\frac{1}{2}.$$

Or, $\theta_{ij} \in [0; \pi]$, donc $\theta_{ij} = \frac{2\pi}{3}$, pour $i \neq j$.

— Réciproquement, si les vecteurs $\vec{e}_i$ forment deux à deux des angles de $\frac{2\pi}{3}$, on a :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ -\frac{1}{2} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Donc,

$$\|\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\|^2 = \sum_{i=j} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j + \sum_{i \neq j} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 3 \times 1 + 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Donc, $\boxed{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0}}.$

□

Lemme 2. Pour tous vecteurs $\vec{a} \neq \vec{0}$ et $\vec{x}$, on a :

$$\|\vec{a} - \vec{x}\| \geq \|\vec{a}\| - \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{x}.$$

Démonstration. On sait que pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \geq \vec{u} \cdot \vec{v}$. On écrit cette inégalité pour $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{x}$:

$$\frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|} \times \|\vec{a} - \vec{x}\| \geq \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \cdot (\vec{a} - \vec{x})$$

ce qui est l'inégalité demandée.

□

On peut à présent montrer le résultat principal.

Théorème 1. Dans un triangle ABC dont tous les angles sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$, le centre isogonique est le point de Fermat du triangle.

Démonstration. On prend I tel que $\widehat{AIB} = \widehat{BIC} = \widehat{CIA} = \frac{2\pi}{3}$ dans le triangle ABC .

Soit M un point du plan. On pose $\vec{a} = \vec{IA}$, $\vec{b} = \vec{IB}$, $\vec{c} = \vec{IC}$ et $\vec{x} = \vec{IM}$.

D'après le **Lemme 1** :

$$\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} + \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} = \vec{0}.$$

D'après le **Lemme 2** :

$$\begin{aligned} MA &= \|\vec{MA}\| = \|\vec{IA} - \vec{IM}\| = \|\vec{a} - \vec{x}\| \geq \|\vec{a}\| - \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{x} \\ MB &= \|\vec{MB}\| = \|\vec{IB} - \vec{IM}\| = \|\vec{b} - \vec{x}\| \geq \|\vec{b}\| - \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \cdot \vec{x} \\ MC &= \|\vec{MC}\| = \|\vec{IC} - \vec{IM}\| = \|\vec{c} - \vec{x}\| \geq \|\vec{c}\| - \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

On somme les trois inégalités

$$MA + MB + MC \geq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\| - \left(\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} + \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} \right) \cdot \vec{x} = IA + IB + IC$$

Ceci est vrai pour tout M donc I est bien le point qui minimise la somme $MA + MB + MC$ c'est-à-dire le point de Fermat du triangle ABC .

□

Bon, maintenant il faut le construire !

4 Construction

On utilise le théorème de l'angle au centre.

On borde ABC de triangles équilatéraux ABC' , BCA' et CAB' .

On appelle $\mathcal{C}_C$, $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ les cercles circonscrits respectifs de ces triangles.

Soit K le point d'intersection de $\mathcal{C}_C$ et $\mathcal{C}_A$.

Alors, d'après le théorème de l'angle au centre :

$$\widehat{BKA} = 2\widehat{BC'A} = \frac{2\pi}{3}$$

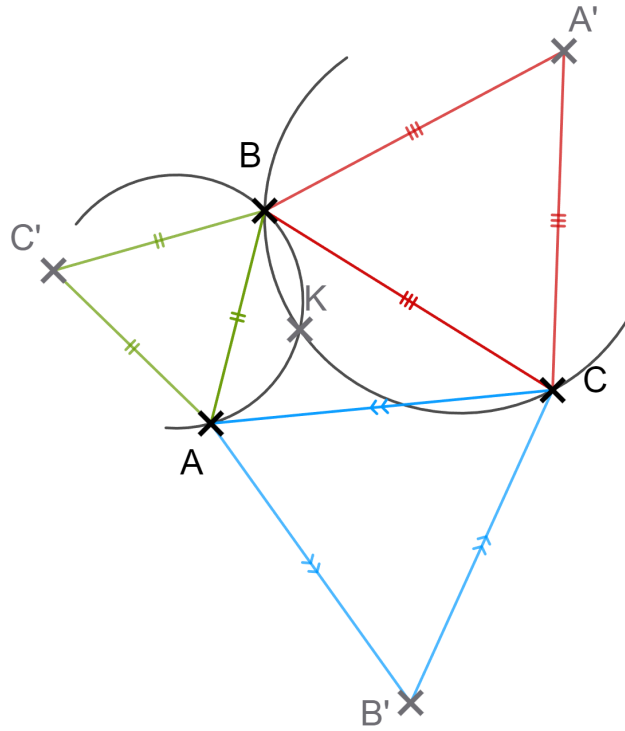
$$\widehat{CKB} = 2\widehat{CA'B} = \frac{2\pi}{3}$$

Donc,

$$\widehat{AKC} = 2\pi - 2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

ce qui signifie que $K \in \mathcal{C}_C$.

Les trois cercles sont donc concourants en K , qui est en fait le point de Fermat.

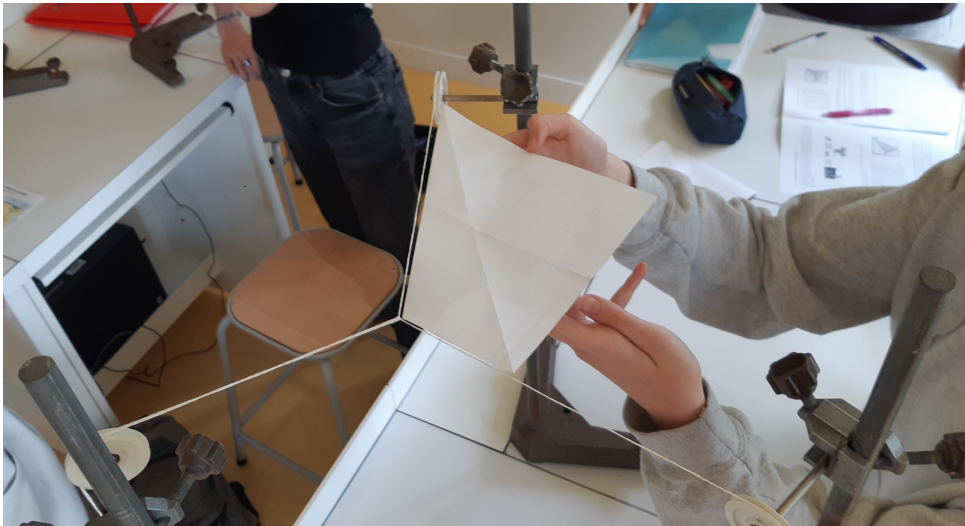


5 Illustration mécanique

Au point P sont attachés trois fils de masse négligeable qui passent par trois poulies A , B et C et portent trois masses aux extrémités A' , B' et C' . Les masses sont égales.

Le système sera en équilibre quand l'énergie potentielle de l'ensemble sera minimale, donc quand la somme des altitudes des trois poids sera minimale. Cela se produit quand la somme des longueurs verticales des trois ficelles est maximale, et donc quand la somme des longueurs horizontales des trois ficelles est minimale. Donc, P est le point de Fermat.

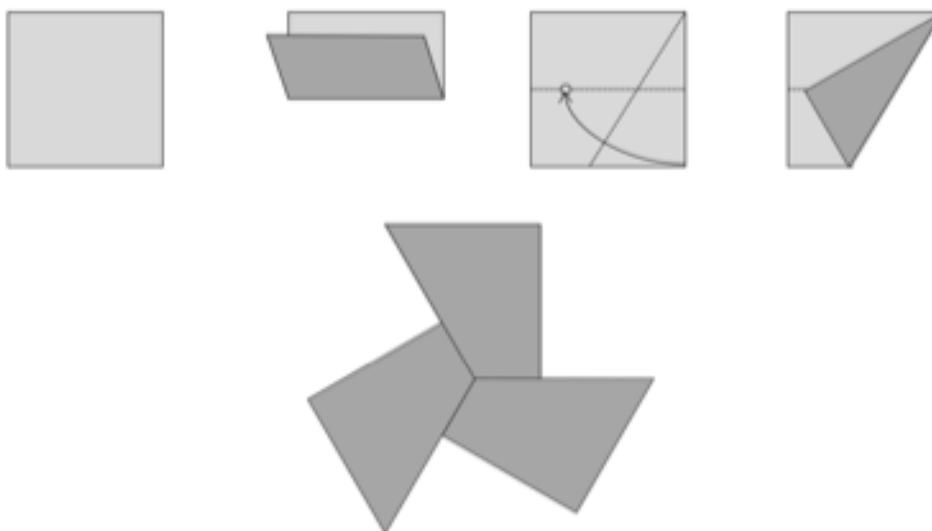
Dans le cas d'un triangle dont aucun angle n'excède $\frac{2\pi}{3}$, quand le système est en équilibre, la résultante des forces exercées en P doit être nulle. On peut représenter ces forces par des vecteurs d'origine P , dont les directions sont celles des ficelles, et qui sont de même norme puisque les masses sont égales. Ces vecteurs forment donc des angles de $\frac{2\pi}{3}$ deux à deux.



Si l'un des angles mesure plus de $\frac{2\pi}{3}$, par exemple l'angle en A , alors $F = A$.

6 Un gabarit de 120° en papier

On part d'une feuille de papier carrée que l'on plie par sa moitié pour ramener un côté sur son côté opposé. On déplie la feuille pour revenir au carré de départ. On plie une deuxième fois la feuille afin d'amener l'un des sommets du carré sur le pli du milieu de la feuille. On obtient ainsi un quadrilatère avec deux angles droits, un angle aigu et un angle obtus comme sur la figure suivante.



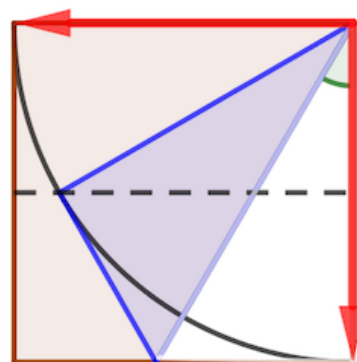
Nous allons démontrer que l'angle obtus du quadrilatère mesure 120° .

— Un argument trigonométrique :

Dessignons comme sur la figure ci-contre un repère. Le point de repliement de la feuille dessine un point mobile le long d'un arc de cercle : on peut repérer le point mobile par l'angle α . Par définition de ce qu'est un pli, l'angle α est égal à deux fois l'angle du pli.

Quelles sont les coordonnées du point mobile dans le repère que nous avons dessiné ?

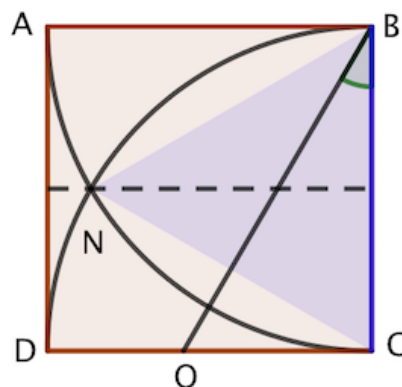
Convenons que l'axe des abscisses est indiqué par la flèche vers le bas, et l'axe des ordonnées par la flèche vers la gauche. Ainsi les coordonnées du point mobile sont exactement : $(\cos \alpha, \sin \alpha)$.



Le quadrilatère qui nous intéresse est obtenu lorsque l'abscisse du point mobile est égale à $\frac{1}{2}$, autrement dit α est tel que $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. On en déduit donc que $\alpha = \frac{\tau}{6}$, où $\tau = 2\pi$. L'angle du pli qui, rappelons-le, vaut la moitié de α est donc de $\frac{\tau}{12}$. On en déduit finalement que l'angle obtus du quadrilatère est $\frac{\tau}{2} - (\frac{\tau}{4} - \frac{\tau}{12}) = \frac{\tau}{3}$. Puisque $\frac{\tau}{3}$, c'est un tiers de tour et qu'un tour fait 360° , on a donc bien montré que l'angle de notre gabarit papier est de 120° .

- Une démonstration purement géométrique

Soit $ABCD$ un carré. Le triangle BCN est équilatéral. En effet, par définition du pliage, N appartient à la médiatrice du segment BC , si bien que $BN = CN$ et, par construction même, $BN = BC$. Notons O le point d'intersection de la droite de pliage avec le côté CD . Par construction, les triangles BCO et BNO sont images l'un de l'autre par la symétrie d'axe (BO) , les points B et O étant invariants, les points C et N étant images l'un de l'autre.



La droite (BO) est donc la médiatrice du côté $[CN]$.

Puisque le triangle BCN est équilatéral, cette médiatrice est aussi la bissectrice de l'angle en B .

Les angles d'un triangle équilatéral étant de 60° , on en déduit que l'angle en B du triangle BCO est de 30° .

Or, le triangle BCO est rectangle en C , donc son angle en O mesure $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

On en déduit finalement que l'angle $\widehat{DOB}$ mesure $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

- REMARQUE : Dans les deux démonstrations que nous avons données, l'argument clé est le fait que le triangle BCN est équilatéral. Dans le premier cas, on le démontre en utilisant un arc de cercle et un argument de trigonométrie, dans le deuxième cas, on utilise deux arcs de cercle. Affaire de goût.

- Reference : <https://images.math.cnrs.fr/poids-poules-et-point-de-fermat-steiner/>

Annexe 3

Document élève _ le point de Fermat d'un triangle

Le point de Fermat d'un triangle

Introduction

En 1636, Pierre de Fermat pose le problème suivant : « Étant donnés trois points, en trouver un quatrième tel que la somme de ses distances aux trois points donnés soit minima ». Torricelli en 1640, puis d'autres mathématiciens en proposent des solutions.

1 Analyse du problème

On considère un triangle ABC .

On suppose qu'il existe un point du plan, nommé F , tel que la somme $MA + MB + MC$ est minimale quand $M = F$.

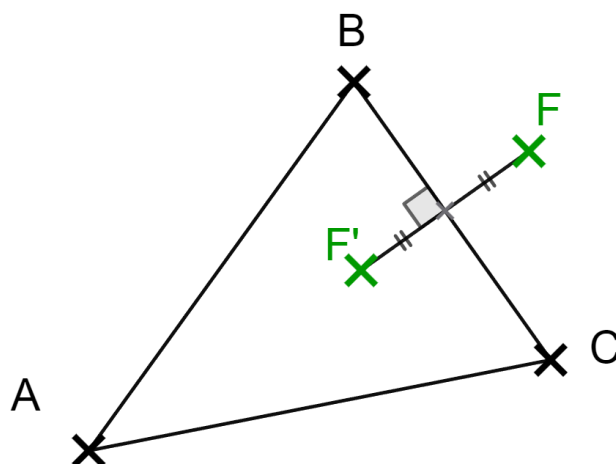
1. F peut-il se trouver à l'extérieur du triangle ABC ?

.....

.....

.....

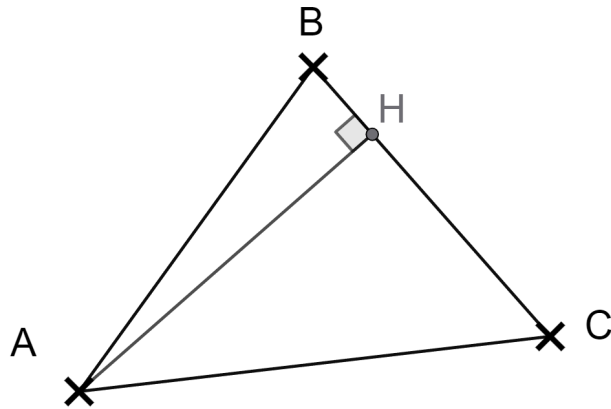
.....



2. F peut-il être confondu avec l'un des sommets ?

On suppose que $\widehat{ABC} < \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{BCA} < \frac{\pi}{2}$.

Alors, H , le pied de la hauteur issue de A , appartient à $]BC[$.



.....

.....

.....

.....

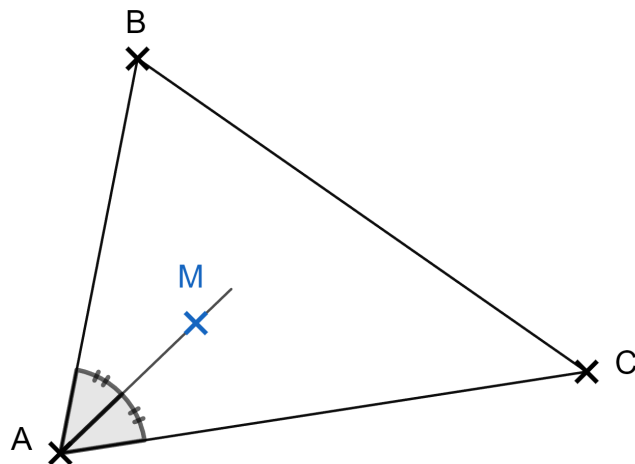
Peut-il être atteint en A ?

— si $\frac{\pi}{3} \leq \widehat{BAC} < \frac{\pi}{2}$, de même que ci-dessus ;

— si $\frac{\pi}{2} \leq \widehat{BAC} < \frac{2\pi}{3}$:

On considère un point M de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ à l'intérieur de ABC .

On nomme $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.



Avec la formule d'Al-Kashi, on écrit :

$$MB^2 = \dots\dots\dots$$

$$\text{on a } MB^2 = AB^2 \dots\dots\dots$$

$$\text{donc } MB = AB \dots\dots\dots$$

On fait ensuite tendre M vers A sur la bissectrice.

Quand M tend vers A , $\frac{AM}{AB}$ tend vers 0.

On admet que

$$\sqrt{1 - 2 \cos \alpha \frac{AM}{AB} + \left(\frac{AM}{AB}\right)^2} \approx 1 - \cos \alpha \frac{AM}{AB}.$$

On en déduit qu'une valeur approchée de MB est :

$$MB \approx \dots\dots\dots$$

De même avec la formule d'Al-Kashi :

$$MC^2 = \dots\dots\dots$$

et on obtient une valeur approchée de MC est :

$$MC \approx \dots\dots\dots$$

Donc,

$$\begin{aligned} MA + MB + MC &\approx \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Or, par hypothèse : $0 < 2\alpha \leq \frac{2\pi}{3}$,

donc $\dots\dots\dots$

donc $\dots\dots\dots$

donc $\dots\dots\dots$

Ceci implique que $\dots\dots\dots$

Donc, $\dots\dots\dots$

Conclusion : si tous les angles du triangle ABC sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$, si le point F existe alors il est à l'intérieur du triangle et n'est pas l'un des sommets.

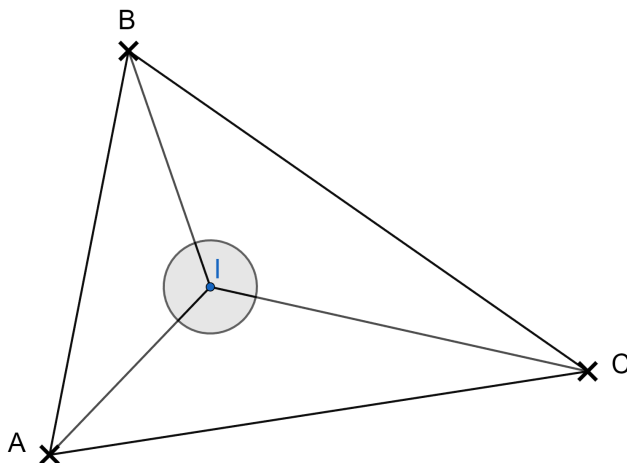
2 Observation d'une animation Geogebra

On considère un triangle dont tous les angles sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

Il semble que le point à l'intérieur du triangle tel que les angles aux sommets valent $\frac{2\pi}{3}$ minimise les distances.

On nomme I ce point. C'est le centre isogonique du triangle.

Le point I "voit" les trois côtés du triangle sous le même angle.



3 Centre isogonique et point de Fermat

On démontre à présent que dans un triangle dont tous les angles sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$, le centre isogonique est le point de Fermat du triangle.

Lemme 1. *Trois vecteurs unitaires $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ ont une somme nulle si et seulement si ils forment deux à deux des angles de $\frac{2\pi}{3}$.*

Démonstration. Notons θ_{ij} la mesure de l'angle $(\vec{e}_i; \vec{e}_j)$ avec $\theta_{ij} \in [0; \pi]$.

On multiplie l'égalité

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0}$$

par les $\vec{e}_i$, pour $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$.

On obtient :

.....

.....

Donc, $\cos \theta_{12} = \cos \theta_{13} = \cos \theta_{23} = \dots\dots\dots$

Or, $\theta_{ij} \in [0; \pi]$, donc

Réciproquement, si les vecteurs $\vec{e}_i$ forment deux à deux des angles de $\frac{2\pi}{3}$, on a :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ -\frac{1}{2} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

.....

□

Lemme 2. Pour tous vecteurs $\vec{a} \neq \vec{0}$ et $\vec{x}$, on a :

$$\|\vec{a} - \vec{x}\| \geq \|\vec{a}\| - \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{x}.$$

Démonstration. On sait que pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \geq \vec{u} \cdot \vec{v}$. On écrit cette inégalité pour $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{x}$:

.....

ce qui est l'inégalité demandée.

□

On peut à présent montrer le résultat principal.

Théorème 1. Dans un triangle ABC dont tous les angles sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$, le centre isogonique est le point de Fermat du triangle.

Démonstration. On prend I tel que $\widehat{AIB} = \widehat{BIC} = \widehat{CIA} = \frac{2\pi}{3}$ dans le triangle ABC . Soit M un point du plan. On pose $\vec{a} = \vec{IA}$, $\vec{b} = \vec{IB}$, $\vec{c} = \vec{IC}$ et $\vec{x} = \vec{IM}$.

D'après le **Lemme 1** :

D'après le **Lemme 2** :

$$MA = \|\vec{MA}\| = \|\vec{a} - \vec{x}\| = \dots\dots\dots$$

$$MB = \|\vec{MB}\| = \|\vec{b} - \vec{x}\| = \dots\dots\dots$$

$$MC = \|\vec{MC}\| = \|\vec{c} - \vec{x}\| = \dots\dots\dots$$

On somme les trois inégalités $MA + MB + MC \geq \dots\dots\dots$

Ceci est vrai pour tout M donc I est bien le point qui minimise la somme $MA + MB + MC$ c'est-à-dire le point de Fermat du triangle ABC . □

Bon, maintenant il faut le construire !

4 Construction

On utilise le théorème de l'angle au centre.

On borde ABC de triangles équilatéraux ABC' , BCA' et CAB' .

On appelle $\mathcal{C}_C$, $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ les cercles circonscrits respectifs de ces triangles.

Soit K le point d'intersection de $\mathcal{C}_C$ et $\mathcal{C}_A$.

Alors, d'après le théorème de l'angle au centre :

$$\widehat{BKA} = 2\widehat{BC'A} = \frac{2\pi}{3}$$

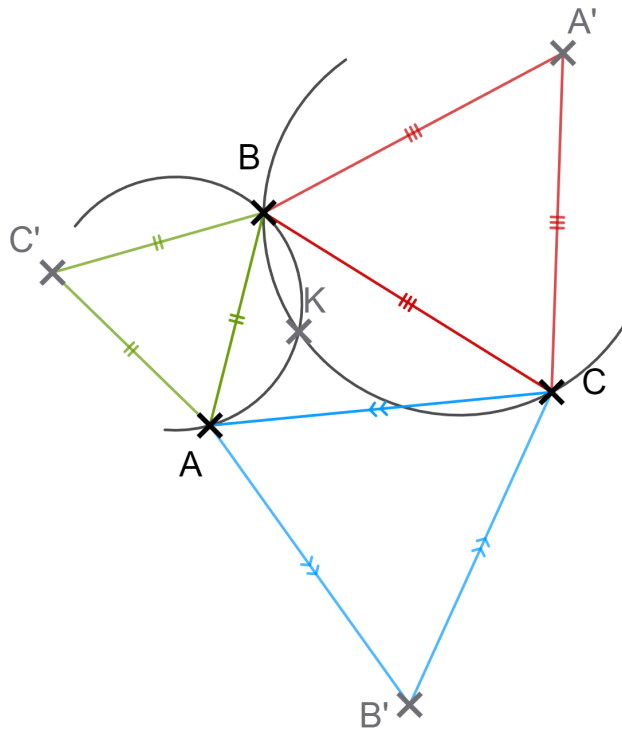
$$\widehat{CKB} = 2\widehat{CA'B} = \frac{2\pi}{3}$$

Donc,

$$\widehat{AKC} = 2\pi - 2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

ce qui signifie que $K \in \mathcal{C}_C$.

Les trois cercles sont donc concourants en K , qui est en fait le point de Fermat.

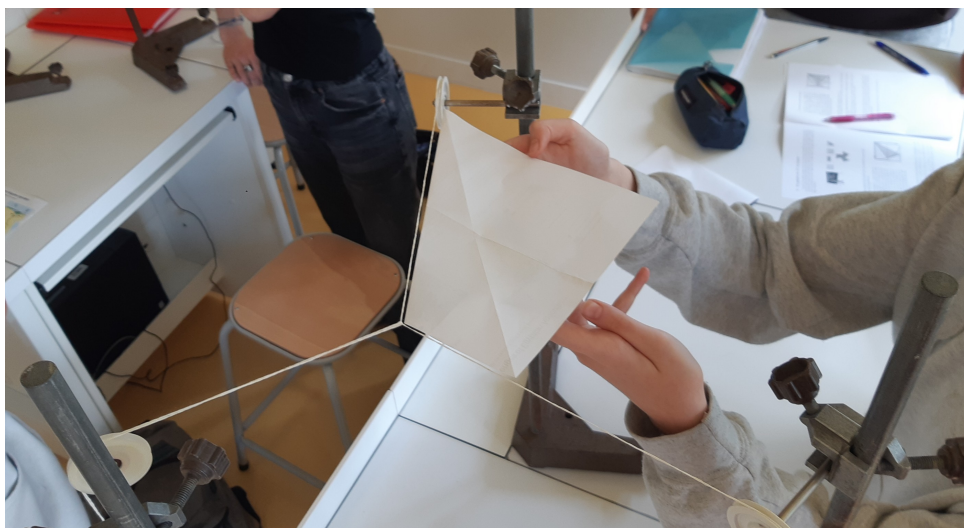


5 Illustration mécanique

Au point P sont attachés trois fils de masse négligeable qui passent par trois poulies A , B et C et portent trois masses aux extrémités A' , B' et C' . Les masses sont égales.

Le système sera en équilibre quand l'énergie potentielle de l'ensemble sera minimale, donc quand la somme des altitudes des trois poids sera minimale. Cela se produit quand la somme des longueurs verticales des trois ficelles est maximale, et donc quand la somme des longueurs horizontales des trois ficelles est minimale. Donc, P est le point de Fermat.

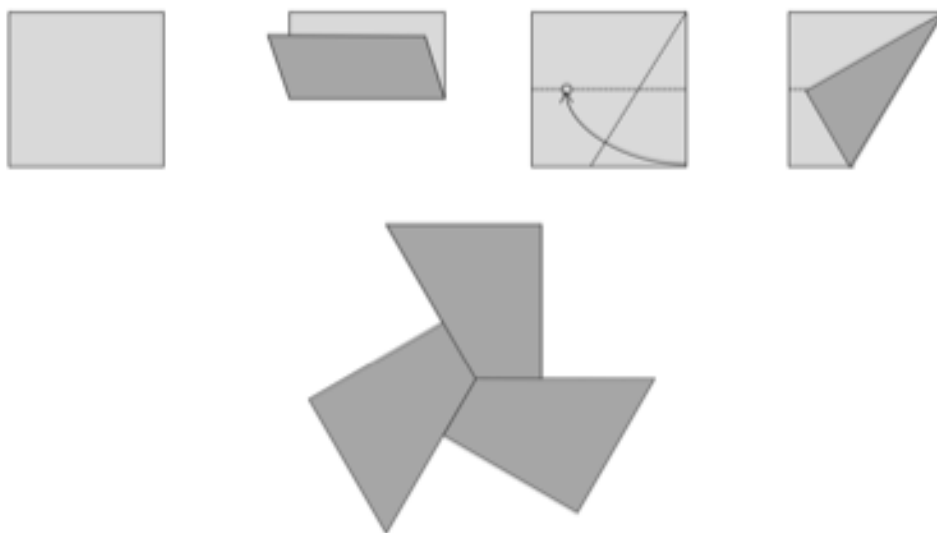
Dans le cas d'un triangle dont aucun angle n'excède $\frac{2\pi}{3}$, quand le système est en équilibre, la résultante des forces exercées en P doit être nulle. On peut représenter ces forces par des vecteurs d'origine P , dont les directions sont celles des ficelles, et qui sont de même norme puisque les masses sont égales. Ces vecteurs forment donc des angles de $\frac{2\pi}{3}$ deux à deux.



Si l'un des angles mesure plus de $\frac{2\pi}{3}$, par exemple l'angle en A , alors $F = A$.

6 Un gabarit de 120° en papier

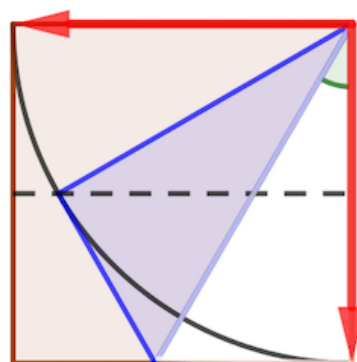
On part d'une feuille de papier carrée que l'on plie par sa moitié pour ramener un côté sur son côté opposé. On déplie la feuille pour revenir au carré de départ. On plie une deuxième fois la feuille afin d'amener l'un des sommets du carré sur le pli du milieu de la feuille. On obtient ainsi un quadrilatère avec deux angles droits, un angle aigu et un angle obtus comme sur la figure suivante.



Nous allons démontrer que l'angle obtus du quadrilatère mesure 120° .

— Un argument trigonométrique :

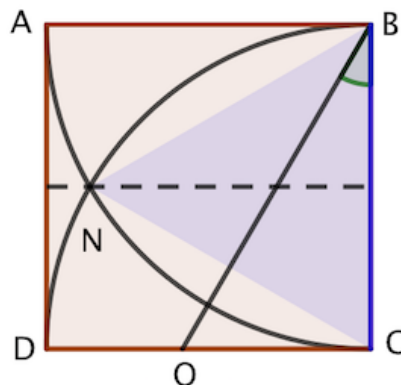
Dessignons comme sur la figure ci-contre un repère. Le point de repliement de la feuille dessine un point mobile le long d'un arc de cercle : on peut repérer le point mobile par l'angle α . Par définition de ce qu'est un pli, l'angle α est égal à deux fois l'angle du pli. Quelles sont les coordonnées du point mobile dans le repère que nous avons dessiné ? Convenons que l'axe des abscisses est indiqué par la flèche vers le bas, et l'axe des ordonnées par la flèche vers la gauche. Ainsi les coordonnées du point mobile sont exactement : $(\cos \alpha, \sin \alpha)$.



Le quadrilatère qui nous intéresse est obtenu lorsque l'abscisse du point mobile est égale à $\frac{1}{2}$, autrement dit α est tel que $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. On en déduit donc que $\alpha = \frac{\tau}{6}$, où $\tau = 2\pi$. L'angle du pli qui, rappelons-le, vaut la moitié de α est donc de $\frac{\tau}{12}$. On en déduit finalement que l'angle obtus du quadrilatère est $\frac{\tau}{2} - (\frac{\tau}{4} - \frac{\tau}{12}) = \frac{\tau}{3}$. Puisque $\frac{\tau}{3}$, c'est un tiers de tour et qu'un tour fait 360° , on a donc bien montré que l'angle de notre gabarit papier est de 120° .

- Une démonstration purement géométrique

Soit $ABCD$ un carré. Le triangle BCN est équilatéral. En effet, par définition du pliage, N appartient à la médiatrice du segment BC , si bien que $BN = CN$ et, par construction même, $BN = BC$. Notons O le point d'intersection de la droite de pliage avec le côté CD . Par construction, les triangles BCO et BNO sont images l'un de l'autre par la symétrie d'axe (BO) , les points B et O étant invariants, les points C et N étant images l'un de l'autre.



La droite (BO) est donc la médiatrice du côté $[CN]$.

Puisque le triangle BCN est équilatéral, cette médiatrice est aussi la bissectrice de l'angle en B .

Les angles d'un triangle équilatéral étant de 60° , on en déduit que l'angle en B du triangle BCO est de 30° .

Or, le triangle BCO est rectangle en C , donc son angle en O mesure $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. On en déduit finalement que l'angle $\widehat{DOB}$ mesure $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

— REMARQUE : Dans les deux démonstrations que nous avons données, l'argument clé est le fait que le triangle BCN est équilatéral. Dans le premier cas, on le démontre en utilisant un arc de cercle et un argument de trigonométrie, dans le deuxième cas, on utilise deux arcs de cercle. Affaire de goût.

— Reference : <https://images.math.cnrs.fr/poids-poulies-et-point-de-fermat-steiner/>