ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Versailles
Lycée Marie Curie

Pontoise
Lycée Camille Pissarro

"What I really am is a mathematician. Rather than being remembered as the first woman this or that, I would prefer to be remembered, as a mathematician should, simply for the theorems I have proved and the problems I have solved."

Julia Robinson nait en 1919. Après une enfance perturbée par la perte de sa mère et la maladie, influencée par la lecture du livre *Les grands mathématiciens* d'E.T. Bell, elle débute des études de mathématiques à Berkeley. Elle est amenée à enseigner les statistiques avant de revenir aux mathématiques, sous la direction d'Alfred Tarski. Ses travaux portent sur les questions de calculabilité et de décision, et particulièrement sur le dixième problème posé par Hilbert au congrès international de 1900 : peut-on trouver une méthode (un algorithme) permettant de savoir si une équation diophantienne (équation polynomiale à coefficients et inconnues rationnels) possède des solutions ?
Le mathématicien prodige russe Youri Matiiassevich s'inspire de ce travail et prouve la solution – négative – du dixième problème. Ils collaborent, s'écrivent et se rencontrent, coopération tout-à-fait exceptionnelle en période de « guerre froide » (leur correspondance est épluchée par la police).

Julia Robinson devra encore lutter contre la maladie et sera élue présidente de l'académie des sciences des États-Unis en 1982. Elle meurt en 1985.

Stage ouvert aux lycéennes et lycéens de terminale candidat(e)s au Concours général , les 17 et 18 février 2025

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont habituellement concernés : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.
La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent ou ont hébergé nos stages : l'INRIA, l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet à Antony, le lycée Vallée de Chevreuse à Gif sur Yvette, le lycée La Bruyère, le lycée Marie Curie et le lycée Hoche de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspectrices et inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIÈRE, Anne MENANT, Marion PACAUD, Nicolas RAMBEAUD, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christine WEILL et les retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF

Les intervenants professeurs : Richard CROUAU (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Thomas DUMAS (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Laurent GRIERE (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Catherine HOUARD (Retraitée), Christian MARGUERITE (Lycée Gaspard Monge, SAVIGNY SUR ORGE), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), François REGUS (Lycée Viollet-le-Duc, VILLIERS SAINT FREDERIC)

Professeurs accompagnants : Cécile GOISNARD (lycée Richelieu, RUEIL-MALMAISON), Caroline DE BASQUIAT (lycée Saint-Jean Hulst, VERSAILLES)

Emploi du temps

Lundi 17 février 2025

	Groupe 1 Vers	Groupe 2 Vers	Groupe 3 Vers	Pontoise
10 heures	Accueil			
10 h 10	Arithmétique SM	Géométrie CD	Fonctions CM	
12 h 10	Repas			
13 heures	Fonctions CM	Arithmétique SM	Géométrie CD	
15 h 15	Exposé + Films			

Mardi 18 février 2025

	Groupe 1 Vers	Groupe 2 Vers	Groupe 3 Vers	Pontoise
10 heures	Suites FR	Dénombrement PM	Arithmétique SM	
12 heures	Repas			
12 h 50	Géométrie CD	Suites FR	Dénombrement PM	
15 heures	Dénombrement PM	Fonctions CM	Suites FR	Exposé et films

Arithmétique

Exercice 1 – Olympiade mathématique du Canada 2019
Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a + b^3$soit divisible par $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$.
Montrer que $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$ est divisible par le cube d'un entier plus grand que 1.

Exercice 2
Soit a un entier strictement positif pair et n un entier naturel non nul. On suppose $1 + a + a^2 + \cdots + a^n$ est un carré parfait. Montrer que a est un multiple de 8.

Exercice 3
Montrer que pour tout entier naturel n, 120 est un diviseur de $n^5 - 5n^3 + 4n$.

Exercice 4
Montrer que pour tout entier $n > 9$, le nombre entier $N = n^2 - 13n + 40$ n'est pas un carré parfait.

Exercice 5 – Olympiades internationales de mathématiques 1969
Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels a non nuls tels que, pour tout entier naturel non nul n, le nombre $N = a + n^4$ ne soit pas premier.

Exercice 6
Soit a un nombre entier naturel impair. Montrer que, pour tous les entiers naturels distincts non nuls m et n, les nombres $a^{2^n} + 2^{2^n}$ et $a^{2^m} + 2^{2^m}$ sont premiers entre eux.

Exercice 7
La différence entre les cubes de deux entiers consécutifs est le carré d'un entier. Montrer que cet entier est une somme de deux carrés.

Exercice 8 – Extrait Concours Général 1990

1. Trouver trois nombres entiers naturels a, b, c, distincts ou non, tels que :
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

2. Déterminer tous les nombres entiers naturels n tels qu'il existe n nombres entiers naturels $x_1, x_2, \dots, x_n$, distincts ou non, tels que :
$$1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2}.$$

Suites numériques

Exercice 1
Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbf{N}^*$ telles que, pour tout entier n :
$$u_n v_n = 1 \text{ et } u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$
Déterminer, en fonction de n, l'expression de $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

Exercice 2
Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs définie sur $\mathbf{N}^*$ et telle que, pour tous les entiers non nuls n et m, $u_{n+m} \leq u_n + u_m$.
Montrer que si $m \leq n$, alors $u_n \leq m u_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right) u_m$.

Exercice 3
Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbf{Z}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$ et telles que :
pour tous entiers relatifs m et n, $f(m+n) + f(mn-1) = f(m)f(n) + 2$. (*)

Exercice 4
Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbf{N}^*$ et de terme général $u_n = \frac{1}{n+n^2}$. On suppose qu'il existe deux entiers naturels strictement positifs m et n tels que $m < n$ et $u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} = \frac{1}{13}$.
Déterminer l'entier $n - m$.

Exercice 5 – Asian Pacific Mathématics Olympiads 2015
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels est dite *agréable* lorsqu'elle vérifie les trois conditions suivantes :
(1) $u_0 > 0$
(2) Pour tout entier naturel i, $u_{i+1} = 2u_i + 1$ ou $u_{i+1} = \frac{u_i}{u_i+2}$.
(3) Il existe un entier strictement positif k tel que $u_k = 2\,014$.
Trouver le plus petit entier strictement positif m tel qu'il existe une suite agréable $(u_m)_{n\geq 0}$ vérifiant
$$u_m = 2\,014.$$

Exercice 6 – Extrait du concours général 2024
Pour tout réel $\alpha \geq 0$, on appelle *suite associée* à α, la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = \alpha \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \sqrt{u_n}.$$
Partie 1 : Généralités
1. Soit α un réel strictement positif. Démontrer que suite (u_n) associée à α vérifie $u_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 0$.
2. Soit α et β deux réels tels que $0 \leq \alpha \leq \beta$. On note (u_n) la suite associée à α et (v_n) la suite associée à β. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0, u_n \leq v_n$.
3. On note (w_n) la suite associée à 0. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1, w_n \geq 1$.
4. Soit α un réel positif ou nul. On suppose que la suite (u_n) associée à α converge vers un réel l. Déterminer la valeur de l.
5. Soit α un réel tel que $\alpha > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Justifier que la suite (u_n) associée à α est strictement décroissante. Que peut-on en déduire en termes de convergence ?

Partie 2 : Un cas particulier
Dans toute cette partie, on note (t_n) la suite associée à 4 et on définit la suite (s_n) par :
$$\text{pour tout entier } n \geq 0,\ s_n = n(t_n - 1).$$
6. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1, 1 + \frac{2}{n} \leq t_n \leq 1 + \frac{3}{n}$.
7. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1, 2 \leq s_n \leq 2 + \frac{6}{n}$.
8. Déterminer la limite de $\frac{t_n - 1 - \frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Fonctions – Égalités, inégalités et fonctions

Exercice 1
Soit a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que :
$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

Exercice 2
Déterminer tous les nombres réels x et y tels que si on pose $f(x,y) = x^2(x^2+1)+(x+y)((x+y)^2+1)$ alors $f(x,y) = f(-x,-y) = 1$.

Exercice 3
1. Montrer que pour tous réels positifs a, b, c, d, $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ puis que $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.
2. Soit x, y, z des nombres réels positifs et strictement inférieurs à 1. Montrer que :
$$\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}$$

Exercice 4
Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$ et soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^a = \mathrm{e}^{a\ln x}$.
1. Montrer que pour tout nombre réel u tel que $u > -1$, $(1+u)^a \leq 1+au$.
2. En déduire que pour tous nombres réels strictement positifs x et y, $x^y + y^x > 1$.

Exercice 5
Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ telles que :
pour tous réels x et y, $f(2x) = f(x+y)f(y-x)+f(x-y)f(-x-y)$.

Exercice 6
Déterminer les nombres réels k tels qu'il existe trois nombres réels x, y, z deux à deux distincts vérifiant :
$x+\frac{1}{y} = y+\frac{1}{z} = z+\frac{1}{x} = k$.

Exercice 7 – Extrait Concours Général 2019
On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0,+\infty[$ et à valeurs dans $[0,+\infty[$.
Pour f et g dans $\mathcal{P}$, on définit la fonction $h = f \circ g$ en posant, pour tout nombre réel $x \geq 0$, $h(x) = f(g(x))$.
Si, pour tout nombre réel $x \geq 0$, $f(x) \geq g(x)$, on note $f \geq g$.
On note u et v les fonctions de $\mathcal{P}$ définies par, pour tout nombre réel $x \geq 0$, $u(x) = e^x - 1$ et $v(x) = \ln(x+1)$.
La fonction f est une *fonction polynomiale* si f est nulle ou s'il existe un entier $d \geq 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, , \dots, a_d$ où $a_d \neq 0$ tels que, pour tout nombre réel $x \geq 0$, $f(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Les nombres réels $a_0, a_1, , \dots, a_d$ sont alors appelés coefficients de la fonction polynomiale f.

Si $\mathcal{S}$ est un ensemble de fonctions de $\mathcal{P}$, on définit les propriétés :
$(\boldsymbol{P_1})$: $\mathcal{S}$ contient les fonctions u et v.
$(\boldsymbol{P_2})$: $\mathcal{S}$ contient toutes les fonctions constantes positives.
$(\boldsymbol{P_3})$: si f et g sont dans $\mathcal{S}$, alors $f+g$ est dans $\mathcal{S}$.
$(\boldsymbol{P_4})$: si f et g sont dans $\mathcal{S}$, alors $f \circ g$ est dans $\mathcal{S}$.
$(\boldsymbol{P_5})$: si f et g sont dans $\mathcal{S}$ avec $f \geq g$, alors $f-g$ est dans $\mathcal{S}$.
$(\boldsymbol{P_6})$: si f et g sont dans $\mathcal{S}$, alors $f \times g$ est dans $\mathcal{S}$..
Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de fonctions de $\mathcal{P}$ qui vérifient les propriétés , $(\boldsymbol{P_1}), (\boldsymbol{P_2}), (\boldsymbol{P_3}), (\boldsymbol{P_4}), (\boldsymbol{P_5}), (\boldsymbol{P_6})$.
1. Soit l la fonction définie par, pour tout nombre réel $x \geq 0$, $l(x) = x$. Démontrer que la fonction l est dans $\mathcal{T}$.
2. Déterminer toutes les fonctions affines qui sont dans $\mathcal{T}$.
3. Soit p la fonction polynomiale définie par, pour tout nombre réel $x \geq 0$, $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Démontrer que la fonction p est dans $\mathcal{T}$.
4. Une fonction polynomiale de $\mathcal{P}$ est-elle toujours dans $\mathcal{T}$?

Géométrie – Nombres complexes

Exercice 1

Soit A, B et C trois points non alignés du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. On note $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.
2. On considère un triangle ABC, non nécessairement équilatéral et on construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles équilatéraux de base $[AB], [BC], [CA]$.
   Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Exercice 2

Montrer que le triangle de sommets A, B, C d'affixes respectives a, b, c est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Exercice 3

Soit ABC un triangle.
Une droite D_1 parallèle à (BC) coupe les droites (AB) et (AC) respectivement en M et N.
Une droite D_2 parallèle à (CA) coupe les droites (BC) et (BA) respectivement en P et Q.
Une droite D_3 parallèle à (AB) coupe les droites (CA) et (CB) respectivement en R et S.
Montrer que les triangles MPR et NQS ont même aire.

Exercice 4 – Concours Général 1994

Soit ABC un triangle et P un point du plan à l'intérieur du triangle. On note L, M, N les projetés orthogonaux de P respectivement sur les droites $(BC), (CA), (AB)$.
Déterminer la position du point P pour lequel la quantité $BL^2 + CM^2 + AN^2$ est minimale.

Exercice 5 – Extrait Concours Général 1998

Un tétraèdre $ABCD$ vérifie les conditions suivantes :

(1) Les arêtes $[AB], [AC], [AD]$ sont deux à deux orthogonales
(2) $AB = 3$ et $CD = \sqrt{2}$.

Déterminer la Valeur minimale de $S = BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$.

Exercice 6 – Théorème d'Apollonius

1. Soit MNP un triangle. Montrer que si R est le point d'intersection de la droite (NP) avec l'une des deux bissectrices (intérieure ou extérieure) de l'angle $\widehat{\mathrm{NMP}}$, alors $\frac{\mathrm{RN}}{\mathrm{RP}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MP}}$.

On admet la réciproque de cette propriété.

2. Soit A et B deux points distincts et d un nombre réel strictement positif. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = d$.

Dénombrement – Probabilités

Exercice 1
Sur un tableau noir, un élève a écrit 17 entiers naturels dont le chiffre des unités appartient à l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Montrer que l'on peut toujours en sélectionner 5 dont la somme est un multiple de 5.

Exercice 2 – Asian Pacific Mathématics Olympiads 2008
On considère une classe comportant 46 élèves. Dans cette classe, les élèves forment des groupes de trois personnes (trios), deux trios quelconques distincts ayant toujours au plus une personne en commun.
Montrer qu'on peut, dans cette classe, constituer un ensemble de 10 élèves ne contenant aucun trio complet.

Exercice 3 – Asian Pacific Mathématics Olympiads 2014
Soit n et b deux entiers naturels non nuls. On dit que n est *b-répartissant* s'il existe un ensemble E de n entiers positifs distincts, inférieurs à b, n'ayant pas deux sous-ensembles U et V disjoints et tels que la somme des éléments de U soit égale à la somme des éléments de V.
Montrer que 8 est 100-répartissant.

Exercice 4 – Extrait du Concours général 2000
On dispose de b boules blanches et n boules noires – au moins une de chaque –, que l'on répartit entre deux urnes de façon qu'aucune d'elle ne soit vide.
On note s le nombre de boules dans la première et r celui de ces boules qui sont blanches.
L'événement considéré est le tirage d'une boule au hasard dans l'une des urnes, urne choisie au hasard. Le but est de déterminer les répartitions rendant maximale la probabilité p de tirer une boule blanche.

1. Exprimer p en fonction de b, n, r et s.
2. Dans cette question, on fixe la valeur de s. Comment choisir r pour augmenter p ?
3. Résoudre l'exercice.

Exercice 5
Pierrot s'amuse avec ses petits dinosaures-jouets en plastique. Il fait des *combats* entre ses jouets, pris 2 à 2. Il se prépare à faire un combat entre le jouet J_1 (un petit tricératops) et le jouet J_2 (un petit tyrannosaure).
Les règles du jeu sont les suivantes : les deux jouets sont lancés en l'air, simultanément, et retombent indépendamment sur le plancher. Chaque jouet peut retomber **debout** ou **couché**. Quand un jouet tombe debout, il mérite un point. Le vainqueur est le premier à être retombé 2 fois debout, si l'adversaire n'a pas encore réussi à retomber 1 fois debout. Il s'agit donc d'une course au premier qui accumule deux points (avec la convention qu'un score de 2 à 1, de 1 à 2 ou de 1 à 1 correspond à un *match nul*).
On suppose que J_1 tombe debout, en moyenne, une fois sur trois lancers et que J_2 tombe debout, en moyenne, une fois sur quatre lancers. Déterminer :

1. La probabilité que J_1 gagne.
2. La probabilité que J_2 gagne.
3. La probabilité qu'il y ait match nul.

Exercice 6 – Extrait Concours général 2022
Si E est un événement, on désigne par $P(E)$ la probabilité de E. On pourra librement utiliser le résultat suivant :
si $D_1, \ldots, D_k$ sont des événements deux à deux disjoints, alors $P(D_1 \cup \ \ldots \cup \ D_k) = P(D_1) + \cdots + P(\ D_k)$.

Ambre dispose d'une pièce qui, à chaque lancer, donne PILE avec une probabilité $a \in \,]0,1[$ et donne FACE avec une probabilité $1 - a$.

Benjamin dispose d'une pièce qui, à chaque lancer, donne PILE avec une probabilité $b \in]0,1[$ et donne FACE avec une probabilité $1 - b$.
Ils décident de jouer au jeu suivant : chacun lance sa pièce. S'ils obtiennent tous les deux PILE ou tous les deux FACE, ils relancent chacun leur pièce et continuent ainsi tant qu'ils obtiennent simultanément PILE ou simultanément FACE. *A contrario*, ils s'arrêtent dès que l'un obtient PILE et l'autre FACE. Celui qui obtient PILE est alors déclaré gagnant. Tous les lancers sont indépendants.
Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n l'événement « Ambre gagne lors du $n^{\text{ème}}$ lancer », B_n l'événement « Benjamin gagne lors du $n^{\text{ème}}$ lancer » et C_n l'événement « chacun des deux joueurs lance au moins n fois sa pièce lors de ce jeu ».

1. **a.** On pose $\lambda = 1 - a - b + 2ab$. Démontrer que $P(C_2) = \lambda$.
   b. Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(C_n)$. En déduire une expression de $P(C_n)$ en fonction de n.
2. Soit $n \geq 1$ un entier.
   a. Exprimer $P(A_n)$ en fonction de a, b et $P(C_n)$.
   b. En déduire une expression de $P(A_n)$ en fonction de a, b et n.
   c. Donner une expression de $P(B_n)$ en fonction de a, b et n.
3. On note G_A l'événement « Ambre est gagnante » et G_B l'événement « Benjamin est gagnant ».
   a. Démontrer que $0 < \lambda < 1$.
   b. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $P(G_A) \geq a(1-b) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$ et $P(G_B) \geq b(1-a) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$.
   c. On note $G_\emptyset$ l'événement « ce jeu n'a aucun gagnant ». Déduire de ce qui précède que :
$$P(G_A) = \frac{a(1-b)}{1-\lambda}, P(G_B) = \frac{b(1-a)}{1-\lambda} \text{ et } P(G_\emptyset) = 0.$$