ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Versailles
Lycée Marie Curie

Pontoise
Lycée Camille Pissarro

"What I really am is a mathematician. Rather than being remembered as the first woman this or that, I would prefer to be remembered, as a mathematician should, simply for the theorems I have proved and the problems I have solved."

Julia Robinson nait en 1919. Après une enfance perturbée par la perte de sa mère et la maladie, influencée par la lecture du livre *Les grands mathématiciens* d'E.T. Bell, elle débute des études de mathématiques à Berkeley. Elle est amenée à enseigner les statistiques avant de revenir aux mathématiques, sous la direction d'Alfred Tarski. Ses travaux portent sur les questions de calculabilité et de décision, et particulièrement sur le dixième problème posé par Hilbert au congrès international de 1900 : peut-on trouver une méthode (un algorithme) permettant de savoir si une équation diophantienne (équation polynomiale à coefficients et inconnues rationnels) possède des solutions ?
Le mathématicien prodige russe Youri Matiiassevich s'inspire de ce travail et prouve la solution – négative – du dixième problème. Ils collaborent, s'écrivent et se rencontrent, coopération tout-à-fait exceptionnelle en période de « guerre froide » (leur correspondance est épluchée par la police).
Julia Robinson devra encore lutter contre la maladie et sera élue présidente de l'académie des sciences des États-Unis en 1982. Elle meurt en 1985.

Stage ouvert aux lycéennes et lycéens de terminale candidat(e)s au Concours général , les 17 et 18 février 2025

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont habituellement concernés : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.
La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent ou ont hébergé nos stages : l'INRIA, l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet à Antony, le lycée Vallée de Chevreuse à Gif sur Yvette, le lycée La Bruyère, le lycée Marie Curie et le lycée Hoche de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspectrices et inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIÈRE, Anne MENANT, Marion PACAUD, Nicolas RAMBEAUD, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christine WEILL et les retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF

Les intervenants professeurs : Richard CROUAU (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Thomas DUMAS (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Laurent GRIERE (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Catherine HOUARD (Retraitée), Christian MARGUERITE (Lycée Gaspard Monge, SAVIGNY SUR ORGE), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), François REGUS (Lycée Viollet-le-Duc, VILLIERS SAINT FREDERIC)

Professeurs accompagnants : Cécile GOISNARD (lycée Richelieu, RUEIL-MALMAISON), Caroline DE BASQUIAT (lycée Saint-Jean Hulst, VERSAILLES)

Emploi du temps

Lundi 17 février 2025

	Groupe 1 Vers	Groupe 2 Vers	Groupe 3 Vers	Pontoise
10 heures	Accueil			
10 h 10	Arithmétique SM	Géométrie CD	Fonctions CM	
12 h 10	Repas			
13 heures	Fonctions CM	Arithmétique SM	Géométrie CD	
15 h 15	Exposé + Films			

Mardi 18 février 2025

	Groupe 1 Vers	Groupe 2 Vers	Groupe 3 Vers	Pontoise
10 heures	Suites FR	Dénombrement PM	Arithmétique SM	
12 heures	Repas			
12 h 50	Géométrie CD	Suites FR	Dénombrement PM	
15 heures	Dénombrement PM	Fonctions CM	Suites FR	Exposé et films

Arithmétique

Exercice 1 – Olympiade mathématique du Canada 2019

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a+b^3$soit divisible par $a^2+3ab+3b^2-1$.
Montrer que $a^2+3ab+3b^2-1$ est divisible par le cube d'un entier plus grand que 1.

Soit $N=a^2+3ab+3b^2-1$. Il existe un entier naturel c tels que $a+b^3=cN$.
D'autre part $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a(N=a^2+3ab+3b^2)+b^3$
Soit $(a+b)^3=a(N+1)+b^3=aN+a+b^3=aN+cN=(a+c)N$.
On en déduit que $(a+b)^3$ est un multiple de N.
On considère la décomposition en facteurs premiers de $a+b$: $a+b=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ où les p_i sont b=des nombres premiers et les α_i des entiers naturels non nuls.
Comme $(a+b)^3$ est un multiple de N, il existe des entiers naturels éventuellement nuls β_i tels que $N=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k}$ et, pour tout i compris entre 1 et k, $\beta_i\leq 3\alpha_i$.
Si l'entier N n'est pas divisible par le cube d'un entier plus grand que 1 alors pour tout i, $0\leq\beta_i\leq 2$ et $\beta_i\leq 2\alpha_i$.
Mais alors N divise $(a+b)^2$.
Or $N-(a+b)^2=N=a^2+3ab+3b^2-1-(a^2+2ab+b^2)=ab+2b^2-1$ qui est un nombre strictement positif car $a\geq 1$ et $b\geq 1$.
Il est donc impossible que N divise$(a+b)^2$.

Exercice 2

Soit a un entier strictement positif pair et n un entier naturel non nul. On suppose $1+a+a^2+\dots+a^n$ est un carré parfait. Montrer que a est un multiple de 8.

Posons $N=1+a+a^2+\dots+a^n$. Comme a est un nombre pair, le nombre N est un nombre impair. C'est de plus le carré d'un entier qui ne peut qu'être impair lui aussi (raisonnement par l'absurde). Il existe donc un entier naturel k tel que $N=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$.
On a donc $1+a+a^2+\dots+a^n=4k^2+4k+1$ soit $a+a^2+\dots+a^n=4k(k+1)$
C'est-à-dire $a(1+a+\dots+a^{n-1})=4k(k+1)$.
Or, pour tout entier k, $k(k+1)$ est un entier pair car, entre les entiers consécutifs k et $k+1$, il y en a toujours un pair.
Il existe donc un entier l tel que $4k(k+1)=2l$ et on obtient $N-1=a(1+a+\dots+a^{n-1})=4k(k+1)=8l$.
Le nombre 8 (puissance de 2) est donc un diviseur de $a(1+a+\dots+a^{n-1})$. Il est premier avec $1+a+\dots+a^{n-1}$ qui est un nombre impair.
Conclusion a est bien un multiple de8.

Exercice 3

Montrer que pour tout entier naturel n, 120 est un diviseur de n^5-5n^3+4n.

$120=5\times4\times3\times2$. L'idée première est donc de factoriser $N=n^5-5n^3+4n$.
$n^5-5n^3+4n=n(n^4-5n^2+4)=n(n^2-1)(n^2-4)=n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$
On va démontrer que 3, 8 et 5 sont des diviseurs de N.
Comme ils sont deux à deux premiers entre eux, leur produit sera un diviseur de N.
Pour 3, on raisonne suivant le reste r de la division euclidienne de n par 3 :

- Si $r=0$, 3 divise n donc 3 divise N
- Si $r=1$, 3 divise $n-1$ donc 3 divise N
- Si $r=2$, 3 divise $n-2$ donc 3 divise (respectivement

Pour 5, on raisonne suivant le reste r de la division euclidienne de n par 5 en remarquant que si $r=0$ (respectivement $r=1, r=2, r=3, r=4$) alors n (respectivement $n-1, n-2, n+2, n+1$) divise N.

Pour 4, comme le produit de deux entiers consécutifs est pair, $n(n-1)$ et $(n+1)(n+2)$ sont tous les deux pairs donc leur produit est un multiple de 4. De plus, comme on se trouve avec deux multiples consécutifs de 2, l'un de ces multiples est en fait un multiple de 4 et leur produit est donc un multiple de 8.
On en déduit que 120 est un diviseur de n^5-5n^3+4n.

Exercice 4
Montrer que pour tout entier $n>9$, le nombre entier $N=n^2-13n+40$ n'est pas un carré parfait.

On va montrer que N est compris strictement entre les carrés de deux entiers consécutifs en faisant apparaitre ces carrés dans son expression. En effet :
$N=n^2-12n-n+36+4=(n-6)^2-(n-4)$ et $N=n^2-14n+n+49-9=(n-7)^2+(n-9)$.
Comme $n>9$, on en déduit que $N<(n-6)^2$ et $N>(n-7)^2$.

Exercice 5 – Olympiades internationales de mathématiques 1969
Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels a non nuls tels que, pour tout entier naturel non nul n, le nombre $N=a+n^4$ ne soit pas premier.

L'idée est de chercher à écrire le nombre N comme produit de deux entiers strictement supérieurs à 1.
Pour cela, on pose $a=4b^4$ où $b>1$.
Alors $N=n^4+4b^4=n^4+4b^4+4n^2b^2-4n^2b^2=(n^2+2b^2)^2-(2nb)^2$
Soit $N=(n^2+2b^2-2nb)(n^2+2b^2+2nb)$
Comme $b>1$, pour tout entier $n>0$, $n^2+2b^2+2nb>2b^2>1$
De plus, $n^2+2b^2-2nb=(n-b)^2+b^2$ donc, comme $b>1$, pour tout entier $n>0$, $n^2+2b^2-2nb>b^2>1$.
On en déduit qu'il existe une infinité d'entiers a (ceux pour lesquels il existe un entier $b>1$ tel que $a=4b^4$) tels que le nombre $a+n^4$ ne soit pas premier.

Exercice 6
Soit a un nombre entier naturel impair. Montrer que, pour tous les entiers naturels distincts non nuls m et n, les nombres $a^{2^n}+2^{2^n}$ et $a^{2^m}+2^{2^m}$ sont premiers entre eux.

Par symétrie du problème, on peut supposer que $n<m$ soit $m-n>0$.
Supposons de plus qu'il existe un nombre premier p qui divise $a^{2^n}+2^{2^n}$. Comme a est un nombre impair et que 2 divise 2^{2^n}, 2 ne peut pas diviser $a^{2^n}+2^{2^n}$. Donc $p>2$.
p divise $a^{2^n}+2^{2^n}$ donc $a^{2^n}\equiv -2^{2^n} \pmod p$. Or $2^m=2^n2^{m-n}$ donc $\left(a^{2^n}\right)^{2^{m-n}}=a^{2^m}$ et $\left(-2^{2^n}\right)^{2^{m-n}}=2^{2^m}$
D'où $a^{2^m}\equiv 2^{2^m} \pmod p$ et $a^{2^m}+2^{2^m}\equiv 2^{2^m}+2^{2^m} \pmod p$ soit $a^{2^m}+2^{2^m}\equiv 2^{2^m+1} \pmod p$.
Or, comme $p>2$, $2^{2^m+1}\not\equiv 0 \pmod p$ donc $a^{2^m}+2^{2^m}\not\equiv 0 \pmod p$ ce qui signifie que p ne divise pas $a^{2^m}+2^{2^m}$.
Les nombres $a^{2^n}+2^{2^n}$ et $a^{2^m}+2^{2^m}$ sont donc bien premiers entre eux.

Exercice 7
La différence entre les cubes de deux entiers consécutifs est le carré d'un entier positif. Montrer que cet entier est une somme de deux carrés.

Considérons l'égalité $(m+1)^3-m^3=n^2$. Elle peut être écrite $3m^2+3m=n^2-1$ ou encore, en multipliant les deux membres par 4 : $3(2m+1)^2=4n^2-1$
De $3(2m+1)^2=(2n+1)(2n-1)$, on déduit que les deux facteurs du second membre, qui sont premiers entre eux (ils sont impairs consécutifs), sont l'un un carré (le carré d'un nombre impair, car il est impair), l'autre le produit de 3 par un carré. Nous savons que n est impair (différence des cubes d'un impair et d'un pair ou d'un pair et d'un impair). Si $2n+1$ est un carré, le carré d'un nombre impair a, on a alors $2n=a^2-1$, mais le membre de droite de cette dernière égalité est multiple de 4, ce qui rendrait n pair. Donc on doit supposer que $2n-1$ est le carré d'un entier (impair) : $2n-1=(2p+1)^2$, et donc $n=p^2+(p+1)^2$

Exercice 8 – Extrait Concours Général 1990

1. Trouver trois nombres entiers naturels a, b, c, distincts ou non, tels que :

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

2. Déterminer tous les nombres entiers naturels n tels qu'il existe n nombres entiers naturels $x_1, x_2, \dots, x_n$, distincts ou non, tels que :

$$1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2}.$$

1. Les nombres a, b, c jouant le même rôle dans l'énoncé, on peut se restreindre à étudier le cas où $a \geq b \geq c$ d'où $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{3}{c^2}$.
Comme on veut $\frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ doit donc avoir $c^2 \geq 12$ c'est-à-dire c doit prendre la valeur 1 ou la valeur 2 ou la valeur 3. Or $\frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ implique $\frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4}$ soit $c^2 \geq 4$. En définitive, on doit avoir $c = 3$ et in se ramène à chercher a et b tels que $a \geq b \geq 3$ et $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$.
Comme $a \geq b$, on doit donc avoir d'une part $\frac{2}{b^2} \geq \frac{5}{36}$ soit $b^2 \leq \frac{72}{5}$ soit $b \leq \sqrt{\frac{72}{5}}$, d'autre part $\frac{1}{b^2} \leq \frac{5}{36}$ soit $b^2 \geq \frac{36}{5}$ soit $b \geq \sqrt{\frac{36}{5}}$. La seule possibilité est $b = 3$ et alors $a = 6$.
On vérifie que $\frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

2. Pour $n = 1$, l'équation a pour solution $x_1 = 1$.
Pour $n = 2$, l'équation s'écrit $1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$. Si on suppose que $x_1 \geq x_2$, alors $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \leq \frac{2}{x_2^2}$ d'où $\frac{2}{x_2^2} \geq 1$ soit $x_2^2 \leq 2$ et donc $x_2 = 1$ mais alors $\frac{1}{x_1^2} = 0$ ce sui est impossible.
Pour $n = 3$, l'équation s'écrit $1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$. Si on suppose que $x_1 \geq x_2 \geq x_3$, alors $\frac{3}{x_3^2} \geq 1$ soit $x_3^2 \leq 3$ et donc $x_3 = 1$ ce qui est impossible.
Pour $n = 4$, l'équation s'écrit $1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2}$ et admet comme solution $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$.
Pour $n = 4$, l'équation s'écrit $1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2}$. Si on suppose que $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq x_5$, alors $\frac{5}{x_5^2} \geq 1$ soit $x_5^2 \leq 5$ donc $x_5 = 1$ ou $x_5 = 2$.
La valeur 1 est impossible, comme dans les cas précédents.
Si $x_5 = 2$ alors l'équation s'écrit $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = \frac{3}{4}$ d'où $\frac{4}{x_4^2} \geq \frac{3}{4}$ soit $x_4^2 \leq \frac{16}{3}$ donc $x_4 = 1$ ou $x_4 = 2$.
On ne peut avoir $x_4 = 1$. Donc $x_4 = 1$ et l'équation s'écrit $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \frac{1}{2}$.
Or $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ donc $\frac{3}{x_3^2} \geq \frac{1}{2}$ soit $x_3^2 \leq 6$ et donc $x_3 = 2$ puisque$x_3 = 1$ est impossible.
L'équation s'écrit donc $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{4}$ et n'a pas de solution car $x_1 \geq x_2 > 1$.
Pour $n = 6$, l'équation s'écrit $1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} + \frac{1}{x_6^2}$. Le même raisonnement conduit d'abord à $x_6^2 \leq 6$ soit $x_6 = 2$ car la valeur 1 est impossible. L'équation s'écrit donc $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} = \frac{3}{4}$ ce qui donne $x_5^2 \leq 6$ soit $x_5 = 2$ puis $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = \frac{1}{2}$ d'où $x_4^2 \leq 8$ ce qui donne $x_4 = 2$.
L'équation s'écrit alors $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \frac{1}{4}$. D'après la question 1, $x_3 = x_2 = 3$ et $x_1 = 6$.
Pour $n = 7$, l'équation s'écrit $1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} + \frac{1}{x_6^2} + \frac{1}{x_7^2}$. Le même raisonnement conduit à trouver comme solution $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 4, x_5 = x_6 = x_7 = 2$.
Pour $n = 8$, l'équation s'écrit $1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} + \frac{1}{x_6^2} + \frac{1}{x_7^2} + \frac{1}{x_8^2}$. Le même raisonnement conduit à trouver comme solution $x_1 = 21,\ x_2 = 14, x_3 = 7, x_4 = x_5 = 3, x_6 = x_7 = x_8 = 2$.

Posons $E_n = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2}$ et montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 6$, l'équation $E_n = 1$ admet une solution.

Initialisation : pour $n = 6, n = 7, n = 8$, l'équation $E_n = 1$ a bien une solution ;

Hérédite : montrons que si $E_n = 1$admet une solution alors l'équation $E_{n+3} = 1$ admet une solution.

Si $E_n = 1$admet une solution, il existe des entiers $y_1, y_2, \dots, y_n$ tels que $1 = \frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{y_2^2} + \cdots + \frac{1}{y_n^2}$.

Posons alors $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{n-1} = y_{n-1}, x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3} = 2y_n$.

Alors $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}^2} + \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{x_{n+1}^2} + \frac{1}{x_{n+2}^2} + \frac{1}{x_{n+3}^2} = \frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{y_2^2} + \cdots + \frac{1}{y_{n-1}^2} + \frac{1}{(2y_n)^2} + \frac{1}{(2y_n)^2} + \frac{1}{(2y_n)^2} + \frac{1}{(2y_n)^2}$

Soit $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}^2} + \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{x_{n+1}^2} + \frac{1}{x_{n+2}^2} + \frac{1}{x_{n+3}^2} = \frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{y_2^2} + \cdots + \frac{1}{y_{n-1}^2} + \frac{4}{4y_n^2} = \frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{y_2^2} + \cdots + \frac{1}{y_n^2} = 1$

Et l'équation $E_{n+3} = 1$ admet bien une solution.

Conclusion, les entiers n pour lesquels l'équation $E_n = 1$ admet une solution sont les entiers $n = 2, n = 4$ et tous les entiers n tels que $n \geq 6$,

Suites numériques

Exercice 1

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbf{N}^*$ telles que, pour tout entier n :

$$u_n v_n = 1 \text{ et } u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Déterminer, en fonction de n, l'expression de $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

Pour tout entier n, $u_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) - (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

Soit $u_n = \frac{n(n+1)}{3} \times \big((n+2) - (n-1)\big) = n(n+1)$.

De plus, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Donc $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs définie sur $\mathbf{N}^*$ et telle que, pour tous les entiers non nuls n et m, $u_{n+m} \leq u_n + u_m$.

Montrer que si $m \leq n$, alors $u_n \leq m u_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right) u_m$.

Comme $m \leq n$ et comme on cherche une majoration de u_n par une moyenne pondérée de u_1 et u_m, on pense à la division euclidienne de u_m et à un raisonnement par récurrence sur k pour établir la majoration :

En posant $u_0 = 0$, on commence par montrer, en faisant un raisonnement par récurrence sur k, que, pour tout entier naturel k et tout entier naturel r, $u_{km+r} \leq k u_m + u_r$

<u>Initialisation :</u> pour $k = 0$, l'inégalité s'écrit $u_r \leq u_r$ et est donc bien vérifiée.

<u>Hérédité :</u> si pour un entier k, $u_{km+r} \leq k u_m + u_r$, alors $u_{(k+1)m+r} \leq u_{km+r} + u_m \leq \; k u_m + u_r + u_m$

D'où $u_{(k+1)m+r} \leq (k+1) u_m + u_r$ et l'inégalité est vérifiée au rang $k+1$.

Conclusion : pour tout entier naturel k et tout entier naturel r, $u_{km+r} \leq k u_m + u_r$

En particulier, pour tout entier k, $u_k \leq k u_1$ (en choisissant $m = 1, r = 0$).

Si $m \leq n$, en effectuant la division euclidienne de n par m, il existe un entier k non nul et un entier r, $0 \leq r < m$ tel que $n = km + r$.

On peut donc écrire $u_n = u_{km+r}$ d'où $u_n \leq \; k u_m + u_r$.

Or $k u_m + u_r = \left(\frac{n}{m} - 1\right) u_m + \left(k - \frac{n}{m} + 1\right) u_m + u_r$. Comme pour tout entier k, $u_k \leq k u_1$, $u_m \leq m u_1$ et $u_r \leq r u_1$

Donc $u_n \leq \left(\frac{n}{m} - 1\right) u_m + (km - n + m + r) u_1$ soit, puisque $n = km + r$, $u_n \leq \left(\frac{n}{m} - 1\right) u_m + m u_1$.

Exercice 3

Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbf{Z}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$ et telles que :

pour tous entiers relatifs m et n, $f(m+n) + f(mn-1) = f(m)f(n) + 2$. (*)

Pour $m = -1$ et $n = 0$, (*) s'écrit $f(-1) + f(-1) = f(-1)f(0) + 2$ soit $f(-1)(2 - f(0)) = 2$.

Donc $f(-1)$ est un entier relatif qui divise 2. On en déduit que $f(-1) \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

Pour $m = n = 0$, (*) s'écrit $f(0) + f(-1) = (f(0))^2 + 2$ soit $(f(0))^2 - f(0) + \big(2 - f(-1)\big) = 0$, ce qui signifie que $f(0)$ est solution de l'équation du second degré $X^2 - X + \big(2 - f(-1)\big) = 0$

Si $f(-1) \in \{-2, -1, 1\}$, le discriminant de cette équation est strictement négatif. Si $f(-1) = 2$, alors l'égalité $f(-1)(2 - f(0)) = 2$ implique $2 - f(0) = 1$ soit $f(0) = 1$.

Pour $m = n = -1$, (*) s'écrit $f(-2) + f(0) = (f(-1))^2 + 2$ soit $f(-2) = -1 + 4 + 2$ soit $f(-2) = 5$.

Pour $m = 1, n = -1$, (*) s'écrit $f(0) + f(-2) = f(1)f(-1) + 2$ soit $1 + 5 = f(1) \times 2 + 2$ soit $f(1) = 2$.

Pour $m = n = 1$, (*) s'écrit $f(2) + f(0) = (f(1))^2 + 2$ soit $f(2) + 1 = 4 + 2$ soit $f(2) = 5$.

Avec ces valeurs particulières trouvées, on peut conjecturer que pour tout entier relatif m, $f(m) = 1 + m^2$.

Montrons par récurrence forte que, pour tout entier naturel n, $f(n) = 1 + n^2$.

Initialisation : l'égalité est vraie pour $n=0$ et pour $n=1$.
Hérédité : si, pour un entier n, l'égalité est vraie pour $1, 2, \dots, n$. Montrons que l'égalité est encore vraie pour $n+1$.
Pour $m=1$, (*) s'écrit $f(n+1)+f(n-1)=f(1)f(n)+2$ soit $f(n+1)=2f(n)+2-f(n-1)$
C'est-à-dire, d'après l'hypothèse de récurrence, $f(n+1)=2(1+n^2)+2-(1+(n-1)^2)=2+2n^2+2-1-(n^2-2n+1)=2+n^2+2n$
Soit $f(n+1)=1+(n+1)^2$ et l'égalité est encore vraie au rang $n+1$.
On a donc bien, pour tout entier naturel n, $f(n)=1+n^2$.

On sait que l'égalité est vérifiée pour $n=-1$ et pour $n=-2$
Montrons maintenant que pour tout entier $n<-2$, $f(n)=1+n^2$.
On pose $m=-n-1$ (soit $n=-m-1$). Alors $m>1>0$ et $m-1>0$.
Or, pour $n=-1$, (*) s'écrit $f(m-1)+f(-m-1)=f(m)f(-1)+2=2f(m)+2$.
D'où $f(n)=f(-m-1)=-f(m-1)+2f(m)+2=-(1+(m-1)^2)+2(1+m^2)+2$
Soit $f(n)=-(1+m^2-2m+1)+2+2m^2+2=2+m^2+2m=1+(m+1)^2=1+(-m-1)^2$
C'est-à-dire $f(n)=1+n^2$.
On a démontré que si la fonction f est solution du problème, alors, pour tout entier relatif n, $f(n)=1+n^2$.
Il reste, comme on a procédé par implication, à vérifier que la fonction obtenue est bien solution.
Or pour tous entiers relatifs m et n,
$f(m+n)+f(mn-1)-f(m)f(n)-2=1+(m+n)^2+1+(mn-1)^2-(1+n^2)(1+m^2)-2$
$f(m+n)+f(mn-1)-f(m)f(n)-2=1+m^2+n^2+2mn+1+n^2m^2-2mn+1-(1+m^2+n^2+n^2m^2+2)=0$
La seule fonction solution est donc bien la fonction f définie sur $\mathbf{Z}$ par $f(n)=1+n^2$.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbf{N}^*$ et de terme général $u_n=\frac{1}{n+n^2}$. On suppose qu'il existe deux entiers naturels strictement positifs m et n tels que $m<n$ et $u_m+u_{m+1}+\cdots+u_{n-2}+u_{n-1}=\frac{1}{13}$.
Déterminer l'entier $n-m$.

Pour tout entier naturel non nul, $\frac{1}{n+n^2}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$
Donc $u_m+u_{m+1}+\cdots+u_{n-1}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{n-m}{mn}$.
On en déduit que $u_m+u_{m+1}+\cdots+u_{n-1}=\frac{1}{13}$ équivaut à $13(n-m)=nm$ soit $n(13-m)=13m$.
En particulier 13 divise $n(13-m)$.
Or 13 est un nombre premier et $13-m<13$ donc 13 ne peut diviser$13-m$. Il divise donc n, ce qui signifie qu'il existe un entier naturel k tel que $n=13k$.
On est ramené à résoudre l'équation $k(13-m)=m$ qui implique que $13-m$ est un diviseur positif de m.
On a donc $0<13-m\leq m$ soit $6{,}5\leq m<13$. On vérifie que parmi les entiers m vérifiant cet encadrement, seul 12 est bien tel que $13-m$ soit un diviseur positif de m.
L'équation $k(13-m)=m$ conduit alors à $k=12$ et $n=13\times 12=156$.
Au final, $n-m=156-12=144$

Exercice 5 – Asian Pacific Mathématics Olympiads 2015

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels est dite *agréable* lorsqu'elle vérifie les trois conditions suivantes :
(1) u_0 est un entier strictement positif
(2) Pour tout entier naturel i, $u_{i+1}=2u_i+1$ ou $u_{i+1}=\frac{u_i}{u_i+2}$.
(3) Il existe un entier strictement positif k tel que $u_k=2\,014$.
Trouver le plus petit entier strictement positif m tel qu'il existe une suite agréable $(u_m)_{m\geq 0}$ vérifiant $u_m=2\,014$.

On remarque que $u_{i+1}+1=2(u_i+1)$ ou $u_{i+1}+1=\frac{u_i}{u_i+2}+1=\frac{2u_i+2}{u_i+2}=\frac{2(u_i+1)}{u_i+2}$

Donc $\frac{1}{u_{i+1}+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{u_i+1}$ ou $\frac{1}{u_{i+1}+1}=\frac{u_i+2}{2(u_i+1)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{u_i+1}+\frac{1}{2}$, deux expressions que l'on peut écrire en une seule $\frac{1}{u_{i+1}+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{u_i+1}+\frac{\varepsilon_i}{2}$ où ε_i vaut 0 ou 1.
On en déduit (raisonnement par récurrence) que $\frac{1}{u_k+1}=\frac{1}{2^k}\times\frac{1}{u_0+1}+\frac{\varepsilon_{k-1}}{2}+\frac{\varepsilon_{k-2}}{2^2}+\cdots+\frac{\varepsilon_0}{2^k}$
D'où, en multipliant les deux membres de l'égalité par $2^k(u_k+1)=2^k(2\,014+1)=2\,015\;2^k$:
$2^k=\frac{2\,015}{u_0+1}+2\,015\left(\varepsilon_0+2\varepsilon_1+\cdots+2^{k-1}\varepsilon_{k-1}\right)=1+2\,015\left(\varepsilon_0+2\varepsilon_1+\cdots+2^{k-1}\varepsilon_{k-1}\right)$.
Soit $2^k-1=2\,015\left(\varepsilon_0+2\varepsilon_1+\cdots+2^{k-1}\varepsilon_{k-1}\right)$.
On cherche donc le plus petit entier strictement positif k tel que 2^k-1 soit un multiple de 2 015.
$2\,015=5\times13\times31$. D'après le petit théorème de Fermat, 5 divise 2^4-1, 13 divise $2^{12}-1$ et 31 divise $2^{30}-1$.
Le PPCM de 4, 12 et 30 est 60 et $2^{60}-1$ qui peut donc être factorisé par 2^4-1, par $2^{12}-1$ et par $2^{30}-1$, est un multiple de $2\,015=5\times13\times31$.
On vérifie que $2^{30}-1$ n'est pas un multiple de 5 (chiffre des unités).
On en déduit que le plus petit entier strictement positif n tel qu'il existe une suite agréable $(u_n)_{n\geq0}$ vérifiant $u_n=2\,014$ est l'entier 60.

Exercice 6 – Extrait du concours général 2024

Pour tout réel $\alpha\geq0$, on appelle *suite associée* à α, la suite (u_n) définie par :

$$u_0=\alpha \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1}=\frac{1}{n+1}+\sqrt{u_n}.$$

Partie 1 : Généralités

1. Soit α un réel strictement positif. Démontrer que suite (u_n) associée à α vérifie $u_n\geq0$ pour tout entier $n\geq0$.
2. Soit α et β deux réels tels que $0\leq\alpha\leq\beta$. On note (u_n) la suite associée à α et (v_n) la suite associée à β. Démontrer que, pour tout entier $n\geq0, u_n\leq v_n$.
3. On note (w_n) la suite associée à 0. Démontrer que, pour tout entier $n\geq1, w_n\geq1$.
4. Soit α un réel positif ou nul. On suppose que la suite (u_n) associée à α converge vers un réel l. Déterminer la valeur de l.
5. Soit α un réel tel que $\alpha>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Justifier que la suite (u_n) associée à α est strictement décroissante. Que peut-on en déduire en termes de convergence ?

Partie 2 : Un cas particulier

Dans toute cette partie, on note (t_n) la suite associée à 4 et on définit la suite (s_n) par :

$$\text{pour tout entier } n\geq0,\ s_n=n(t_n-1).$$

6. Démontrer que, pour tout entier $n\geq1$, $1+\frac{2}{n}\leq t_n\leq1+\frac{3}{n}$.
7. Démontrer que, pour tout entier $n\geq1$, $2\leq s_n\leq2+\frac{6}{n}$.
8. Déterminer la limite de $\frac{t_n-1-\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Partie 1

1. Effectuons un raisonnement par récurrence pour montrer que, pour tout entier $n\geq0$, l'affirmation $P_n:\ u_n\geq0$ est vraie.
   <u>Initialisation :</u> pour $n=0,\ u_0=\alpha$ et $\alpha>0$ donc P_0 est vraie.
   <u>Hérédité :</u> si pour un entier $n\geq0$, P_n est vraie, montrons que P_{n+1} est encore vraie.
   $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}+\sqrt{u_n}$. Or $\frac{1}{n+1}>0$ et $\sqrt{u_n}$ existe et est positif ou nul. Par somme, $u_{n+1}\geq0$ soit P_{n+1} est vraie.
   Conclusion : pour tout entier $n\geq0$, $u_n\geq0$.
2. On pose cette fois-ci, pour tout entier naturel n, $P_n:\ 0\leq u_n\leq v_n$.
   <u>Initialisation :</u> pour $n=0,\ u_0=\alpha$ et $v_0=\beta$. Or $0\leq\alpha\leq\beta$ soit $0\leq u_0\leq v_0$ c'est-à-dire P_0 est vraie.
   <u>Hérédité :</u> si pour un entier $n\geq0$, P_n est vraie, montrons que P_{n+1} est encore vraie.
   Comme $0\leq u_n\leq v_n$ et la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbf{R}^+$, $0\leq\sqrt{u_n}\leq\sqrt{v_n}$
   D'où $0\leq\frac{1}{n+1}+\sqrt{u_n}\leq\frac{1}{n+1}+\sqrt{v_n}$ soit $0\leq u_{n+1}\leq v_{n+1}$.

P_{n+1} est donc encore vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq v_n$.

3. On pose cette fois-ci $P_n : w_n \geq 1$

Initialisation : comme $w_0 = 0$, $w_1 = 1 + \sqrt{0} = 1$ et $w_1 \geq 1$ c'est-à-dire P_1 est vraie

Hérédité : si pour un entier $n \geq 1$, P_n est vraie, montrons que P_{n+1} est encore vraie.

Comme $w_n \geq 1 \geq 0$, $\sqrt{w_n} \geq 1$. De plus $\frac{1}{n+1} > 0$ donc, par somme, $w_{n+1} \geq 1$ soit P_{n+1} est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 1$, $w_n \geq 1$.

4. Si la suite (u_n) converge vers le réel l alors, d'une part $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ d'autre part, comme la fonction racine carrée est continue sur $\mathbf{R}^+$et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \sqrt{u_n}\right) = \sqrt{l}$. Le nombre l est donc solution positive ou nulle de l'équation $l = \sqrt{l}$ soit $l^2 = l$ soit $l(l-1) = 0$ soit $l = 0$ ou $l = 1$.

Or, comme $\alpha \geq 0$, on démontrerait de même qu'au 3. Que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq 1$. On ne peut donc avoir $l = 0$. On a donc $l = 1$.

5. Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} < u_n$.

Initialisation : pour $n = 0$, $u_1 \leq u_0$ équivaut à $1 + \sqrt{\alpha} \leq \alpha$ soit $\sqrt{\alpha} \leq \alpha - 1$.

Or $\alpha > \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ donc $\sqrt{\alpha} \leq \alpha - 1$ équivaut à $\alpha \leq (\alpha-1)^2$ soit à $\alpha^2 - 3\alpha + 1 \geq 0$.

Le discriminant du trinôme est $\Delta = 9 - 4 = 5$ et les racines du trinôme sont $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Le coefficient de α^2 est positif donc $\alpha^2 - 3\alpha + 1 > 0$ car $\alpha > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. On a donc bien $u_1 < u_0$.

Hérédité : si, pour un entier $n \geq 0$, $u_{n+1} < u_n$ alors, comme les termes de la suite sont positifs et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$, $\sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{u_n}$.

De plus $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$. On en déduit, par somme que $u_{n+2} < u_{n+1}$.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} < u_n$ c'est-à-dire la suite (u_n) associée à α est strictement décroissante.

Partie 2

6. Nouveau raisonnement par récurrence

Initialisation : $t_0 = 4$ donc $t_1 = 1 + \sqrt{4} = 3$ et $1 + \frac{2}{1} \leq t_1 \leq 1 + \frac{3}{1}$.

Hérédité : si, pour un entier $n \geq 1$, $1 + \frac{2}{n} \leq t_n \leq 1 + \frac{3}{n}$ alors montrons que $1 + \frac{2}{n+1} \leq t_{n+1} \leq 1 + \frac{3}{n+1}$.

D'une part, $t_{n+1} - \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) = \sqrt{t_n} - 1 - \frac{1}{n+1}$.

Or, par hypothèse de récurrence, $\sqrt{t_n} - 1 - \frac{1}{n+1} \geq \sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 - \frac{1}{n+1}$ et, puisque $\sqrt{1 + \frac{2}{n}} \geq 0$ et $1 + \frac{1}{n+1} \geq 0$, comparer $\sqrt{1 + \frac{2}{n}}$ et $1 + \frac{1}{n+1}$ revient à comparer leurs carrés.

Or $1 + \frac{2}{n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2}(2n + 2 - n) = \frac{n+2}{n(n+1)^2}$ qui est un nombre positif.

Donc on a bien $1 + \frac{2}{n+1} \leq t_{n+1}$.

D'autre part, $t_{n+1} - \left(1 + \frac{3}{n+1}\right) = \sqrt{t_n} - 1 - \frac{2}{n+1}$.

Or $\sqrt{t_n} - 1 - \frac{2}{n+1} \leq \sqrt{1 + \frac{3}{n}} - 1 - \frac{2}{n+1}$ et, puisque $\sqrt{1 + \frac{3}{n}} \geq 0$ et $1 + \frac{2}{n+1} \geq 0$, comparer $\sqrt{1 + \frac{3}{n}}$ et $1 + \frac{2}{n+1}$ revient à comparer leurs carrés.

Or $1 + \frac{3}{n} - \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^2 = \frac{3}{n} - \frac{4}{n+1} - \frac{4}{(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2}(3(n+1)^2 - 4n(n+1) - 4n) = \frac{1}{n(n+1)^2}(-n^2 - 2n + 3)$

Soit $1 + \frac{3}{n} - \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^2 = -\frac{1}{n(n+1)^2}(n^2 + 2n - 3) = -\frac{1}{n(n+1)^2}(n-1)(n+3)$

Comme $n \geq 1$, $(n-1)(n+3) \geq 0$ et $-\frac{1}{n(n+1)^2}(n-1)(n+3) \leq 0$ et donc $t_{n+1} \leq \left(1 + \frac{3}{n+1}\right)$.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 1$, $1 + \frac{2}{n} \leq t_n \leq 1 + \frac{3}{n}$.

7. De la question **6.**, on tire : pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{2}{n} \leq t_n - 1 \leq \frac{3}{n}$ d'où, puisque $n \geq 1 > 0$, $2 \leq s_n$.

Pour l'autre inégalité, on démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1, t_n \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}$.

Initialisation : On a bien $t_1 \leq 1 + \frac{2}{1} + \frac{6}{1}$ puisque $t_1 = 3$

Hérédité : si, pour un entier $n \geq 1$, $t_n \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}$ alors on montre que $t_{n+1} \leq 1 + \frac{2}{n+1} + \frac{6}{(n+1)^2}$

soit $\frac{1}{n+1} + \sqrt{t_n} \leq 1 + \frac{2}{n+1} + \frac{6}{(n+1)^2}$ soit $\sqrt{t_n} \leq 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{6}{(n+1)^2}$ soit $t_n \leq \left(1 + \frac{2}{n+1} + \frac{6}{(n+1)^2}\right)^2$ puisque les nombres sont positifs.

Il suffit donc, comme à la question **6.**, de comparer $1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}$ et $\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{6}{(n+1)^2}\right)^2$.

$\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{6}{(n+1)^2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)^2+(n+1)+6}{(n+1)^2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+3n+8}{(n+1)^2}\right)^2 = \frac{\left(n^2+3n+8\right)^2}{(n+1)^4} = \frac{n^4+6n^3+25n^2+48n+64}{(n+1)^4}$

Et $1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2} = \frac{n^2+2n+6}{n^2}$ donc :

$\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{6}{(n+1)^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2(n+1)^4}\left(n^2(n^4 + 6n^3 + 25n^2 + 48n + 64) - (n^2 + 2n + 6)(n+1)^4\right)$

$n^2(n^4 + 6n^3 + 25n^2 + 48n + 64) = n^6 + 6n^5 + 25n^4 + 48n^3 + 64n^2$

On considère le numérateur :

$(n^2 + 2n + 6)(n + 1)^4 = (n^2 + 2n + 6)(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) = n^6 + 6n^5 + 20n^4 + 40n^3 + 45n^2 + 26n + 6$

Donc $\left(1 + \frac{2}{n+1} + \frac{6}{(n+1)^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2(n+1)^4}(5n^4 + 8n^3 + 19n^2 - 26n - 6)$.

$5n^4 + 8n^3 + 19n^2 - 26n - 6 = 5n^4 + n^3 + 7n^3 + 19n^2 - 26n - 6 = (5n^4 + n^3 - 6) + n(7n^2 + 19n - 26)$

Et pour tout entier $n \geq 1$, $5n^4 + n^3 - 6 \geq 0$ et $n(7n^2 + 19n - 26) \geq 0$.

Donc $\left(1 + \frac{2}{n+1} + \frac{6}{(n+1)^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}\right) \geq 0$ d'où $t_{n+1} \leq 1 + \frac{2}{n+1} + \frac{6}{(n+1)^2}$.

Conclusion, pour tout entier $n \geq 1, t_n \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}$.

On a donc, pour tout entier $n \geq 1, 1 + \frac{2}{n} \leq t_n \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}$ d'où l'on tire successivement $\frac{2}{n} \leq t_n - 1 \leq \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}$ puis $2 \leq s_n \leq 2 + \frac{6}{n}$.

8. On a, pour tout entier $n \geq 1, 1 + \frac{2}{n} \leq t_n \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}$, donc $0 \leq t_n - 1 - \frac{2}{n} \leq \frac{6}{n^2}$ d'où $0 \leq \frac{t_n - 1 - \frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} \leq \frac{6}{n}$.

On en déduit, par majoration, que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n - 1 - \frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} = 0$.

Fonctions – Égalités, inégalités et fonctions

Exercice 1

Soit a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que :

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

Comme a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle, l'inégalité triangulaire donne $a \leq b+c, b \leq c+a, c \leq a+b$ soit $a-b-c \leq 0, b-c-a \leq 0, c-a-b \leq 0$. Comme un carré est toujours positif, on en déduit que :

$(b-c)^2(a-b-c) \leq 0, (c-a)^2(b-c-a) \leq 0, (a-b)^2(c-a-b) \leq 0$.

On développe le membre de gauche, qu'on note N, de l'inégalité :

$N = (b^2+c^2-2bc)(a-b-c)+(c^2+a^2-2ac)(b-c-a)+(a^2+b^2-2ab)(c-a-b)$

$N = a^2(b-c-a+c-a-b)+b^2(a-b-c+c-a-b)+c^2(a-b-c+b-c-a)-2bc(a-b-c)-2ac(b-c-a)-2ab(c-a-b).$

$N = a^2(-2a)+b^2(-2b)+c^2(-2c)-2bca+2b^2c+2bc^2-2acb+2ac^2+2a^2c-2abc+2a^2b+2ab^2$

$N = a^2(-2a+2c+2b)+b^2(-2b+2c+2a)+c^2(-2c+2b+2a)-6abc$

$N = 2(a^2(-a+c+b)+b^2(-b+c+a)+c^2(-c+b+a)-3abc\,)$

Comme $N \leq 0$, on a bien $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc.$

Exercice 2

Déterminer tous les nombres réels x et y tels que si on pose $f(x,y) = x^2(x^2+1)+(x+y)((x+y)^2+1)$ alors $f(x,y) = f(-x,-y) = 1.$

Si (x,y) est une solution du problème alors $\frac{f(x,y)-f(-x,-y)}{2} = 0$, ce qui s'écrit $(x+y)((x+y)^2+1) = 0.$

Or, $(x+y)((x+y)^2+1) = 0 \Leftrightarrow x+y = 0$ ou $(x+y)^2+1 = 0$

Comme pour tous les réels x et y, $((x+y)^2+1) \geq 1 > 0$, nécessairement $y = -x$.

$f(x,y) = 1$ s'écrit alors $x^2(x^2+1) = 1$ soit $x^4+x^2-1 = 0$

On pose alors $X = x^2$ et on résout l'équation $X^2+X-1 = 0$. Son discriminant vaut 5 et sa seule solution positive ou nulle est $X_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

L'équation $x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ a pour solutions $-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ et $\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

On en déduit que les couples solutions ne peuvent qu'être les couples $\left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$ et $\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$.

On vérifie que ces deux couples sont solutions :

$f\left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+1\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1$ et, de même, $f\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right) = 1$

Exercice 3

1. Montrer que pour tous réels positifs a, b, c, d, $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ puis que $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.
2. Soit x, y, z des nombres réels positifs et strictement inférieurs à 1. Montrer que :

$$\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}$$

1. On part de l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique de deux nombres réels positifs : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ et on l'applique deux fois :

   $\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$ soit $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \frac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})$ et $\frac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}) \geq \sqrt{\sqrt{ab} \times \sqrt{cd}}$.

   Or $\sqrt{\sqrt{ab} \times \sqrt{cd}} = \sqrt{\sqrt{abcd}} = \sqrt[4]{abcd}$. On a donc bien $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.

On pose ensuite $d = \sqrt[3]{abc}$. En appliquant l'inégalité qui vient d'être démontrée, comme $abcd = d^3$, on a : $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{d^4}$ soit $\frac{a+b+c+d}{4} \geq d$ c'est-à-dire $\frac{a+b+c}{4} \geq \frac{3}{4}d$ soit $\frac{a+b+c}{3} \geq d$ ce qui s'écrit $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \frac{x}{1-x}$. La fonction f est deux fois dérivable sur $[0,1[$ et $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$. Pour tout réel x de $[0,1[$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.

On en déduit que $f(x) + f(y) + f(y) \geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$.

Comme la dérivée de f est strictement positive sur $[0,1[$, la fonction f y est strictement croissante. Or, d'après la question 1., $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, on a $f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f\left(\sqrt[3]{xyz}\right)$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 4

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$ et soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$.

1. Montrer que pour tout nombre réel u tel que $u > -1$, $(1+u)^a \leq 1 + au$.

2. En déduire que pour tous nombres réels strictement positifs x et y, $x^y + y^x > 1$.

1. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(t) = t^a - 1 - a(t-1) = \mathrm{e}^{a \ln t} - 1 + a - at$. La fonction g est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $t \in]0, +\infty[$:

$g'(t) = \frac{a}{t}\mathrm{e}^{a \ln t} - a = \frac{a}{\mathrm{e}^{\ln t}}\mathrm{e}^{a \ln t} - a = a\mathrm{e}^{(a \ln t - \ln t)} - a = a\mathrm{e}^{(a-1)\ln t} - a$

$g''(t) = \frac{a(a-1)}{t}\mathrm{e}^{(a-1)\ln t} = \frac{a(a-1)}{\mathrm{e}^{\ln t}}\mathrm{e}^{(a-1)\ln t} = a\,(a-1)\mathrm{e}^{(a-2)\ln t}$

Comme $0 < a < 1$, $a\,(a-1) < 0$. D'autre part, $\mathrm{e}^{(a-2)\ln t} > 0$ donc $g''(t) < 0$. La fonction g' est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Or $g'(1) = a\mathrm{e}^{(a-1)\ln 1} - a = a\mathrm{e}^0 - a = 0$. On en déduit que la fonction g' est strictement positive sur $]0,1[$ et strictement négative sur $]1, +\infty[$. La fonction g est donc strictement croissante sur $]0,1[$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. Son maximum est donc $g(1) = \mathrm{e}^{a \ln 1} - 1 + a - at$ soit $g(1) = 1 - 1 = a - a = 0$.

La fonction g est donc négative ou nulle sur $]0, +\infty[$ c'est-à-dire : pour tout réel $t > 0$, $t^a \leq 1 + a(t-1)$.

En posant $u = t - 1$, on a bien pour tout nombre réel u tel que $u > -1$, $(1+u)^a \leq 1 + au$.

2. Pour tous nombres réels strictement positifs x et y, $x^y + y^x = \mathrm{e}^{y \ln x} + \mathrm{e}^{x \ln y}$. On remarque déjà que $x^y > 0$ et $y^x > 0$.

De plus, si $x > 1$, $\ln x > 0$ donc $\mathrm{e}^{y \ln x} > 1$ et $x^y + y^x > 1$. De même si $y > 1$.

Si maintenant $x \leq 1$ et $y \leq 1$:

Si $x = 1$ et $y \leq 1$ alors $x^y = 1$ et $x^y + y^x > 1$. De même si $x \leq 1$ et $y = 1$.

On va donc se placer dans le cas où $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$ et montrer que $x^y > \frac{x}{x+y}$ en comparant leurs inverses puisque tous ces nombres sont strictement positifs.

$\frac{1}{x^y} = \frac{1}{\mathrm{e}^{y \ln x}} = \mathrm{e}^{-y \ln x} = \mathrm{e}^{y(-\ln x)} = \mathrm{e}^{y \ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \left(\frac{1}{x}\right)^y = \left(1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\right)^y$.

Donc, en appliquant le résultat de la question 1. à $u = \frac{1}{x} - 1$, qui est bien un nombre réel strictement supérieur à 1, on obtient : $\frac{1}{x^y} \leq 1 + y\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ soit $\frac{1}{x^y} \leq \frac{x+y-x}{x} \leq \frac{x+y}{x}$ donc $x^y > \frac{x}{x+y}$.

On démontre de même que $y^x > \frac{y}{y+x}$ et on en déduit que $x^y + y^x > 1$.

Exercice 5

Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ telles que :

pour tous réels x et y, $f(2x) = f(x+y)f(y-x) + f(x-y)f(-x-y)$.

Si $x = y$, $f(2x) = f(2x)f(0) + f(0)f(-2x)$.

Si $f(0) = 0$ alors, pour tout réel x, $f(2x) = 0$.

Si $f(0) \neq 0$ alors posons $f(0) = a$ et $f(2x) = af(2x) + af(-2x)$ soit $f(-2x) = \frac{1-a}{a}f(2x)$.

En particulier, pour $x = 0$, comme $a \neq 0$, $\frac{1-a}{a} = 1$ soit $a = \frac{1}{2}$ et pour tout réel x, $f(2x) = f(-2x)$ ce qui équivaut à pour tout réel x, $f(x) = f(-x)$.

On en déduit que pour tous réels x et y, $f(2x) = f(x+y)f(x-y) + f(x-y)f(x+y) = 2f(x+y)f(x-y)$.
En prenant $x = 0$, pour tout réel y, $\frac{1}{2} = f(0) = 2f(y)f(-y) = 2(f(y))^2$ d'où puisque f est à valeurs dans $\mathbf{R}^+$, $f(y) = \frac{1}{2}$.
Les seules fonctions solutions sont la fonction constante égale à 0 et la fonction constante égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 6
Déterminer les nombres réels k tels qu'il existe trois nombres réels x, y, z deux à deux distincts vérifiant :
$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = k$.

On remarque déjà que si les nombres x, y, z existent, ils sont tous non nuls.
$x + \frac{1}{y} = k$ s'écrit $x = k - \frac{1}{y} = \frac{ky-1}{y}$ soit $\frac{1}{x} = \frac{y}{ky-1}$. De même $y + \frac{1}{z} = k$ s'écrit $\frac{1}{z} = k - y$ soit $z = \frac{1}{k-y}$.
$z + \frac{1}{x} = k$ s'écrit alors $\frac{y}{ky-1} + \frac{1}{k-y} = k$ soit en réduisant au même dénominateur
$y(k-y) + ky - 1 = k(ky-1)(k-y)$ c'est-à-dire $ky - y^2 + ky - 1 - k(k^2y - ky^2 - k + y) = 0$
Soit $ky - y^2 + ky - 1 - k^3y + k^2y^2 + k^2 - ky = 0$, ce qui s'écrit aussi $k^2 - 1 + ky(1-k^2) + y^2(k^2-1) = 0$
Soit $(k^2-1)(1 - ky + y^2) = 0$ qui équivaut à $k^2 = 1$ ou $1 - ky + y^2 = 0$.
La deuxième égalité est impossible car elle s'écrit $k = y + \frac{1}{y}$ et comme $y + \frac{1}{z} = k$, on obtient $\frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ ce qui est exclu puisque les nombres x, y, z sont deux à deux distincts.
La seule possibilité est donc $k^2 = 1$ c'est-à-dire $k = 1$ ou $k = -1$.
On vérifie que :

- si $k = 1$, en choisissant $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ soit $y = 2$ et $z = 1 - \frac{1}{x} = 1 - 2 = -1$
  et on a bien alors $y + \frac{1}{z} = 2 - 1 = 1 = k$
- si $k = -1$, en choisissant $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{y} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ soit $y = -2$ et $z = -1 - \frac{1}{x} = -1 + 2 = 1$
  et on a bien alors $y + \frac{1}{z} = -2 + 1 = -1 = k$.

Exercice 7 – Extrait Concours Général 2019
On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$.
Pour f et g dans $\mathcal{P}$, on définit la fonction $h = f \circ g$ en posant, pour tout nombre réel $x \geq 0$, $h(x) = f(g(x))$.
Si, pour tout nombre réel $x \geq 0$, $f(x) \geq g(x)$, on note $f \geq g$.
On note u et v les fonctions de $\mathcal{P}$ définies par, pour tout nombre réel $x \geq 0$, $u(x) = e^x - 1$ et $v(x) = \ln(x+1)$.
La fonction f est une *fonction polynomiale* si f est nulle ou s'il existe un entier $d \geq 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, , \dots, a_d$ où $a_d \neq 0$ tels que, pour tout nombre réel $x \geq 0$, $f(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Les nombres réels $a_0, a_1, , \dots, a_d$ sont alors appelés coefficients de la fonction polynomiale f.

Si $\mathcal{S}$ est un ensemble de fonctions de $\mathcal{P}$, on définit les propriétés :
$(\boldsymbol{P_1})$: $\mathcal{S}$ contient les fonctions u et v.
$(\boldsymbol{P_2})$: $\mathcal{S}$ contient toutes les fonctions constantes positives.
$(\boldsymbol{P_3})$: si f et g sont dans $\mathcal{S}$, alors $f + g$ est dans $\mathcal{S}$.
$(\boldsymbol{P_4})$: si f et g sont dans $\mathcal{S}$, alors $f \circ g$ est dans $\mathcal{S}$.
$(\boldsymbol{P_5})$: si f et g sont dans $\mathcal{S}$ avec $f \geq g$, alors $f - g$ est dans $\mathcal{S}$.
$(\boldsymbol{P_6})$: si f et g sont dans $\mathcal{S}$, alors $f \times g$ est dans $\mathcal{S}$..
Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de fonctions de $\mathcal{P}$ qui vérifient les propriétés , $(\boldsymbol{P_1}), (\boldsymbol{P_2}), (\boldsymbol{P_3}), (\boldsymbol{P_4}), (\boldsymbol{P_5}), (\boldsymbol{P_6})$.

1. Soit l la fonction définie par, pour tout nombre réel $x \geq 0$, $l(x) = x$. Démontrer que la fonction l est dans $\mathcal{T}$.
2. Déterminer toutes les fonctions affines qui sont dans $\mathcal{T}$.
3. Soit p la fonction polynomiale définie par, pour tout nombre réel $x \geq 0$, $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Démontrer que la fonction p est dans $\mathcal{T}$.
4. Une fonction polynomiale de $\mathcal{P}$ est-elle toujours dans $\mathcal{T}$?

1. D'après $(\boldsymbol{P_1})$, $\mathcal{T}$ contient les fonctions u et v. D'après $(\boldsymbol{P_4})$, $\mathcal{T}$ contient leur composée $v \circ u$.

Or, pour tout nombre réel $x \geq 0$, $v \circ u(x) = \ln\big((e^x - 1) + 1\big) = \ln e^x = x$. Donc l est dans $\mathcal{T}$.

2. La fonction l est dans $\mathcal{T}$. Et d'après la propriété $(\boldsymbol{P_2})$, $\mathcal{T}$ contient les fonctions constantes positives.
D'après la propriété $(\boldsymbol{P_6})$, $\mathcal{T}$ contient le produit de la fonction l par toute fonction constante positive.
Donc toutes les fonctions linéaires $x \mapsto ax$, où a est un réel strictement positif, sont dans $\mathcal{T}$.
D'après $(\boldsymbol{P_3})$, $\mathcal{T}$ contient toute somme d'une fonction linéaire de coefficient positif et toute fonction constante positive c'est-à-dire toute fonction affine $x \mapsto ax + b$ où $a > 0$ et $b > 0$.
Réciproquement, considérons la fonction affine $f: x \mapsto ax + b$.
Si $a < 0$, alors l'image par la fonction f de l'intervalle $\left]\frac{b}{a}, +\infty\right[$ est incluse dans l'intervalle $]-\infty, 0[$ et la fonction f n'est pas dans $\mathcal{T}$.
Si $a = 0$ et $b < 0$, alors l'image par la fonction f de l'intervalle $[0, +\infty[$ est $\{b\}$ et, comme $b < 0$, la fonction f n'est pas dans $\mathcal{T}$.
Si $a > 0$, alors l'image par la fonction f de l'intervalle $\left[0, \frac{b}{a}\right[$ est incluse dans l'intervalle $]-\infty, 0[$ et la fonction f n'est pas dans $\mathcal{T}$.
On en déduit que les fonctions affines qui sont dans $\mathcal{T}$ sont les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ où $a > 0$ et $b > 0$.

3. D'après $(\boldsymbol{P_6})$, comme la fonction l est dans $\mathcal{T}$, toutes les fonctions $x \mapsto x^k$ sont dans $\mathcal{T}$.
Comme les fonctions constantes positives sont dans $\mathcal{T}$, toujours d'après $(\boldsymbol{P_6})$, les fonctions $x \mapsto a_k x^k$, où $a_k > 0$, sont dans $\mathcal{T}$.
On en déduit, d'après $(\boldsymbol{P_3})$, toute fonction polynomiale dont les coefficients sont strictement positifs est dans $\mathcal{T}$.
En particulier, la fonction $x \mapsto 2x^2 + 4$ est dans $\mathcal{T}$.
La fonction $x \mapsto 3x$ est une fonction linéaire à coefficient positif donc elle est dans $\mathcal{T}$.
Or, pour tout réel $x > 0$, $p(x) = (2x^2 + 4) - 3x = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}$ et $p(x) \geq 0$
Donc d'après $(\boldsymbol{P_5})$, la fonction p est dans $\mathcal{T}$.

4. Soit f une fonction polynomiale $f: \mapsto a_d x^d + \cdots + a_0$ définie sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$ ce qui implique que :
f admet sur $[0, +\infty[$ un minimum m positif ;
$a_d > 0$ car sinon f admet en $+\infty$ la limite $-\infty$ et n'est donc pas à valeurs dans $[0, +\infty[$;
$a_0 \geq 0$ car sinon $f(0) < 0$ et f n'est pas à valeurs dans $[0, +\infty[$.
On note U l'ensemble des coefficients positifs ou nuls de la fonction f et V l'ensemble des coefficients strictement négatifs de la fonction f.
U est non vide car a_0 et a_d sont dans U.
Si V est vide, la fonction f est dans $\mathcal{T}$. Sinon, soit :
$$g(x) = \sum_{a_k \in U} a_k x^k \text{ et } h(x) = \sum_{a_k \in V} -a_k x^k.$$
g et h sont deux fonctions polynomiales à coefficients positifs dons appartenant à $\mathcal{T}$ et $h - g = f$ où $f \geq m \geq 0$ donc, d'après $(\boldsymbol{P_5})$, la fonction est dans $\mathcal{T}$.
Donc toute fonction polynomiale définie sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$ est dans $\mathcal{T}$.

Géométrie – Nombres complexes

Exercice 1

Soit A, B et C trois points non alignés du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. On note $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

2. On considère un triangle ABC, non nécessairement équilatéral et on construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles équilatéraux de base $[AB], [BC], [CA]$.
Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

1. On commence par vérifier que $j^3 = 1$ donc $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$
Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si C est l'image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, ce qui s'écrit $\frac{c-a}{b-a} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = -\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} = -j^2$ ce qui s'écrit $c - a = -bj^2 + aj^2$
Soit, en multipliant par j^2, $cj^2 - aj^2 + bj - aj = 0$ soit, puisque $j + j^2 = -1$, $cj^2 + bj + a = 0$.

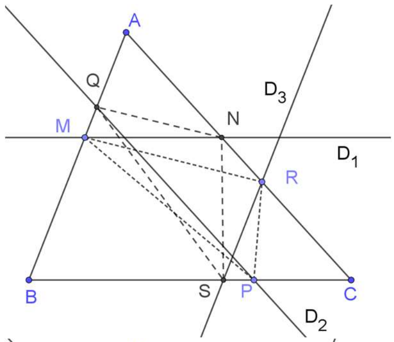
2. On ne change pas la généralité du problème en supposant que le triangle ABC est direct (sinon on échange les points B et C). On peut donc acter qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ appartient à $]0, \pi[$.
Les triangles équilatéraux ADB, BEC et CFA construits à l'extérieur de ABC sont directs.
On note d, e, f les affixes respectives des points D, E, F.
Les affixes respectives m, n, p des centres de gravité des triangles ABD, BCE et CAF sont :
$m = \frac{1}{3}(a + b + d), n = \frac{1}{3}(b + c + e), p = \frac{1}{3}(c + a + f)$
Or, $m + nj + pj^2 = \frac{1}{3}\left((a + b + d) + j(b + c + e) + j^2(c + a + f)\right)$
Soit $m + nj + pj^2 = \frac{1}{3}\left((a + jc + j^2 f) + (b + je + j^2 c) + (d + jb + +j^2 a)\right)$
Or, d'après la question 1. , et comme les triangles ADB, BEC et CFA sont directs :
$a + jc + j^2 f = b + je + j^2 c = d + jb + j^2 a = 0$
D'où $m + nj + pj^2 = 0$, ce qui signifie que le triangle MNP est équilatéral direct.

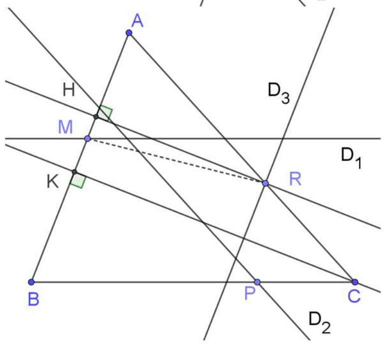
Exercice 2

Montrer que le triangle de sommets A, B, C d'affixes respectives a, b, c est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $c - a = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}(b - a)$ ou $c - a = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}(b - a)$ c'est-à-dire si et seulement si $c - a\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right) - b\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = 0$ ou $c - a\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}\right) - b\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = 0$.
Ceci équivaut à dire que le produit P des deux expressions est nul soit
$P = \left(c - a\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right) - b\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right)\left(c - a\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}\right) - b\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right) = 0$
Or $P = c^2 - ac\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}\right) - bc\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} - ac\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right) + a^2\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}\right) + ab\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} - bc\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} + ab\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}\right) + b^2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$
Soit $P = c^2 + a^2\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}} + 1\right) + b^2 - ac\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}} + 1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right) - bc\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right) + ab\left(\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}\right)\right)$.
Or $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ donc $1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$
Et $\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} - 1 + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} - 1 = 1 - 1 - 1 = -1$
On en déduit que $P = a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab$
Le triangle ABC est donc bien équilatéral si et seulement si $P = 0$ soit $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Exercice 3
Soit ABC un triangle.
Une droite D_1 parallèle à (BC) coupe les droites (AB) et (AC) respectivement en M et N.
Une droite D_2 parallèle à (CA) coupe les droites (BC) et (BA) respectivement en P et Q.
Une droite D_3 parallèle à (AB) coupe les droites (CA) et (CB) respectivement en R et S.
Montrer que les triangles MPR et NQS ont même aire.





Comme les droites (MN) et (BC) sont parallèles, d'après le théorème de Thales, $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$. On note a ce quotient. On peut de même écrire $\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{BA}} = b$ et $\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CA}} = \frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{CB}} = c$.
D'autre part, $\mathcal{A}_{\mathrm{MPR}} = \mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} - \mathcal{A}_{\mathrm{AMR}} - \mathcal{A}_{\mathrm{BMP}} - \mathcal{A}_{\mathrm{CPR}}$.
Or si on note H et K les projetés orthogonaux respectifs de R et C sur la droite (AB), alors $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \mathrm{CK} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \sin\widehat{\mathrm{BAC}}$
Et $\mathcal{A}_{\mathrm{AMR}} = \frac{1}{2}\mathrm{AM} \times \mathrm{RH} = \frac{1}{2}\mathrm{AM} \times \mathrm{AR} \times \sin\widehat{\mathrm{BAC}}$
Donc $\frac{\mathcal{A}_{\mathrm{AMR}}}{\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}} = a \times \frac{\mathrm{AC}-\mathrm{CR}}{\mathrm{AC}} = a(1-c)$ soit $\mathcal{A}_{\mathrm{AMR}} = a(1-c)\,\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}$
On montre de même que :
$\mathcal{A}_{\mathrm{BMP}} = b(1-a)\,\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}$ et $\mathcal{A}_{\mathrm{CPR}} = c(1-b)\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}$.
On en déduit que
$\mathcal{A}_{\mathrm{MPR}} = \mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}(1 - a(1-c) - b(1-a) - c(1-b))$
Soit $\mathcal{A}_{\mathrm{MPR}} = \mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}(1 - (a+b+c) + ac + ba + cb)$.
D'autre part, $\mathcal{A}_{\mathrm{NQS}} = \mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} - \mathcal{A}_{\mathrm{AQN}} - \mathcal{A}_{\mathrm{BQS}} - \mathcal{A}_{\mathrm{CSN}}$ et on démontrerait de même que $\mathcal{A}_{\mathrm{AQN}} = a(1-b)\,\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}$, $\mathcal{A}_{\mathrm{BQS}} = b(1-c)\,\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}$
et $\mathcal{A}_{\mathrm{CSN}} = c(1-a)\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}$ d'où $\mathcal{A}_{\mathrm{NQS}} = \mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}\big(1 - a(1-b) - b(1-c) - c(1-a)\big)$
Soit $\mathcal{A}_{\mathrm{NQS}} = \mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}(1 - (a+b+c) + ab + bc + ca)$
On a donc bien $\mathcal{A}_{\mathrm{MPR}} = \mathcal{A}_{\mathrm{NQS}}$

Exercice 4 – Concours Général 1994
Soit ABC un triangle et P un point du plan à l'intérieur du triangle. On note L, M, N les projetés orthogonaux de P respectivement sur les droites $(BC), (CA), (AB)$.
Déterminer la position du point P pour lequel la quantité $BL^2 + CM^2 + AN^2$ est minimale.

On pose $S = BL^2 + CM^2 + AN^2$
En considérant les symétriques L', M', N' respectifs de L, M, N par rapport aux milieux respectivement de $[BC], [CA], [AB]$, on peut considérer la somme $S' = CL'^2 + AM'^2 + BN'^2$. Faire varier les trois points L, M, N sur chaque segment revient alors à faire varier chaque symétrique L', M', N'sur les mêmes segments.
Cette symétrie conduit à s'intéresser à la somme $S'' = CL^2 + AM^2 + BN^2$
On a $S'' = CL^2 + AM^2 + BN^2 = CP^2 - PL^2 + AP^2 - PM^2 + BP^2 - PN^2$ en appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles CPL, APM et BNP.
Soit encore $S'' = CP^2 - PM^2 + AP^2 - PN^2 + BP^2 - PL^2 = CM^2 + AN^2 + BL^2 = S$ en regroupant et appliquant à nouveau le théorème de Pythagore dans les triangles CPM, APN et BPL.
$2S = (BL^2 + CL^2) + (CM^2 + AM^2) + (AN^2 + BN^2)$.
Or $\left(\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CL}\right)^2 = BL^2 + CL^2 + 2\overrightarrow{BL}\cdot\overrightarrow{CL}$ et $\left(\overrightarrow{BL} - \overrightarrow{CL}\right)^2 = BL^2 + CL^2 - 2\overrightarrow{BL}\cdot\overrightarrow{CL}$
D'où $BL^2 + CL^2 = \frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CL}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BL} - \overrightarrow{CL}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(2\overrightarrow{A'L}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BC}\right)^2\right)$ où A' est le milieu de $[BC]$.
Soit $BL^2 + CL^2 = \frac{1}{2}(4A'L^2 + BC^2)$. DE même, $CM^2 + AM^2 = \frac{1}{2}(4B'M^2 + CA^2)$ et $AN^2 + BN^2 = \frac{1}{2}(4C'N^2 + AB^2)$ où B' et C' sont les milieux respectifs de $[CA]$ et $[AB]$.
On a donc $S + S'' = \frac{1}{2}(BC^2 + CA^2 + AB^2) + 2(A'L^2 + B'M^2 + C'N^2)$.

La première somme est constante, la deuxième est minimale lorsque $L = A'$, $M = B'$ et $N = C'$ et la valeur minimale de S est $\frac{1}{2}(BC^2 + CA^2 + AB^2)$.

Remarque : il est très fréquent en géométrie que des extrema soient atteints pour des configurations faisant intervenir des milieux ou des polygones réguliers.

Exercice 5 – Extrait Concours Général 1998

Un tétraèdre $ABCD$ vérifie les conditions suivantes :

(1) Les arêtes $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ sont deux à deux orthogonales

(2) $AB = 3$ et $CD = \sqrt{2}$.

Déterminer la Valeur minimale de $S = BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$.

$S = BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$.

Comme pour tout nombres réels a et b, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, on peut écrire :

$BC^6 - AC^6 = (BC^2 - AC^2)(BC^4 + BC^2AC^2 + AC^4)$

$BD^6 - AD^6 = (BD^2 - AD^2)(BD^4 + BD^2AD^2 + AD^4)$

Dans les triangles ABC, ABD et ACD, rectangles en A, d'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$, $BD^2 = AB^2 + AD^2$ et $CD^2 = AC^2 + AD^2$

Donc $S = (BC^2 - AC^2)(BC^4 + AC^4 + BC^2 \times AC^2) + (BD^2 - AD^2)(BD^4 + AD^4 + BD^2 \times AD^2)$

$S = AB^2((BC^2 + AC^2)^2 - BC^2 \times AC^2) + AB^2((BD^2 + AD^2)^2 - BD^2 \times AD^2)$

$S = AB^2((AB^2 + 2AC^2)^2 - (AB^2 + AC^2) \times AC^2) + AB^2((AB^2 + 2AD^2)^2 - (AB^2 + AD^2) \times AD^2)$

$S = AB^2((AB^2 + 2AC^2)^2 - (AB^2 + AC^2) \times AC^2) + AB^2((AB^2 + 2(CD^2 - AC^2))^2 - (AB^2 + (CD^2 - AC^2)) \times (CD^2 - AC^2))$

Comme les distances AB et CD sont fixées, on exprime S en fonction de ces distances et de la variable AC :

$S = 9((9 + 2AC^2)^2 - (9 + AC^2) \times AC^2) + 9\left((9 + 2(CD^2 - AC^2))^2 - \left(9 + (2 - AC^2)\right) \times (2 - AC^2)\right)$

En posant $x = AC^2$, $S = 9((9 + 2x)^2 - (9 + x)x) + 9\left((9 + 2(2 - x))^2 - \left(9 + (2 - x)\right) \times (2 - x)\right)$

Soit $S = 9((9 + 2x)^2 - (9 + x)x) + 9((13 - 2x)^2 - (11 - x)(2 - x))$

Soit $S = 9(81 + 36x + 4x^2 - 9x - x^2 + 169 - 52x + 4x^2 - 22 + 2x + 11x - x^2)$

Soit $S = 9 = 9(6x^2 - 12x + 228) = 54(x^2 - 2x + 38)$.

S est une fonction trinôme du second degré en x. Le coefficient de x^2 est 54 qui est positif. S admet donc bien une valeur minimale en $x = 1$.

Cette valeur minimale est : $S = 54 \times 37 = 1\,998$

Remarque : on constate que la condition (2) n'intervient pas dans l'existence et l'unicité d'une valeur minimale. Elle permet juste d'aboutir à l'année du concours.

Exercice 6 – Théorème d'Apollonius

1. Soit MNP un triangle. Montrer que si R est le point d'intersection de la droite (NP) avec l'une des deux bissectrices (intérieure ou extérieure) de l'angle $\widehat{\mathrm{NMP}}$, alors $\frac{\mathrm{RN}}{\mathrm{RP}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MP}}$.

On admet la réciproque de cette propriété.

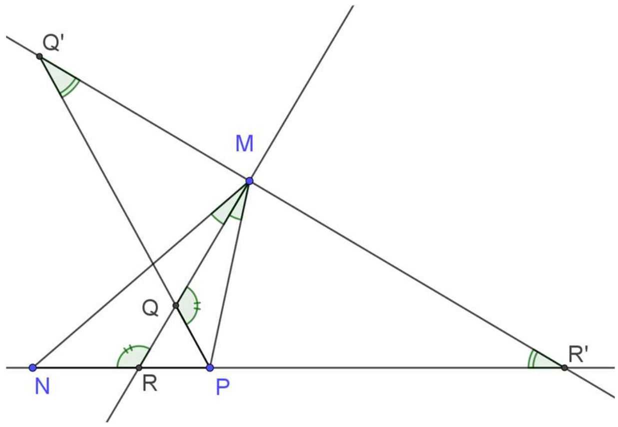
2. Soit A et B deux points distincts et d un nombre réel strictement positif. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = d$.

1. Soit (MR) la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{NMP}}$ et soit Q le point de $[\mathrm{MR}]$ tel que $\widehat{\mathrm{NRM}} = \widehat{\mathrm{MQP}}$. Alors les triangles MQP et MRN sont semblables car ils ont deux angles de même mesure.

Donc $\frac{\mathrm{RN}}{\mathrm{QP}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MP}}$. Or le triangle QPR est isocèle en P car

$\widehat{\mathrm{PQR}} = 180° - \widehat{\mathrm{PQM}} = 180° - \widehat{\mathrm{NRM}} = \widehat{\mathrm{PRQ}}$.

Donc $\mathrm{QP} = \mathrm{RP}$ et $\frac{\mathrm{RN}}{\mathrm{RP}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MP}}$.



Soit (MR') la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{NMP}}$ (R' étant son point d'intersection avec (NP)) et soit Q' le point d'intersection de (PQ) avec (MR'). On montre alors que les triangles MQQ' et MRR' sont semblables ayant un angle de même mesure (l'angle droit en M) et un autre en $\widehat{\mathrm{QRP}}$ et en $\widehat{\mathrm{MRR'}}$ qui valent tous les deux celui de PRQ puisqu'ils sont tous les deux supplémentaires à deux angles de même mesure.

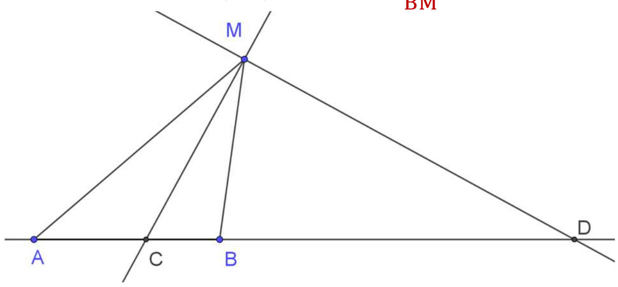
Donc les triangles étant semblables, $\widehat{\mathrm{NR'M}} = \widehat{\mathrm{MQ'P}}$

et soit Q' le point de $(\mathrm{MR'})$ tel que $\widehat{\mathrm{NR'M}} = \widehat{\mathrm{MQ'P}}$. Alors les triangles MQ'P et MR'N sont aussi semblables. En effet $\widehat{\mathrm{NR'M}} = \widehat{\mathrm{MQ'P}}$.

et $\widehat{\mathrm{PMQ'}} = 90° + \widehat{\mathrm{PMQ}} = 90° + \widehat{\mathrm{QMN}} = \widehat{\mathrm{MNR'}}$.

On termine la démonstration comme dans le cas précédent.

2. Dans le cas où $d = 1$, l'ensemble cherché est la médiatrice de $[\mathrm{AB}]$. La situation étant symétrique par rapport à la position des points A et B, on suppose que $d > 1$. Soit M un point non situé sur (AB) et tel que $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = d$.



Si on note respectivement C et D les points d'intersection de la bissectrice intérieure et de la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{AMB}}$ avec (AB), d'après la question 1, $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \mathrm{d}$ et, d'après le résultat admis dans la question 1, l'égalité $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}$ caractérise les points C et D qui sont donc indépendants du point M.

De plus, $\widehat{\mathrm{CMD}} = 90°$ donc le point M est sur le cercle de diamètre $[\mathrm{CD}]$.

Réciproquement, supposons qu'un point M appartienne au cercle de diamètre $[\mathrm{CD}]$.

Si M appartient aussi à la droite (AB), alors il est confondu avec C ou avec D. Or C et D sont tels que $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = d$.

Donc les points C et D sont bien dans l'ensemble cherché.

Sinon, en considérant les points d'intersections respectifs E et F des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{AMB}}$ avec la droite (AB), alors $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{BF}} = \mathrm{q}$ et si $\mathrm{q} < \mathrm{d}$, cela signifie que E est plus proche de A que C tandis que F est plus loin de A que D. Mais alors on aurait $\widehat{\mathrm{EMF}} > 90°$ ce qui est incompatible avec le fait que les bissectrices intérieure et extérieure d'un angle sont perpendiculaires entre elles. De même si $q > d$. Donc $q = d$, c'est-à-dire M appartient à l'ensemble cherché.

Conclusion : l'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[\mathrm{CD}]$.

Dénombrement – Probabilités

Exercice 1
Sur un tableau noir, un élève a écrit 17 entiers naturels dont le chiffre des unités appartient à l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Montrer que l'on peut toujours en sélectionner 5 dont la somme est un multiple de 5.

On range les 17 entiers dans 5 sous-ensembles C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 le sous ensemble C_i contenant les entiers congrus à i modulo 5.
Si chaque C_i contient au moins un des 17 entiers, alors, en choisissant un entier dans chaque C_i, la somme de ces 5 entiers choisi sera congrue à $0 + 1 + 2 + 3 + 4$ soit 10 modulo 5 et donc un multiple de 5.
Si un des C_i est vide, alors, les 17 entiers sont répartis sur 4 sous-ensembles et, d'après le principe des tiroirs, il y en a un qui contient 5 nombres (puisque $4 \times 4 < 17$). Ces 5 nombres ont donc le même chiffre des unités et leur somme est multiple de 5.

Exercice 2 – Asian Pacific Mathématics Olympiads 2008
On considère une classe comportant 46 élèves. Dans cette classe, les élèves forment des groupes de trois personnes (trios), deux trios quelconques distincts ayant toujours au plus une personne en commun.
Montrer qu'on peut, dans cette classe, constituer un ensemble de 10 élèves ne contenant aucun trio complet.

On note C l'ensemble des 46 élèves de la classe et on pose :
$s = \max\{card\ S\ , S \subset C \text{ et } S \text{ ne contient aucun trio complet}\}$. Il suffit de montrer que $s \geq 10$.
Si $s \leq 9$, on considère un ensemble S tel que $card\ S = s$ et S ne contient aucun trio complet.
Soit x un élève quelconque n'appartenant pas à S. De par la définition de s (maximum), il existe un trio auquel x appartient ainsi que deux autres élèves de S. Le nombre de façons de choisir ces deux autres élèves est $\binom{s}{2} = \frac{s(s-1)}{2}$ et $\binom{s}{2} \leq \binom{9}{2}$ soit $\binom{s}{2} \leq 36$.
D'autre part, il y a au moins $46 - 9 = 37$ élèves n'appartenant pas à S et deux trios n'ont jamais deux élèves en commun. Comme $37 > 36$, parmi ces 37 élèves hors de S, il y en a au moins un, noté y, qui n'appartient à aucun trio constitué de deux élèves de S et d'un hors de S. On peut alors ajouter l'élève y à S ce qui contredit $s \leq 9$.
Donc $s \geq 10$ et on peut bien constituer un ensemble S de 10 éléments ne contenant aucun trio complet.

Exercice 3 – Asian Pacific Mathématics Olympiads 2014
Soit n et b deux entiers naturels non nuls. On dit que n est *b-répartissant* s'il existe un ensemble E de n entiers strictement positifs distincts, inférieurs à b, n'ayant pas deux sous-ensembles U et V disjoints et tels que la somme des éléments de U soit égale à la somme des éléments de V.
Montrer que 8 est 100-répartissant.

Soit $E = \{3, 6, 12, 24, 48, 95, 96, 97\}$. Alors $E = \{3, 6, 12, 24, 48, 96\} \cup \{95, 97\}$.
$E_1 = \{3, 6, 12, 24, 48, 96\} = \{3 \times 2^k, 0 \leq k \leq 5\}$ et $E_2 = \{95, 97\} = \{3 \times 2^5 - 1, 3 \times 2^5 + 1\}$.
Comme $0 \leq k \leq 5$ et $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = \frac{1-2^6}{1-2} = 63$, les sommes des nombres dans E_1 sont toutes divisibles par 3 et s'écrivent $3t$, où $1 \leq t \leq 63$ et valent au plus $3 \times 63 = 189$.
Des sommes d'éléments de E sont aussi $95 + 97 = 192$ et les sommes obtenues en ajoutant à 192 des sommes d'éléments de E_1. Il y a 64 multiples de 3 au moins égaux à 192.
Des sommes d'éléments de E sont aussi obtenues en considérant juste 95 ou en ajoutant à 95 des sommes d'éléments de E_1. Ces nombres sont tous congrus à -1 modulo 3. Il y en a 64 inférieurs ou égaux à 192.
De même avec les sommes contenant 97.
Ainsi, il y a au moins $63 + 64 + 64 + 64 = 255$ sommes différentes de nombres de E.
D'autre part comme E a 8 éléments, E possède $2^8 - 1 = 255$ sous-ensembles non vides.
Conclusion, on ne peut trouver deux sous-ensembles disjoints de E dont les sommes des éléments sont égales.
Le nombre 8 est donc bien 100-répartissant.

Exercice 4 – Extrait du Concours général 2000

On dispose de b boules blanches et n boules noires – au moins une de chaque –, que l'on répartit entre deux urnes de façon qu'aucune d'elle ne soit vide.

On note s le nombre de boules dans la première et r celui de ces boules qui sont blanches.

L'événement considéré est le tirage d'une boule au hasard dans l'une des urnes, urne choisie au hasard. Le but est de déterminer les répartitions rendant maximale la probabilité p de tirer une boule blanche.

1. Exprimer p en fonction de b, n, r et s.
2. Dans cette question, on fixe la valeur de s. Comment choisir r pour augmenter p ?
3. Résoudre l'exercice.

On remarque déjà que si la première urne contient s boules dont r blanches, la deuxième urne contient $b+n-s$ boules dont $b-r$ blanches. De plus, on doit avoir $1 \leq s \leq b+n-1$ et $0 \leq r \leq \min(s, b)$.

1. On choisit au hasard l'une de urnes donc si on note les événements :
   B : « tirer une boule blanche »
   U_1 : choisir la première urne
   U_2 : choisir la deuxième urne
   Alors $p = p(B) = p(B \cap U_1) + p(B \cap U_2) = p(U_1) \times p(B/U_1) + p(U_2) \times p(B/U_2)$
   Soit $p = \frac{1}{2} \times \frac{r}{s} + \frac{1}{2} \times \frac{b-r}{b+n-s} = \frac{br+nr+bs-2rs}{2s(b+n-s)}$.
2. On peut aussi écrire $p = \frac{b+n-2s}{2s(b+n-s)} r + \frac{b}{2(b+n-s)}$. Pour s fixé, p est une fonction affine de r définie sur un intervalle borné par le maximum de boules blanches dans la première urne (soit $\inf(b, s)$) et le minimum (soit $\sup(0, s-n)$).
   Comme $b+n-s > 0$ et $s > 0$, o, considère deux cas :
   - Si $b+n-2s < 0$, soit $\frac{b+n}{2} < s$, ce qui signifie que la première urne contient plus de la moitié des boules, alors la fonction affine est décroissante.
     Si $s \leq n$, alors le maximum est atteint pour $r = 0$, c'est-à-dire toutes les boules dans la première urne sont noires et $p = \frac{b}{2(b+n-s)} = \frac{b}{2s'}$ où $s' = b+n-s$.
     Si $s > n$, le maximum est atteint lorsque $r = s-n$, c'est-à-dire toutes les boules dans la deuxième urne sont blanches et $p = \frac{1}{2} \times \frac{s-n}{s} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{n}{2s}$.
   - Si $b+n-2s > 0$, soit $\frac{b+n}{2} > s$, ce qui signifie que la première urne contient moins de la moitié des boules alors la fonction affine est croissante.
     Si $s \geq b$, alors le maximum est atteint pour $r = b$, c'est-à-dire la deuxième urne ne contient que des boules noires et $p = \frac{b}{2s}$.
     Si $s < b$, le maximum est atteint lorsque $r = s$, c'est-à-dire toutes les boules dans la première urne sont blanches et $p = \frac{2b+n-2s}{2(b+n-s)} = 1 - \frac{b}{2s'}$.
   - Si $b+n-2s = 0$, ce qui signifie que s est la moitié du nombre total de boules et $p = \frac{b}{2s}$.
3. Quand $p = \frac{b}{2s}$ respectivement $p = \frac{b}{2s'}$, toutes les boules blanches sont dans une seule urne, urne qui contient s respectivement $s' = n+b-s$ boules.
   Alors, la valeur maximum de p correspond à la valeur minimale de s respectivement de s' à savoir b et alors $p = \frac{1}{2}$
   Quand $p = 1 - \frac{n}{2s}$ respectivement $p = 1 - \frac{b}{2s'}$, toutes les boules noires sont dans une seule urne, urne qui contient s respectivement $s' = n+b-s$ boules.
   Alors, la valeur maximale de p correspond à la valeur maximale de s respectivement de s' à savoir $n+b-1$ et alors $p = 1 - \frac{n}{2(b+n-1)} = \frac{1}{2} + \frac{b-1}{2(b+n-1)}$

Exercice 5

Pierrot s'amuse avec ses petits dinosaures-jouets en plastique. Il fait des *combats* entre ses jouets, pris 2 à 2. Il se prépare à faire un combat entre le jouet J_1 (un petit tricératops) et le jouet J_2 (un petit tyrannosaure).

Les règles du jeu sont les suivantes : les deux jouets sont lancés en l'air, simultanément, et retombent indépendamment sur le plancher. Chaque jouet peut retomber **debout** ou **couché**. Quand un jouet tombe debout, il mérite un point. Le vainqueur est le premier à être retombé 2 fois debout, si l'adversaire n'a pas encore réussi à retomber 1 fois debout. Il s'agit donc d'une course au premier qui accumule deux points (avec la convention qu'un score de 2 à 1, de 1 à 2 ou de 1 à 1 correspond à un *match nul*).

On suppose que J_1 tombe debout, en moyenne, une fois sur trois lancers et que J_2 tombe debout, en moyenne, une fois sur quatre lancers. Déterminer :

1. La probabilité que J_1 gagne.
2. La probabilité que J_2 gagne.
3. La probabilité qu'il y ait match nul.

On peut résumer les quatre résultats possibles lors d'un lancer des deux jouets et leur probabilité par le tableau suivant :

	J_2 tombe debout	J_2 tombe couché	Totaux
J_1 tombe debout	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{12}$	$\frac{1}{3}$
J_1 tombe couché	$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{2}{12}$	$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{6}{12}$	$\frac{2}{3}$
Totaux	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

On peut de plus traduire l'état du « combat » entre les deux jouets par un couple d'entiers (m,n) où m et n désignent les nombres de fois respectifs où J_1 et J_2 tombent debout ($0\leq m\leq 2$ et $0\leq n\leq 2$)

L'état (0,0) est l'état de départ, l'état (2,0) est l'état où J_1 gagne, l'état (0,2) est l'état où J_2 gagne, les états (1,1), (1,2) et (2,1) sont ceux donnant un match nul.

Lors d'un combat, l'état (m,n) est modifié (augmentation de m ou de n d'une unité) si et seulement si l'un au moins des jouets tombe debout. Si on se restreint à ce cas où l'un au moins des deux jouets tombent debout (événement dont la probabilité est égale à $1-\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$), il y a trois résultats possibles (qui correspondent à des probabilités conditionnelles) :

- On passe de (m,n) à $(m+1,n+1)$ avec la probabilité $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$.
- On passe de (m,n) à $(m+1,n)$ avec la probabilité $\frac{\frac{3}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{6}$
- On passe de (m,n) à $(m,n+1)$ avec la probabilité $\frac{\frac{2}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{6}$.

Notons $p(m,n)$ le triplet constitué des probabilités, partant de l'état (m,n) que le combat se termine par une victoire de J_1, une victoire de J_2, un match nul.

$p(2,0)=(1,0,0), p(0,2)=(0,1,0), p(2,1)=(0,0,1), p(1,2)=(0,0,1), p(1,1)=(0,0,1)$ et

$p(1,0)=\frac{3}{6}p(2,0)+\frac{2}{6}\,p(1,1)+\frac{1}{6}\,p(2,1)=\frac{3}{6}(1,0,0)+\frac{2}{6}\,(0,0,1)+\frac{1}{6}\,(0,0,1)=\left(\frac{3}{6},0,\frac{3}{6}\right)$

$p(0,1)=\frac{3}{6}p(1,1)+\frac{2}{6}\,p(0,2)+\frac{1}{6}\,p(1,2)=\frac{3}{6}(0,0,1)+\frac{2}{6}\,(0,1,0)+\frac{1}{6}\,(0,0,1)=\left(0,\frac{2}{6},\frac{4}{6}\right)$

$p(0,0)=\frac{3}{6}p(1,0)+\frac{2}{6}\,p(0,1)+\frac{1}{6}\,p(1,1)=\frac{3}{6}\left(\frac{3}{6},0,\frac{3}{6}\right)+\frac{2}{6}\left(0,\frac{2}{6},\frac{4}{6}\right)+\frac{1}{6}\,(0,0,1)=\left(\frac{9}{36},\frac{4}{36},\frac{23}{36}\right)$

On en déduit que la probabilité que J_1 gagne est égale à $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$, la probabilité que J_2 gagne est égale à $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ et que la probabilité d'avoir un match nul est $\frac{23}{36}$.

Exercice 6 – Extrait Concours général 2022

Si E est un événement, on désigne par $P(E)$ la probabilité de E. On pourra librement utiliser le résultat suivant :

si $D_1, \dots, D_k$ sont des événements deux à deux disjoints, alors $P(D_1 \cup \ \dots \cup \ D_k) = P(D_1) + \cdots + P(\,D_k)$.

Ambre dispose d'une pièce qui, à chaque lancer, donne PILE avec une probabilité $a \in \,]0,1[$ et donne FACE avec une probabilité $1 - a$.
Benjamin dispose d'une pièce qui, à chaque lancer, donne PILE avec une probabilité $b \in \,]0,1[$ et donne FACE avec une probabilité $1 - b$.
Ils décident de jouer au jeu suivant : chacun lance sa pièce. S'ils obtiennent tous les deux PILE ou tous les deux FACE, ils relancent chacun leur pièce et continuent ainsi tant qu'ils obtiennent simultanément PILE ou simultanément FACE. *A contrario*, ils s'arrêtent dès que l'un obtient PILE et l'autre FACE. Celui qui obtient PILE est alors déclaré gagnant. Tous les lancers sont indépendants.
Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n l'événement « Ambre gagne lors du $n^{\text{ème}}$ lancer », B_n l'événement « Benjamin gagne lors du $n^{\text{ème}}$ lancer » et C_n l'événement « chacun des deux joueurs lance au moins n fois sa pièce lors de ce jeu ».

1. **a.** On pose $\lambda = 1 - a - b + 2ab$. Démontrer que $P(C_2) = \lambda$.
b. Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(C_n)$. En déduire une expression de $P(C_n)$ en fonction de n.

2. Soit $n \geq 1$ un entier.
a. Exprimer $P(A_n)$ en fonction de a, b et $P(C_n)$.
b. En déduire une expression de $P(A_n)$ en fonction de a, b et n.
c. Donner une expression de $P(B_n)$ en fonction de a, b et n.

3. On note G_A l'événement « Ambre est gagnante » et G_B l'événement « Benjamin est gagnant ».
a. Démontrer que $0 < \lambda < 1$.
b. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $P(G_A) \geq a(1-b) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$ et $P(G_B) \geq b(1-a) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$.
c. On note $G_\emptyset$ l'événement « ce jeu n'a aucun gagnant ». Déduire de ce qui précède que :

$$P(G_A) = \frac{a(1-b)}{1-\lambda}, P(G_B) = \frac{b(1-a)}{1-\lambda} \text{ et } P(G_\emptyset) = 0.$$

1. **a.** Au premier lancer, il y a quatre résultats possibles qui peuvent être décrits par les couples constitués, dans cet ordre, par les résultats d'Ambre et de Benjamin $(P,P), (P,F), (F,P), (F,F)$.
Alors $P(A_1) = P\big((P,F)\big) = a(1-b), P(B_1) = P\big((F,P)\big) = b(1-a)$
Et, comme l'événement C_2 correspond aussi à « le jeu continue au-delà du 1[er] lancer »,
$P(C_2) = P\big((P,P)\big) + P\big((F,F)\big) = ab + (1-a)(1-b) = 1 - a - b + 2ab = \lambda$.
Comme tous les lancers sont indépendants, le nombre λ est aussi la probabilité, sachant qu'il y a un $n^{\grave{e}me}$ lancer, que le jeu continue soit $P_{C_n}(C) = \lambda$ si on note C l'événement « le jeu continue ».
b. Pour tout entier $n \geq 1$ et d 'après la question précédente,
$P(C_{n+1}) = P(C_{n+1} \cap C_n) = P_{C_n}(C) \times P(C_n) = \lambda\, P(C_n)$.
La suite de terme général $P(C_n)$ est donc une suite géométrique de raison λ et de premier terme $P(C_1) = 1$.
On a donc, pour tout entier $n \geq 1$, $P(C_n) = \lambda^{n-1}$.

2. On a de même $P(A_n) = P(A_n \cap C_n) = P_{C_n}(A_n) \times \ P(C_n) = a(1-b)\lambda^{n-1}$
Et $P(B_n) = P(B_n \cap C_n) = P_{C_n}(B_n) \times \ P(C_n) = b(1-a)\lambda^{n-1}$.

3. **a.** $\lambda = \ ab + (1-a)(1-b)$. Comme $a \in \,]0,1[$ et $b \in \,]0,1[$, on en déduit que $\lambda > 0$.
D'autre part, $\lambda = 1 - \mathrm{P}(\overline{C_2}) = 1 - \big(P(A_1) + P(B_1)\big) = 1 - (a(1-b) + b(1-a))$. Comme $a \in \,]0,1[$ et $b \in \,]0,1[$, on en déduit que $\lambda < 1$.
b. Pour tout entier $n \geq 1$, L'événement G_A contient tous les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$, événements deux à deux disjoints, donc $P(G_A) \geq \ P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$ soit $P(G_A) \geq \ a(1-b)(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-1})$
C'est-à-dire $P(G_A) \geq \ a(1-b) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$.
On démontre de même que $P(G_B) \geq b(1-a) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$.
c, Comme $0 < \lambda < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} a(1-b) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} = \frac{a(1-b)}{1-\lambda}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b(1-a) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} = \frac{b(1-a)}{1-\lambda}$.
Comme pour tout entier n, $P(G_A) \geq \ a(1-b) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$, $P(G_A) \geq \lim\limits_{n\to\infty} a(1-b) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$ soit $P(G_A) \geq \frac{a(1-b)}{1-\lambda}$. De même $P(G_B) \geq \frac{b(1-a)}{1-\lambda}$.

D'autre part, G_A est inclus dans la réunion infinie de tous les A_i car si Ambre gagne, l'un exactement des A_i est réalisé. Sa probabilité est donc inférieure ou égale à la limite calculée précédemment. Donc $P(G_A) = \frac{a(1-b)}{1-\lambda}$.
De même, $P(G_B) = \frac{b(1-a)}{1-\lambda}$.
$G_\emptyset$ est l'événement complémentaire de $G_A \cup G_B$. Donc $P(G_\emptyset) = 1 - P(G_A \cup G_B)$.
Or G_A et G_B sont disjoints donc $P(G_\emptyset) = 1 - \left(\frac{a(1-b)}{1-\lambda} + \frac{b(1-a)}{1-\lambda}\right) = 1 - \frac{a+b-2a}{1-\lambda} = 1 - \frac{1-\lambda}{1-\lambda} = 0$.