

## « Plus je passais de temps à faire des maths, plus j'étais heureuse »

En août 2014, Maryam Mirzakhani reçoit la *médaille Fields* décernée par le Congrès international des mathématiciens. Première femme à obtenir cette distinction qui avait honoré jusque-là une soixantaine de mathématiciens.

Née en 1977 à Téhéran, elle aurait été attirée vers les mathématiques par l'histoire du calcul de la somme des 100 premiers entiers par le petit Gauss. Suivant un parcours scolaire renforcé, elle obtient deux médailles d'or à l'Olympiade internationale de mathématiques. Elle poursuit ses études aux États-Unis, où sa thèse présentée à Harvard est qualifiée de chef d'œuvre : « La plupart des mathématiciens ne produiront jamais quelque chose d'aussi bon, et elle l'a fait dès sa thèse ». Ses travaux portent sur les *surfaces de Riemann* et, plus tard, sur les *billards mathématiques*.

Victime d'un cancer, Maryam Mirzakhani décède à quarante ans, laissant une orpheline. Plusieurs journaux iraniens brisent le tabou en publiant sa photo tête nue.

### ***Stage ouvert aux lycéennes et lycéens de terminale candidat(e)s au Concours général, les 12 et 13 février 2024***

La Pépinière académique de mathématique organise depuis 2006, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le siège INRIA de Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet d'Antony, le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée Hoche de Versailles, le lycée Marie Curie de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui accueillera au troisième trimestre des lycéennes et lycéens pour une visite et des conférences.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. **Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.**

**Le secrétariat opérationnel :** Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

**Les inspecteurs :** Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIERE, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Nathalie SOARES, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF,

**Les intervenants professeurs :** Michel ABADIE (Lycée Galilée, GENNEVILLIERS), Richard CROUAU (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Maximilien DENIS (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Sacha DHENIN (Lycée Franco-allemand, BUC), Thomas DUMAS (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Laurent GRIERE (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Catherine HOUARD (retraîtée), Delphine LEROY (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christian MARGUERITE (Lycée Gaspard Monge, SAVIGNY SUR ORGE), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), François REGUS (Lycée Viollet le Duc, VILLIERS SAINT FREDERIC), Martine SALMON (Retraîtée)

... **Et les professeurs accompagnant leurs élèves :** Nadia BOUANANE (Lycée Pierre Corneille, LA CELLE SAINT CLOUD), Sahah CHIKHI (Lycée Saint-Exupéry, MANTES LA JOLIE), Gwenaëlle POTHIER (Lycée Rosa Parks, Montgeron), Delphine TURBOULT (Lycée Alain, LE VÉSINET).



*En son honneur, les médias  
iraniens brisent le tabou*

**Emploi du temps**  
**Lundi 12 février 2024**

	Groupe 1 Vers	Groupe 2 Vers	Groupe 3 Vers	Pontoise
10 heures	Accueil			
10 h 10	Arithmétique	Suites numériques	Dénombrement Probabilités	Arithmétique
12 h 10	Repas			12 h 15
13 heures	Géométrie Nombres complexes	Fonctions, équations, inéquations	Arithmétique	13 h 15 Suites numériques
15 h 15	Film « Secrets of the surface »			15 h 15
16 h 20	Exposé Paradoxes			Dénombrements Probabilités

**Mardi 13 février 2024**

	Groupe 1 Vers	Groupe 2 Vers	Groupe 3 Vers	Pontoise
10 heures	Suites numériques	Dénombrement Probabilités	Géométrie Nombres complexes	Géométrie Nombres complexes
12 heures	Repas			
12 h 50	Fonctions, équations, inéquations	Arithmétique	Suites numériques	Fonctions, équations, inéquations
15 heures	Dénombrement, Probabilités	Géométrie, Nombres complexes	Fonctions, équations, inéquations	14 h 50 Film Secrets of the surface Exposé Paradoxes

# Arithmétique

## Exercice 1 – OIM 1992

Déterminer tous les entiers  $a, b$  et  $c$  tels que  $1 < a < b < c$  et  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$  est un diviseur de  $abc - 1$ .

## Exercice 2

Soit  $n$  un entier naturel non nul et différent de 1 et  $d_1, d_2, \dots, d_k$  ses diviseurs positifs ( $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ ).

On note  $s = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \dots + d_{k-1} d_k$ .

Montrer que  $s < n^2$  et déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $s$  divise  $n^2$ .

## Exercice 3 – Division euclidienne

Déterminer, pour tout entier naturel non nul  $n$ , le reste de la division euclidienne par  $n + 2$  de l'entier :

$$N = 2(1^{2 \cdot 023} + 2^{2 \cdot 023} + \dots + n^{2 \cdot 023}).$$

## Exercice 4 – Tiré du concours général 2020

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On dit que  $n$  est *pointu* lorsque  $n$  admet *au plus* un diviseur premier ou bien, en notant  $p$  et  $q$  les deux plus grands diviseurs premiers de  $n$ , tels que  $p > q$ , l'inégalité  $p \geq 2q$  est vérifiée.

Par exemple 1 est pointu car il n'admet aucun diviseur premier ; 25 est pointu car il admet un unique diviseur premier (qui est 5) et 147 est pointu car  $147 = 3 \times 7^2$  et  $7 \geq 2 \times 3$ .

En revanche, 105 n'est pas premier car  $105 = 3 \times 5 \times 7$  et  $7 < 2 \times 5$ .

### A. Quelques exemples

1. Le nombre 2 020 est-il pointu ?
2. Quel est le plus petit entier naturel non nul qui ne soit pas pointu ?
3. Quel est le plus petit nombre pointu possédant au moins quatre diviseurs premiers distincts ?
4. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres pointus.
5. Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels non nuls qui ne sont pas pointus.
6. Établir la liste des nombres pointus entre 1 et 20 inclus. Quelle est la longueur maximale d'une suite de nombres pointus consécutifs entre 1 et 20 ?

### B. Peu de grands nombres premiers

On rappelle que si  $k$  et  $n$  sont deux entiers naturels tels que  $k \leq n$ ,  $n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 1$  et  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

1. En considérant le nombre de parties d'un ensemble possédant  $n$  éléments, démontrer que pour tous entiers naturels  $n$  et  $k$  tels que  $k \leq n$ ,  $\binom{n}{k} \leq 2^n$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $P_n$  l'ensemble des nombres premiers  $p$  tels que  $n + 1 \leq p \leq 2n$  et on note  $\pi_n$  le nombre d'éléments de  $P_n$ .

- a. Démontrer que, pour tout nombre premier  $p$  appartenant à l'ensemble  $P_n$ , l'entier  $\binom{2n}{n}$  est divisible par  $p$ .
- b. Démontrer que, si  $a, b, c$  sont des entiers naturels non nuls tels que  $b$  et  $c$  sont premiers entre eux et divisent  $a$ , alors  $bc$  divise aussi  $a$ .
- c. Soit  $d$  le produit de tous les éléments de  $P_n$ . Démontrer que  $\binom{2n}{n}$  est divisible par  $d$ .
- d. En déduire que  $n^{\pi_n} \leq 2^{2n}$ .

### Exercice 5 – Extrait du concours général 2016

On note :

$S$ , l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers strictement positifs deux à deux distincts ;

$S_0$ , l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers pairs strictement positifs deux à deux distincts ;

$S_1$ , l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers impairs strictement positifs deux à deux distincts.

Par exemple  $8 = 2^3$  et  $190 = 1^3 + 4^3 + 5^3$  donc 8 et 190 sont dans  $S$ ,  $216 = 6^3$  et  $1\,072 = 2^3 + 4^3 + 10^3$  donc 216 et 1\,072 sont dans  $S_0$ ,  $125 = 5^3$  et  $2\,568 = 1^3 + 3^3 + 7^3 + 13^3$  donc 125 et 2\,568 sont dans  $S_1$ .

L'objectif du problème est de démontrer que tout entier suffisamment grand appartient à  $S$ .

1. Montrer que 2\,016 appartient à  $S_0$ .

2. **a.** Montrer que pour tout réel  $x \geq 5$ ,  $(2x + 1)^3 \leq 2(2x - 1)^3$ .

**b.** Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 5. Montrer que, pour tout entier  $p \geq k$ ,

$$(2p + 1)^3 \leq (2k - 1)^3 + \sum_{j=k}^p (2j - 1)^3.$$

On rappelle que si  $t$ ,  $u$  et  $v$  sont des entiers, la notation  $t \equiv u [v]$  signifie que  $v$  divise  $t - u$ .

3. Montrer qu'il existe 288 entiers  $s_1, s_2, \dots, s_{288}$  appartenant à  $S_1$  tels que, pour tout  $i$  dans  $\{1, 2, \dots, 288\}$ ,  $s_i \equiv i [288]$  et on note  $m$  le plus grand des entiers  $s_i$ .

4. Soit  $n$  un entier tel que  $288n \geq m$  et soit  $u_1, u_2, \dots, u_n$  des entiers naturels en progression arithmétique de raison 288. Montrer que tout entier naturel appartenant à  $[m + u_1, 288n + u_1]$ , il existe un entier  $1 \leq i \leq 288$  et un entier  $1 \leq j \leq n$  tels que cet entier soit égal à  $s_i + u_j$ .

5. On admet que, pour tout réel  $x$ ,

$$(2x + 12)^3 + (2x + 4)^3 + (2x + 2)^3 - (2x + 10)^3 - (2x + 8)^3 - (2x)^3 = 288. \quad (*)$$

**a.** Montrer qu'il existe un entier  $u$  tel que  $u, u + 288, u + 576$  appartiennent à  $S_0$ .

**b.** Montrer que, pour tout entier  $n \geq 2$ , il existe  $n$  éléments dans  $S_0$  en progression arithmétique de raison 288.

6. Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 5 tel que  $(2k + 1)^3 > m$ .

**a.** Montrer qu'il existe un entier  $N \geq 1$  tel que pour tout entier appartenant à  $[N, N + 2(2k - 1)^3]$ , il existe un entier  $1 \leq i \leq 288$  et un entier  $u \in S_0$  tels que cet entier soit égal à  $s_i + u$ .

**b.** Montrer que tout entier supérieur ou égal à  $N$  appartient à  $S$ .

(pour tout entier  $p \geq k$ , on pourra examiner le cas des entiers de l'intervalle  $[N, N_p]$  où

$$N_p = N + (2k - 1)^3 + \sum_{j=k}^p (2j - 1)^3.$$

# Suites numériques

## Exercice 1 – Multiples cachés de $2^n$

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = 500$ ,  $u_3 = 2\,000$  et, pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $\frac{u_{n+2} + u_{n+1}}{u_{n+1} + u_{n-1}} = \frac{u_{n+1}}{u_{n-1}}$ .

Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $u_n$  est un multiple de  $2^n$ .

## Exercice 2 – Suite s'annulant

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_1 = a$  et, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$ .

Déterminer le nombre de valeurs distinctes de  $a$  telles que  $u_{2\,024} = 0$ .

## Exercice 3 – Approximation de $\sqrt{2}$

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_1 = 10^9$  et, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n}$ .

Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\sqrt{2}$  et que  $0 < u_{23} - \sqrt{2} < 10^{-13}$ .

## Exercice 4 – Sommes et inégalités

Soit  $(u_n)$  une suite définie sur  $\mathbf{N}^*$  et telle que, pour tous entiers non nuls  $i$  et  $j$ ,  $u_{i+j} \leq u_i + u_j$ .

Montrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_n \leq \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_n}{n}$ . (\*)

## Exercice 5

L'ensemble des termes des suites  $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$  et  $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$  est l'ensemble des entiers compris entre 1 et  $2n$ . Chacun de ces nombres n'est utilisé qu'une fois. La suite  $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$  est décroissante, la suite  $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$  est croissante.

Combien vaut :  $S = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| + \dots + |a_{n-1} - b_{n-1}| + |a_n - b_n|$  ?

## Exercice 6 – tiré du concours général 2023

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $v(n)$  le plus grand entier naturel  $k$  tel que  $\frac{n}{2^k}$  soit un entier.

On définit la suite  $(u_n)$  par récurrence, en posant  $u_1 = 1$  et, pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } u_{n-1} = 0 \\ 1 + 2v(n) - \frac{1}{u_{n-1}} & \text{si } u_{n-1} \neq 0 \end{cases}$$

1. Donner la valeur des entiers  $v(1)$ ,  $v(2)$ ,  $v(3)$ ,  $v(4)$ .
2. Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $v(n) = 0$  si  $n$  est impair et que  $v(n) = v\left(\frac{n}{2}\right) + 1$  si  $n$  est pair.
3. Calculer les huit premiers termes de la suite  $(u_n)$  et vérifier que  $u_8 = 4$ .
4. Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n$  est un nombre rationnel strictement positif, que  $u_{2n} = u_n + 1$  et que  $u_{2n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$ .
5. Démontrer que tout nombre entier strictement positif et que tout inverse d'un entier strictement positif est égal à un terme  $u_n$ .

# Fonctions – Équations, inéquations et fonctions

## Exercice 1 – Autour de la partie entière

On rappelle que la notation  $E(x)$  désigne la *partie entière* du réel  $x$ , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ .

1. Montrer que l'équation  $E(x)(x^2 + 1) = x^3$  admet une unique solution dans chaque intervalle dont les extrémités sont des entiers strictement positifs consécutifs.
2. Montrer que cette solution est irrationnelle.

## Exercice 2 – Recherche de fonction

Déterminer la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  et vérifiant :

Pour tous les réels  $x$  et  $y$ ,  $f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ . (\*)

## Exercice 3 – Équation fonctionnelle dans $\mathbf{N}$

Déterminer les fonctions  $f$ , de  $\mathbf{N}^*$  dans  $\mathbf{N}^*$ , pour lesquelles :

- (1) Pour tout couple  $(m, n)$  d'entiers,  $f(mn) = f(m)f(n)$  ;
- (2) Pour tout entier  $n$ ,  $f^{(n)}(n) = n$ , écriture dans laquelle  $f^{(n)}$  désigne la composée de  $f$  par elle-même  $(n - 1)$  fois.

## Exercice 4 -

Montrer que pour tous nombres réels  $a, b, c$  strictement positifs et deux à deux distincts :

$$\left(\frac{2a-b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{2c-a}{c-a}\right)^2 \geq 5. \quad (*)$$

## Exercice 5 – Une fonction toute simple

Déterminer toutes les fonctions  $f$ , de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{N}$ , vérifiant :

$$f(1) > 0 \text{ et pour tous entiers naturels } n \text{ et } m, f(m^2 + n^2) = (f(m))^2 + (f(n))^2. \quad (*)$$

## Exercice 6 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Soit  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  des nombres réels.

Montrer que  $(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2)$  et qu'on a égalité si et seulement si il existe un réel  $\alpha$  tel que pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x_i = \alpha y_i$ .

2. Soit  $a, b, c$  des nombres réels strictement positifs tels que  $a + b + c = 1$ .

Montrer que  $\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$ .

## Exercice 7 -

Déterminer toutes les fonctions  $f$  de  $]0, +\infty[$  dans  $]0, +\infty[$  tels que :

Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $f(x)f(yf(x)) = f(x + y)$ . (\*)

# Géométrie – Nombres complexes

## Exercice 1 – Alignement et tangente

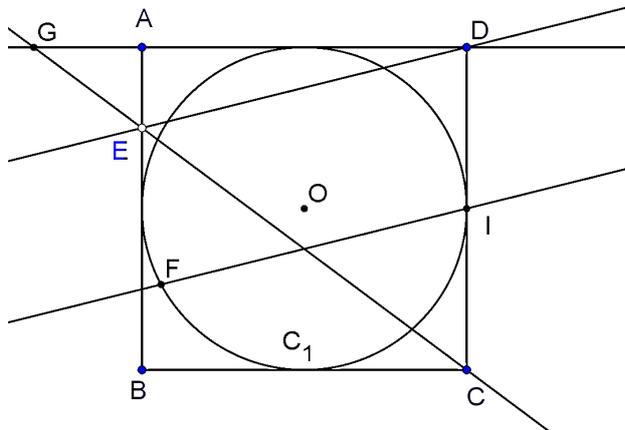
Soit A, B, C et D sont quatre points placés dans cet ordre sur un cercle.

- Montrer que si les droites (AB) et (CD) sont parallèles alors ABCD est un trapèze isocèle.
- Montrer que si  $AD = BC$  alors ABCD est un trapèze isocèle.

On considère un carré ABCD et  $\mathcal{C}_1$  son cercle inscrit. On note :

- I le milieu de [CD] ;
- E un point du segment [AB] distinct du point B ;
- F le deuxième point d'intersection de  $\mathcal{C}_1$  et de la parallèle à (DE) passant par I ;
- G le point d'intersection des droites (AD) et (CE).

On veut montrer que la droite (GF) est tangente à  $\mathcal{C}_1$  en F.



- On suppose que la droite (DE) recoupe le cercle  $\mathcal{C}_2$  circonscrit au carré ABCD en un point M et que la parallèle à (AM) passant par D recoupe le cercle  $\mathcal{C}_2$  en N. Montrer que les quadrilatères ADN M et DCNM sont des trapèzes isocèles.
- En déduire que les triangles AEM et DCN sont semblables.
- Montrer que les points G, M et N sont alignés. On pourra utiliser une homothétie.
- Montrer que la droite (MN) est tangente à  $\mathcal{C}_1$  en F. On pourra utiliser une symétrie axiale.
- Conclure.

## Exercice 2 – Tiré du concours général 2017

L'espace  $\mathcal{E}$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Un point  $M(x, y, z)$  de  $\mathcal{E}$  est dit *entier* lorsque ses trois coordonnées  $x, y$  et  $z$  sont des entiers.

De même, un point  $M(x, y)$  du plan  $\mathcal{P}$  rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  sera dit *entier* lorsque ses deux coordonnées  $x$  et  $y$  sont des entiers.

Dans tout le problème, les triangles seront supposés non aplatis et leurs points tous distincts.

- Soit  $ABC$  un triangle du plan rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $H$  le pied de sa hauteur issue de  $A$ .
  - Prouver que  $\vec{AH} = \vec{AB} + \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{BC^2} \times \vec{BC}$ .
  - En déduire que si  $A, B$  et  $C$  sont des points entiers du plan  $\mathcal{P}$  alors les coordonnées de  $H$  sont des nombres rationnels.
  - Si  $ABC$  est un triangle de l'espace  $\mathcal{E}$ , les résultats établis aux questions **a** et **b** ci-dessus sont-ils encore valables ?
- Soit  $\vec{u}(x, y)$  et  $\vec{u}'(x', y')$  deux vecteurs non nuls du plan. Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs  $r$  et  $r'$  et deux réels  $\theta$  et  $\theta'$  tels que  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  et  $x' = r' \cos \theta', y' = r' \sin \theta'$ .  
Montrer que  $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{u}')}{\|\vec{u}\| \|\vec{u}'\|}$ .

b. Existe-t-il un triangle équilatéral dont les sommets sont trois points entiers du plan  $\mathcal{P}$  rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ?

### Exercice 3 – Théorème de Carnot

Soit ABC un triangle non aplati et D, E, F des points respectivement des droites (BC), (CA) et (AB).

Montrer que les perpendiculaires aux côtés du triangle et passant par D, E et F sont concourantes si et seulement si :

$$BD^2 + CE^2 + AF^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2 .$$

### Exercice 4 – Comparaison d'aires

Soit ABC un triangle. Une droite  $\mathcal{D}_1$  parallèle à (BC) coupe les droites (AB) et (AC) respectivement en D et D'. Une droite  $\mathcal{D}_2$  parallèle à (CA) coupe les droites (BC) et (BA) respectivement en E et E'. Une droite  $\mathcal{D}_3$  parallèle à (AB) coupe les droites (CA) et (CB) respectivement en F et F'.

Montrer que les triangles DEF et D'E'F' ont même aire.

### Exercice 5 – Racines complexes

Soit  $a, b, c$  des nombres complexes. On considère l'équation (\*) :  $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ .

Soit  $Z$  une racine complexe de (\*).

1. Montrer que  $|Z| \leq \max(1, |a| + |b| + |c|)$ .
2. Plus généralement, soit  $r > 0$ , montrer que  $|Z| \leq \max(r, |a| + \frac{|b|}{r} + \frac{|c|}{r^2})$ .
3. Montrer que (\*\*):  $x^3 - |a|x^2 - |b|x - |c| = 0$  admet une unique solution, notée  $\rho$ , dans  $\mathbf{R}_+^*$ .
4. Montrer que  $|Z| \leq \rho$ .

### Exercice 6 – Tiré du concours général 2017

Une partie  $\mathcal{A}$  non vide de  $\mathbf{C}$  est dite de type  $S$  si pour tout  $z_1 \in \mathcal{A}$  et tout  $z_2 \in \mathcal{A}$ , le produit  $z_1 z_2$  et la somme  $z_1^2 + z_2^2$  sont encore dans  $\mathcal{A}$ .

Dans tout le problème,  $\mathcal{A}$  désigne une partie de  $\mathbf{C}$  de type  $S$  et on note  $b(\mathcal{A})$  le nombre de nombres complexes  $z$  de  $\mathcal{A}$  dont le module est inférieur ou égal à 1. On note  $b(\mathcal{A}) = \infty$  lorsque ce nombre est infini.

#### Partie A

1. Les ensembles suivants sont des parties de  $\mathbf{C}$  de type  $S$  (on ne demande pas de le vérifier). Déterminer pour chacun d'eux la valeur de  $b(\mathcal{A})$  :  
(a)  $\mathcal{A} = \{0\}$                       (b)  $\mathcal{A} = \mathbf{C}$                       (c)  $\mathcal{A} = \mathbf{N}$                       (d)  $\mathcal{A} = \mathbf{N}^*$
2. a. Donner une partie  $\mathcal{A}$  de  $\mathbf{C}$  de type  $S$  telle que  $b(\mathcal{A}) = 0$ .  
b. Donner une partie  $\mathcal{A}$  de  $\mathbf{C}$  de type  $S$  telle que  $b(\mathcal{A}) = 3$ .
3. On note  $\bar{\mathcal{A}} = \{\bar{z}, z \in \mathcal{A}\}$  c'est-à-dire la partie de  $\mathbf{C}$  constituée des nombres complexes conjugués des éléments de  $\mathcal{A}$ . Montrer que  $\bar{\mathcal{A}}$  est de type  $S$  et préciser  $b(\bar{\mathcal{A}})$ .

#### Partie B

On définit le complexe  $j = e^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$  et on note  $Z[j] = \{a + bj, (a, b) \in \mathbf{Z}^2\}$ .

1. a. Calculer  $1 + j + j^2$ .  
b. Montrer que  $Z[j]$  est de type  $S$ .  
c. Montrer que  $b(Z[j]) = 7$ .  
d. On note  $Z[j]^* = Z[j] - \{0\}$ . Justifier que  $Z[j]^*$  est de type  $S$  et déterminer  $b(Z[j]^*)$ .
2. On définit la partie  $\mathcal{R}$  de  $\mathbf{C}$  par  $\mathcal{R} = \{z \in \mathbf{C}, z^2 \in Z[j]\}$ .  
a. Montrer que  $\mathcal{R}$  est de type  $S$ .  
b. Déterminer  $b(\mathcal{R})$ .

# Dénombrement – Probabilités

## Exercice 1 – Placement sur un table circulaire

Combien y a-t-il de façons différentes d'assoir 6 filles et 15 garçons autour d'une table circulaire de 21 places de sorte qu'il y ait au moins deux garçons entre deux filles.

On ne considèrera que les positions relatives des personnes entre elles.

## Exercice 2 – Sommes et formule du binôme

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, calculer les sommes  $S_1 = \sum_{k=0}^{k=n} k^2 \binom{n}{k}$  et  $S_2 = \sum_{k=0}^{k=n} k^2 \binom{2n}{2k}$

## Exercice 3 – Relations entre coefficients

Soit  $n$  un entier naturel non nul et soit, pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq 2n$ ,  $a_k$  le coefficient de  $x^k$  dans le développement de l'expression  $(1 + x + x^2)^n$ . Montrer que :

- $a_0 a_1 - a_1 a_2 + a_2 a_3 - \dots - a_{2n-1} a_{2n} = 0$ .
- $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1}^2 + (-1)^n a_n^2 = a_n$ .
- $a_0 + a_2 + a_4 + \dots = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$  et  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ .
- $a_k - n a_{k-1} + \binom{n}{2} a_{k-2} + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} a_0 = 0$  si  $k$  n'est pas multiple de 3.

## Exercice 4 – Principe des tiroirs

- Parmi 17 scientifiques, chacun est en correspondance avec tous les autres. Dans leurs échanges de lettres, ils ne traitent que trois sujets. Lors d'un échange entre deux scientifiques, ces derniers ne traitent que d'un seul sujet.

Montrer qu'il y a au moins 3 scientifiques qui traitent un seul et même sujet.

- Dix joueurs ont pris part à un tournoi d'échecs où chaque joueur doit jouer exactement une partie contre tous les autres joueurs. Un joueur marque 1 point s'il gagne un duel, il perd un point s'il perd le duel et 0 point clôt un duel avec match nul. A la fin du tournoi, on constate que plus de 70% se sont terminés par un match nul.

Montrer que deux joueurs ont le même score final.

## Exercice 5 – tiré du Concours général 2021

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Dans un sac, on place  $2n + 1$  boules indiscernables au toucher et numérotées  $0, 1, 2, \dots, 2n$ . On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :

- on tire trois boules simultanément ;
- si les trois boules tirées ont pour numéros  $a, b$  et  $c$ , avec  $a < b < c$ , on élimine les boules de numéros  $a$  et  $c$  puis on replace dans le sac la boule de numéro  $b$  ;
- on recommence les opérations précédentes.

Au bout de  $n$  tirages, il ne reste plus qu'une seule boule, et on note  $D_n$  son numéro. Pour tout entier  $k$ , on note  $P(D_n = k)$  la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro  $k$ .

### I – Étude des petits cas

- Déterminer la loi de la variable aléatoire  $D_1$ .
- Déterminer la loi de la variable aléatoire  $D_2$ .

### II – Valeurs extrêmes et symétrie

- Déterminer la probabilité  $P(D_n = 0)$ .
- Déterminer la probabilité  $P(D_n = 1)$  en fonction de  $n$ .
- Soit  $i$  un entier tel que  $0 \leq i \leq 2n$ . Pourquoi a-t-on  $P(D_n = i) = P(D_n = 2n - i)$  ?
- Calculer l'espérance de la variable aléatoire  $D_n$  en fonction de  $n$ .