ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Inria
INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

Versailles
Lycée Marie Curie
Pontoise
Lycée Camille Pissarro

« Plus je passais de temps à faire des maths, plus j'étais heureuse »

En août 2014, Maryam Mirzakhani reçoit la *médaille Fields* décernée par le Congrès international des mathématiciens. Première femme à obtenir cette distinction qui avait honoré jusque-là une soixantaine de mathématiciens.

Née en 1977 à Téhéran, elle aurait été attirée vers les mathématiques par l'histoire du calcul de la somme des 100 premiers entiers par le petit Gauss. Suivant un parcours scolaire renforcé, elle obtient deux médailles d'or à l'Olympiade internationale de mathématiques. Elle poursuit ses études aux États-Unis, où sa thèse présentée à Harvard est qualifiée de chef d'œuvre : « La plupart des mathématiciens ne produiront jamais quelque chose d'aussi bon, et elle l'a fait dès sa thèse ». Ses travaux portent sur les *surfaces de Riemann* et, plus tard, sur les *billards mathématiques*.

Victime d'un cancer, Maryam Mirzakhani décède à quarante ans, laissant une orpheline. Plusieurs journaux iraniens brisent le tabou en publiant sa photo tête nue.

Stage ouvert aux lycéennes et lycéens de terminale candidat(e)s au Concours général , les 12 et 13 février 2024

La Pépinière académique de mathématique organise depuis 2006, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

En son honneur, les médias iraniens brisent le tabou

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le siège INRIA de Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet d'Antony, le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée Hoche de Versailles, le lycée Marie Curie de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui accueillera au troisième trimestre des lycéennes et lycéens pour une visite et des conférences.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. **Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.**

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIERE, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Nathalie SOARES, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF,

Les intervenants professeurs : Michel ABADIE (Lycée Galilée, GENNEVILLIERS), Richard CROUAU (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Maximilien DENIS (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Sacha DHENIN (Lycée Franco-allemand, BUC), Thomas DUMAS (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Laurent GRIERE (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Catherine HOUARD (retraitée), Delphine LEROY (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christian MARGUERITE (Lycée Gaspard Monge, SAVIGNY SUR ORGE), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE, Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), François REGUS (Lycée Viollet le Duc, VILLIERS SAINT FREDERIC), Martine SALMON (Retraitée)

… Et les professeurs accompagnant leurs élèves : Nadia BOUANANE (lycée Pierre Corneille, LA CELLE SAINT CLOUD), Sahah CHIKHI (lycée Saint-Exupéry, MANTES LA JOLIE), Gwenaëlle POTHIER (lycée Rosa Parks, Montgeron), Delphine TURBOULT (lycée Alain, LE VÉSINET).

Emploi du temps

Lundi 12 février 2024

	Groupe 1 Vers	Groupe 2 Vers	Groupe 3 Vers	Pontoise
10 heures	Accueil			
10 h 10	Arithmétique	Suites numériques	Dénombrement Probabilités	Arithmétique
12 h 10	Repas			12 h 15
13 heures	Géométrie Nombres complexes	Fonctions, équations, inéquations	Arithmétique	13 h 15 Suites numériques
15 h 15	Film « Secrets of the surface »			15 h 15 Dénombrements Probabilités
16 h 20	Exposé Paradoxes			

Mardi 13 février 2024

	Groupe 1 Vers	Groupe 2 Vers	Groupe 3 Vers	Pontoise
10 heures	Suites numériques	Dénombrement Probabilités	Géométrie Nombres complexes	Géométrie Nombres complexes
12 heures	Repas			
12 h 50	Fonctions, équations, inéquations	Arithmétique	Suites numériques	Fonctions, équations, inéquations
15 heures	Dénombrement, Probabilités	Géométrie, Nombres complexes	Fonctions, équations, inéquations	14 h 50 Film Secrets of the surface Exposé Paradoxes

Arithmétique

Exercice 1 – OIM 1992

Déterminer tous les entiers a, b et c tels que $1 < a < b < c$ et $(a-1)(b-1)(c-1)$ est un diviseur de $abc - 1$.

On pose $m = a - 1, n = b - 1, p = c - 1$.
Alors $abc = (m+1)(n+1)(p+1) = mnp + mn + np + pm + m + n + p + 1$
Et le problème posé revient à déterminer les entiers m, n, p tels que $0 < m < n < p$ et, puisque mnp divise mnp, mnp divise $mn + np + pm + m + n + p$ c'est-à-dire il existe un entier naturel non nul k tel que $mn + np + pm + m + n + p = kmnp$.
Montrons déjà que $k \in \{1,2\}$.
Soit, pour x, y, z strictement positifs, $k(x,y,z) = \frac{xy+yz+zx+x+y+z}{xyz} = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy}$. Si on fixe y et z, la fonction f qui à tout réel strictement positif x associe le réel $f(x) = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz}$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{y}\right)$ qui est un nombre strictement négatif. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et on obtiendrait de même une fonction décroissante sur $]0, +\infty[$ en fixant x et y ou x et z.
On en déduit, puisqu'on doit avoir $0 < m < n < p$ que $k(m,n,p) \leq k(1,2,3)$.
Or $k(1,2,3) = \frac{17}{6}$ et $\frac{17}{6} < 3$ donc $k(m,n,p) \in \{1,2\}$.
Montrons maintenant que $m \in \{1,2\}$: $k(3,4,5) = \frac{59}{60}$ et $\frac{59}{60} < 1$ donc $m \in \{1,2\}$ puisqu'on veut obtenir un entier strictement positif.
Si $m = 1$ et $k = 1$, alors l'équation $mn + np + pm + m + n + p = kmnp$ s'écrit $n + np + p + 1 + n + p = np$ soit $2(n+p) + 1 = 0$. Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbf{N}^*$.
Si $m = 1$ et $k = 2$, alors l'équation $mn + np + pm + m + n + p = kmnp$ s'écrit $n + np + p + 1 + n + p = 2np$ soit $np - 2n - 2p - 1 = 0$ soit $(n-2)(p-2) = 5$. Comme $0 < n < p$, la seule solution est $n - 2 = 1$ et $p - 2 = 5$ soit $n = 3$ et $p = 7$.
Si $m = 2$, comme, $k(2,3,4) = \frac{35}{24}$ et $\frac{35}{24} < 2$, $k = 1$ et l'équation $mn + np + pm + m + n + p = kmnp$ s'écrit de même $(n-3)(p-3) = 11$ et la seule solution est $n - 3 = 1$ et $p - 3 = 11$ soit $n = 4$ et $p = 14$.
Au final les solutions sont $(a,b,c) = (2,4,8)$ et $(a,b,c) = (3,5,15)$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul et différent de 1 et $d_1, d_2, \ldots, d_k$ ses diviseurs positifs ($d_1 < d_2 < \cdots < d_k$).
On note $s = d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$.
Montrer que $s < n^2$ et déterminer les valeurs de n pour lesquelles s divise n^2.

Quelques remarques préliminaires :

- $d_1 = 1$ et $d_k = n$.
- d_2 est le plus petit nombre premier diviseur de n et $d_{k-1} = \frac{n}{d_2}$.
- Si d est un diviseur de n, alors $\frac{n}{d}$ est un diviseur de n.
- Pour tout $1 \leq j \leq k$, $d_j = \frac{n}{d_{k+1-j}}$

On peut ainsi écrire :

$$s = \sum_{i=1}^{i=k-1} d_i d_{i+1} = \sum_{i=1}^{i=k-1} \frac{n}{d_i} \times \frac{n}{d_{i+1}} = n^2 \sum_{i=1}^{i=k-1} \frac{1}{d_i d_{i+1}}$$

Or, pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}} = \frac{d_{i+1} - d_i}{d_i d_{i+1}}$. Comme les d_i sont des entiers strictement positifs distincts et rangés dans l'ordre croissant, $d_{i+1} - d_i \geq 1$ donc $s \leq n^2 \sum_{i=1}^{i=k-1} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}}\right) < \frac{n^2}{d_1}$ puisque

$$\sum_{i=1}^{i=k-1}\left(\frac{1}{d_i}-\frac{1}{d_{i+1}}\right)=\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_k}$$

Au final, puisque $d_1 = 1, s < n^2$.
Si n est premier, alors $k = 2, n = d_2$ et $s = 1 \times d_2 = n$ donc s divise n^2.
Si n n'est pas premier, alors $k > 2, s > d_{k-1}d_k$. Or $d_{k-1} = \frac{n}{d_2}$ et $d_k = n$ donc $d_{k-1}d_k = \frac{n^2}{d_2}$ et $s > \frac{n^2}{d_2}$ soit, puisque tous les nombres sont strictement positifs, $d_2 > \frac{n^2}{s}$. Si s divise n^2, alors $\frac{n^2}{s}$ divise aussi n^2 et on en déduit que $1 < \frac{n^2}{s} < d_2$.
Ceci est impossible puisque d_2 est le plus petit nombre premier diviseur de n donc le plus petit nombre premier diviseur de n^2.
Au final, s divise n^2 si et seulement si n est un nombre premier.

Exercice 3 – Division euclidienne

Déterminer, pour tout entier naturel non nul n, le reste de la division euclidienne par $n+2$ de l'entier :

$$N = 2(1^{2\,023} + 2^{2\,023} + \dots + n^{2\,023})\ .$$

Montrons déjà que si k est un entier impair et a et b deux entiers naturels non nuls quelconques, alors $a^k + b^k$ est un multiple de $a + b$.
Comme k est impair, il existe un entier p tel que $k = 2p+1$ et $a^k + b^k = a^{2p+1} + b^{2p+1} = a^{2p+1} - (-b)^{2p+1}$.
Or, pour tous réels x, y et tout entier m, $x^m - y^m = (x-y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \dots + xy^{m-2} + y^{m-1})$.
On applique cette propriété à $x = a$, $y = -b$ et $m = 2p+1 = k$ pour pouvoir affirmer que$a^k + b^k$ est un multiple de $a + b$.
On peut alors écrire
$N = 2(1^{2\,023} + 2^{2\,023} + \dots + n^{2\,023}) = 2 + (2^{2\,023} + n^{2\,023}) + (3^{2\,023} + (n-1)^{2\,023}) + \dots + (2^{2\,023} + n^{2\,023})$
Chaque somme entre parenthèses s'écrit $a^k + b^k$ où $a + b = n + 2$ et est donc un multiple de $n + 2$.
On en déduit qu'il existe un entier m tel que $N = (n+2)m + 2$ et donc, , comme $n + 2 > 2$, le reste de la division euclidienne de $A.N$ par $n + 2$ est 2.

Exercice 4 – Tiré du concours général 2020

Soit n un entier naturel non nul. On dit que n est *pointu* lorsque n admet *au plus* un diviseur premier ou bien, en notant p et q les deux plus grands diviseurs premiers de n, tels que $p > q$, l'inégalité $p \geq 2q$ est vérifiée.
Par exemple 1 est pointu car il n'admet aucun diviseur premier ; 25 est pointu car il admet un unique diviseur premier (qui est 5) et 147 est pointu car $147 = 3 \times 7^2$ et $7 \geq 2 \times 3$.
En revanche, 105 n'est pas premier car $105 = 3 \times 5 \times 7$ et $7 < 2 \times 5$.

A. <u>Quelques exemples</u>

1. Le nombre 2 020 est-il pointu ?
2. Quel est le plus petit entier naturel non nul qui ne soit pas pointu ?
3. Quel est le plus petit nombre pointu possédant au moins quatre diviseurs premiers distincts ?
4. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres pointus.
5. Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels non nuls qui ne sont pas pointus.
6. Établir la liste des nombres pointus entre 1 et 20 inclus. Quelle est la longueur maximale d'une suite de nombres pointus consécutifs entre 1 et 20 ?

B. <u>Peu de grands nombres premiers</u>

On rappelle que si k et n sont deux entiers naturels tels que $k \leq n$, $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$ et $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1. En considérant le nombre de parties d'un ensemble possédant n éléments, démontrer que pour tous entiers naturels n et k tels que $\leq n$, $\binom{n}{k} \leq 2^n$.

2. Pour tout entier naturel n, on note P_n l'ensemble des nombres premiers p tels que $n+1 \leq p \leq 2n$ et on note π_n le nombre d'éléments de P_n.

a. Démontrer que, pour tout nombre premier p appartenant à l'ensemble P_n, l'entier $\binom{2n}{n}$ est divisible par p.

b. Démontrer que, si a, b, c sont des entiers naturels non nuls tels que b et c sont premiers entre eux et divisent a, alors bc divise aussi a.

c. Soit d le produit de tous les éléments de P_n. Démontrer que $\binom{2n}{n}$ est divisible par d.

d. En déduire que $n^{\pi_n} \leq 2^{2n}$.

A. Quelques exemples

1. $2\,020 = 2^2 \times 5 \times 101$ et $101 > 2 \times 5$ donc le nombre 2 020 est pointu.

2. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5 sont pointus car ils ont au plus un diviseur premier. En revanche 6 a exactement deux diviseurs premiers 2 et 3 et $3 < 2 \times 2$. 6 n'est donc pas pointu et c'est le plus petit entier naturel non pointu.

3. Le plus petit entier pointu admettant au moins quatre facteurs premiers est $n = 2 \times 3 \times 5 \times p$ où p est le plus petit nombre premier supérieur au double de 5, soit 11. On obtient $n = 330$.

4. Comme tout nombre premier est pointu (au plus un diviseur premier) et qu'il y a une infinité de nombres premiers, il y a aussi une infinité de nombres pointus.

5. Comme pour 6, tout nombre s'écrivant $n = 2^p \times 3$, où p est un entier strictement positif, est pointu car $3 < 2 \times 2$).

6. On peut rassembler l'étude des 20 premiers entiers dans le tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Décomposition	1	2	3	2^2	5	2×3	7	2^3	3^2	2×5
Pointu	oui	oui	oui	oui	oui	non	oui	oui	oui	oui

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Décomposition	11	$2^2 \times 3$	13	2×7	3×5	2^4	17	2×3^2	19	$2^2 \times 5$
Pointu	oui	non	oui	oui	non	oui	oui	non	oui	oui

On constate deux suites de longueur 5 constituées de nombres pointus consécutifs compris entre 1 et 20.

B. Peu de grands nombres premiers

1. Le nombre de parties d'un ensemble E possédant n élément(s) est 2^n ; $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E possédant k élément(s) : ainsi $2^n \geq \binom{n}{k}$.

2.*a.* Soit p un nombre premier tel que $n + 1 \leq p \leq 2n$.

Comme $p \leq 2n$, p est un diviseur de $(2n)!$ et comme $n + 1 \leq p$ et p est un nombre premier donc premier avec tous les entiers qui lui sont strictement inférieurs, p est premier avec $n!$ et donc avec $(n!)^2$.

Or $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ soit $(2n)! = (n!)^2 \times \binom{2n}{n}$. D'après le théorème de Gauss, comme p divise $(2n)!$ mais est premier avec $(n!)^2$, p divise $\binom{2n}{n}$.

b. Soit a, b, c des entiers naturels non nuls tels que b et c sont premiers entre eux et divisent a. Il existe donc un entier k et un entier l tels que $a = bk$ et $a = cl$. On a donc $bk = cl$ et c divise bk tout en étant premier avec b. D'après le théorème de Gauss, c divise k c'est-à-dire, il existe un entier m tel que $k = cm$. Alors $a = bcm$ et bc divise a.

c. En appliquant plusieurs fois le résultat de la question précédente, à tous les nombres premiers p dans l'ensemble P_n, qui sont premiers entre eux et divisent chacun $\binom{2n}{n}$, leur produit d divise aussi $\binom{2n}{n}$.

d. Comme π_n le nombre d'éléments de P_n, l'entier d est le produit de π_n nombres premiers distincts tous supérieurs ou égaux à n, $d \geq n^{\pi_n}$. D'autre part, d divise aussi $\binom{2n}{n}$ donc $d \leq \binom{2n}{n}$. Or, d'après la question **3.**, $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$ donc $n^{\pi_n} \leq 2^{2n}$.

Exercice 5 – Extrait du concours général 2016

On note :

S, l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers strictement positifs deux à deux distincts ;

S_0, l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers pairs strictement positifs deux à deux distincts ;

S_1, l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers impairs strictement positifs deux à deux distincts.

Par exemple $8 = 2^3$ et $190 = 1^3 + 4^3 + 5^3$ donc 8 et 190 sont dans S, $216 = 6^3$ et $1\,072 = 2^3 + 4^3 + 10^3$ donc 216 et 1 072 sont dans S_0, $125 = 5^3$ et $2\,568 = 1^3 + 3^3 + 7^3 + 13^3$ donc 125 et 2 568 sont dans S_1.

L'objectif du problème est de démontrer que tout entier suffisamment grand appartient à S.

1. Montrer que 2 016 appartient à S_0.
2. ***a.*** Montrer que pour tout réel $x \geq 5$, $(2x+1)^3 \leq 2(2x-1)^3$.

   b. Soit k un entier supérieur ou égal à 5. Montrer que, pour tout entier $p \geq k$,
$$(2p+1)^3 \leq (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p}(2j-1)^3.$$

On rappelle que si t, u et v sont des entiers, la notation $t \equiv u\ [v]$ signifie que v divise $t - u$.

3. Montrer qu'il existe 288 entiers $s_1, s_2, \dots, s_{288}$ appartenant à S_1 tels que, pour tout i dans $\{1, 2, \dots, 288\}$, $s_i \equiv i\ [288]$ et on note m le plus grand des entiers s_i.
4. Soit n un entier tel que $288n \geq m$ et soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ des entiers naturels en progression arithmétique de raison 288. Montrer que tout entier naturel appartenant à $[m + u_1, 288n + u_1]$, il existe un entier $1 \leq i \leq 288$ et un entier $1 \leq j \leq n$ tels que cet entier soit égal à $s_i + u_j$.
5. On admet que, pour tout réel x,
$$(2x+12)^3 + (2x+4)^3 + (2x+2)^3 - (2x+10)^3 - (2x+8)^3 - (2x)^3 = 288. \qquad (*)$$
   a. Montrer qu'il existe un entier u tel que $u, u+288, u+576$ appartiennent à S_0.

   b. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe n éléments dans S_0 en progression arithmétique de raison 288.
6. Soit k un entier supérieur ou égal à 5 tel que $(2k+1)^3 > m$.

   a. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout entier appartenant à $[N, N + 2(2k-1)^3]$, il existe un entier $1 \leq i \leq 288$ et un entier $u \in S_0$ tels que cet entier soit égal à $s_i + u$.

   b. Montrer que tout entier supérieur ou égal à N appartient à S.
   (pour tout entier $p \geq k$, on pourra examiner le cas des entiers de l'intervalle $[N, N_p]$ où $N_p = N + (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p}(2j-1)^3$.

1. $12^3 = 1\,728$ donc les cubes inférieurs à 2 016 sont ceux inférieurs à 12^3.
   De plus, $2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + 10^3 < 2\,016$, une decomposition possible de 2 016 dans S_0 doit comporter 12^3.
   Elle ne comporter en plus ni 10^3 ni 8^3 car $8^3 + 12^3 > 2\,016$.
   On trouve alors $2\,016 = 12^3 + 6^3 + 4^3 + 2^3$.
2. ***a.*** Comme $\frac{2x+1}{2x-1} = 1 + \frac{2}{2x-1}$, on démontre, en la dérivant, que la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{2x-1}$ est strictement croissante sur $[5, +\infty[$,
   $f(x) \leq f(5)$ soit $\frac{2x+1}{2x-1} \leq \frac{11}{9}$ et comme la fonction cube est croissante sur **R**, $\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^3 \leq \left(\frac{11}{9}\right)^3 \leq 2$. On a donc bien, puisque les nombres considérés sont positifs, pour tout réel $x \geq 5$, $(2x+1)^3 \leq 2(2x-1)^3$.

   b. Par récurrence sur $p \geq k$:
   <u>Initialisation :</u> pour $p = k$, $(2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p}(2j-1)^3 = (2k-1)^3 + (2k-1)^3 = 2(2k-1)^3$.
   Or, d'après la question précédente, on a bien $(2k+1)^3 \leq 2(2k-1)^3$.
   <u>Hérédité :</u> soit $p \geq k$ tel que $(2p+1)^3 \leq (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p}(2j-1)^3$. (*)
   D'après le a., $(2(p+1)+1)^3 \leq 2(2(p+1)-1)^3$ soit $(2(p+1)+1)^3 \leq (2p+1)^3 + (2(p+1)-1)^3$.

Donc, d'après (*), $(2(p+1)+1)^3 \leq (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p}(2j-1)^3 + (2(p+1)-1)^3$

Soit $(2(p+1)+1)^3 \leq (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p+1}(2j-1)^3$ et l'inégalité est encore vraie au rang $p+1$.

On a donc bien, pour tout entier $p \geq k$, $(2p+1)^3 \leq (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^{p}(2j-1)^3$.

3. Pour tout entier naturel k, $(288k+1)^3$ est le cube d'un entier impair. On a donc $(288k+1)^3 \equiv 1\ [288]$.

Soit $s_i = \sum_{j=1}^{i}(288j+1)^3$ sont alors des éléments de S_1 tels que, pour tout $i \in \{1,2,\dots,288\}$, $s_i \equiv i\ [288]$.

4. Soit q un entier dans $[m+u_1, 288n+u_1]$. La division euclidienne de $q-u_1$ par 288 permet d'affirmer qu'il existe un entier $1 \leq i < 288$ tel que $q-u_1 \equiv i\ [288]$ c'est-à-dire $q-u_1 \equiv s_i\ [288]$, égalité qui signifie qu'il existe un entier j tel que $q-u_1 = s_i + 288j$.

Comme $q-u_1 \geq m \geq s_i$ (car m est le plus grand des s_i), $j \geq 0$.

Comme $288j = q-u_1-s_i$ et $s_i > 0$, $288j < q-u_1 \leq 288n$ donc $j < n$.

Au final, il existe un entier $1 \leq i \leq 288$ et un entier $1 \leq j < n$ tels que $q = s_i + u_j = u_1 + s_i + 288j$, ce qui s'écrit aussi $q = s_i + u_1 + 288j = s_i + u_{j+1}$ où $1 \leq i \leq 288$ et $1 \leq j+1 \leq n$, ce qui était demandé.

5. ***a.*** Pour tout pour tout réel x, on a la relation (*)

$(2x+12)^3 + (2x+4)^3 + (2x+2)^3 = (2x+10)^3 + (2x+8)^3 + (2x)^3 + 288$, on cherche à appliquer deux fois cette égalité pour construire les nombres $u, u+288$ et $u+576$ en remplaçant x par différentes valeurs pour obtenir des sommes de cubes d'entiers pairs **tous distincts**. En prenant $x = 1$ puis $x = 8$, on pose

$u = (12^3+10^3+2^3) + (26^3+24^3+16^3)$. L'entier u appartient bien à S_0

Et, d'après (*) appliqué à $x = 1$, $u + 288 = (14^3+6^3+4^3) + (26^2+24^3+16^3)$, entier appartenant bien à S_0.

Toujours d'après (*) appliqué à $x = 8$, $u+576 = (14^3+6^3+4^3) + (28^3+20^3+18^3)$, qui appartient bien à S_0.

b. On raisonne par récurrence sur $n \geq 2$.

Initialisation : les nombres u et , $u+288$ de la question précédente prouve que l'affirmation est vraie pour $n = 2$.

Hérédité : s'il existe n éléments $u_1, u_2, \dots, u_n$ dans S_0 en progression arithmétique de raison 288.

On généralise la démarche adoptée dans le a. Si x est un entier tel que les entiers $2x, 2x+2, 2x+4, 2x+8, 2x+10, 2x+12$ n'interviennent dans aucun des nombres $u_1, u_2, \dots, u_n$, alors $u_1 + (2x+10)^3 + (2x+8)^3 + (2x)^3$, $u_2 + (2x+10)^3 + (2x+8)^3 + (2x)^3$, ..., $u_n + (2x+10)^3 + (2x+8)^3 + (2x)^3$ et $u_n + (2x+10)^3 + (2x+8)^3 + (2x)^3 + 288$ sont en progression arithmétique de raison 288 et dans S_0.

On en déduit que, pour tout $n \geq 2$, pour tout entier $n \geq 2$, il existe n éléments dans S_0 en progression arithmétique de raison 288.

6. Soit k un entier supérieur ou égal à 5 tel que $(2k+1)^3 > m$.

a. Soit n un entier tel que $288n \geq 2(2k-1)^3 + m$.

D'après le **5b.**, il existe n éléments $u_1, u_2, \dots, u_n$ dans S_0 en progression arithmétique de raison 288.

D'après la question **4.**, pour tout entier naturel appartenant à $[m+u_1, 288n+u_1]$, il existe un entier $1 \leq i \leq 288$ et un entier $1 \leq j \leq n$ tels que cet entier soit égal à $s_i + u_j$.

Si on pose alors $N = m + u_1$, comme $288n \geq 2(2k-1)^3 + m$, $288n + u_1 \geq 2(2k-1)^3 + m + u_1$

d'où $288n + u_1 \geq N + 2(2k-1)^3$ et pour tout entier appartenant à $[N, N+2(2k-1)^3]$, il existe un entier $1 \leq i \leq 288$ et un entier $u \in S_0$ tels que cet entier soit égal à $s_i + u$.

b. Pour tout entier $p > k$, $N_p = N_{p-1} + (2p-1)^3$ et si n est un entier dans l'intervalle $[N_{p-1}, N_p]$, alors l'entier $n' = n - \sum_{j=k}^{p-1}(2j-1)^3$ appartient à l'intervalle $[N+(2k-1)^3, N+(2k-1)^3+(2p-1)^3\ ]$.

Or d'après le 1a. et comme $p > k$, $(2k-1)^3 + (2p-1)^3 \leq 2(2p-1)^3$ donc $n' \in [N, N+2(2k-1)^3]$.

D'après la question précédente, comme $(2p+1)^3 > (2k+1)^3 > m$, il existe un entier $1 \leq i \leq 288$ et un entier $u \in S_0$ tels que $n' = s_i + u$. Ainsi $n = \sum_{j=k}^{p-1}(2j-1)^3 + s_i + u = s + u$

Or pour tout $k \leq j < p$, les entiers $(2j-1)^3$ sont des cubes d'entiers impairs distincts deux à deux et distincts des s_i car si $k \leq j < p$, $(2j-1)^3 \geq (2k-1)^3 > m$ et m est le plus grand des s_i. Donc $u \in S_0$ et $s \in S_1$.

Si n est un entier supérieur à N, comme $N_p \geq (2p-1)^3$, N_p tend vers $+\infty$ quand p tend vers $+\infty$ donc il existe un plus petit entier $p \geq k$ tel que $N_p \geq n$. Si $k = p$, d'après la question précédente, $n \in S$. Sinon, $N_{p-1} < n$ et donc $n \in [N_{p-1}, N_p]$, d'où, d'après ce qui précède, $n \in S$.

Conclusion : tout entier supérieur ou égal à N appartient donc bien à S.

Suites numériques

Exercice 1 – Multiples cachés de 2^n

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 2$, $u_2 = 500$, $u_3 = 2\,000$ et, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\frac{u_{n+2}+u_{n+1}}{u_{n+1}+u_{n-1}} = \frac{u_{n+1}}{u_{n-1}}$.
Montrer que pour tout entier naturel non nul n, u_n est un multiple de 2^n.

$\frac{u_{n+2}+u_{n+1}}{u_{n+1}+u_{n-1}} = \frac{u_{n+1}}{u_{n-1}}$ s'écrit aussi $(u_{n+2} + u_{n+1})u_{n-1} = (u_{n+1} + u_{n-1})u_{n+1}$
Soit $u_{n+2}u_{n-1} + u_{n+1}u_{n-1} = (u_{n+1})^2 + u_{n-1}u_{n+1}$ soit $u_{n+2}u_{n-1} = (u_{n+1})^2$ (*)
Les trois premiers termes de la suite (u_n) sont non nuls. Grâce à l'égalité (*) obtenue ci-dessus, on démontre par récurrence, pour tout $n \geq 1$, $u_n \neq 0$.
L'égalité (*) s'écrit donc aussi $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_{n-1}}$ soit encore $\frac{u_{n+2}}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n u_{n-1}}$.
De proche en proche $\frac{u_{n+2}}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n u_{n-1}} = \cdots = \frac{u_3}{u_1 u_2} = \frac{2\,000}{2\times 500} = 2$.
On a donc, pour tout $n \geq 2$, $u_{n+2} = 2u_n u_{n+1}$, ce qui permet d'affirmer déjà que u_n est un entier.
De plus $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = 2u_n$ donc $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$ est un nombre pair et comme $u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \ldots \times \frac{u_2}{u_1} \times u_1$ donc u_n est le produit de n nombres pairs donc un multiple de 2^n.

Exercice 2 – Suite s'annulant

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = a$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$.
Déterminer le nombre de valeurs distinctes de a telles que $u_{2\,024} = 0$.

Si $a < 0$, alors $u_1 < 0$ et si, pour un entier n, $u_n < 0$ alors $1 - u_n > 0$ donc $u_{n+1} < 0$. Ce raisonnement par récurrence prouve que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n < 0$ et qu'on ne peut avoir $u_n = 0$.
Si $a > 1$, alors $u_1 \neq 0$ et comme $u_2 = 4a(1 - a)$ où $4a > 0$ et $1 - a < 0$, on a $u_2 < 0$. Le raisonnement par récurrence précédent s'applique à nouveau mais à partir du rang 2 et on peut à nouveau affirmer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n \neq 0$.
Si $0 \leq a \leq 1$, alors il existe un réel $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $a = (\sin b)^2 = \sin^2 b$. Montrons qu'alors, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \sin^2(2^{n-1}b)$.
<u>Initialisation</u> : cette égalité est vraie au rang 1 car $u_1 = a = \sin^2 b$.
<u>Hérédité</u> : si, pour un entier n, $u_n = \sin^2(2^{n-1}b)$ alors $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n) = 4\sin^2(2^{n-1}b) \times (1 - \sin^2(2^{n-1}b))$ soit $u_{n+1} = 4\sin^2(2^{n-1}b) \times \cos^2(2^{n-1}b) = (2\sin(2^{n-1}b)\cos(2^{n-1}b))^2 = \sin^2(2^n b)$ et l'égalité est encore vraie au rang $n + 1$.
On a donc bien, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \sin^2(2^{n-1}b)$.
Alors $u_{2\,024} = 0$ si seulement s'il existe un entier k tel que $2^{2\,023}b = k\pi$ soit $b = \frac{k\pi}{2^{2\,023}}$.
Comme $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq k \leq 2^{2\,022}$. Comme, de plus, la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, il y a exactement $2^{2\,022} + 1$ valeurs de b et donc de a telles que $u_{2\,024} = 0$.

Exercice 3 – Approximation de $\sqrt{2}$

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 10^9$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2+2}{2u_n}$.
Montrer que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$ et que $0 < u_{23} - \sqrt{2} < 10^{-13}$.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$.

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-2}{2x^2}$. On en déduit que f est strictement croissante sur $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$. De plus $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$.

Montrons alors par récurrence que, pour tout entier $n\geq 1$, $u_n\geq u_{n+1}\geq\sqrt{2}$.

Initialisation : $u_1=10^5$ et $u_2=\frac{10^9}{2}+\frac{1}{10^9}$ et $u_1>u_2>\frac{10^9}{2}>\sqrt{2}$.

Hérédité : si, pour un entier $n\geq 1$, $u_n>u_{n+1}>\sqrt{2}$

alors, comme f est croissante sur $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$, $f(u_n)>f(u_{n+1})>f(\sqrt{2})$ soit $u_{n+1}>u_{n+2}>\sqrt{2}$ et l'encadrement est encore vrai au rang $n+1$.

Donc, pour tout entier $n\geq 1$, $u_n>u_{n+1}>\sqrt{2}$.

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par $\sqrt{2}$ donc convergente.

De plus, comme la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ et, pour tout entier $n\geq 1$, $u_{n+1}=f(u_n)$, la limite l de la suite est solution de $f(l)=l$. Or $f(l)=l$ équivaut à $l^2=2$. Comme la suite (u_n)est minorée par $\sqrt{2}$, $l=\sqrt{2}$.

Soit, pour tout entier $n\geq 1$, $v_n=u_n-\sqrt{2}$.

$v_{n+1}=u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{u_n^2+2}{2u_n}-\sqrt{2}=\frac{\left(v_n+\sqrt{2}\right)^2+2-2\sqrt{2}\left(v_n+\sqrt{2}\right)}{2\left(v_n+\sqrt{2}\right)}=\frac{v_n^2}{2\left(v_n+\sqrt{2}\right)}$.

Comme tous les termes de la suite (v_n) sont strictement positifs, on a $0<v_{n+1}<\frac{v_n}{2}$ (*) et $0<v_{n+1}<\frac{v_n^2}{2\sqrt{2}}$ (**).

On déduit déjà de (*), par récurrence, que pour tout entier $n\geq 1$, $0<v_n<\frac{v_1}{2^{n-1}}$ soit $0<v_n<\frac{10^5}{2^{n-1}}$

soit $0<v_n<\frac{5^5}{2^{n-6}}$.

Or pour tout entier $n\geq 18$, $2^{n-6}\geq 2^{12}\geq 5^5$ et donc $0<v_n<1$. En particulier $0<v_{18}<1$.

De (**), on déduit successivement que $0<v_{19}<\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $0<v_{20}<\frac{1}{16\sqrt{2}}$, $0<v_{21}<\frac{1}{2^{10}\sqrt{2}}$, $0<v_{22}<\frac{1}{2^{22}\sqrt{2}}$ et $0<v_{23}<\frac{1}{2^{46}\sqrt{2}}<10^{-13}$ c'est-à-dire $0<u_{23}-\sqrt{2}<10^{-13}$

Exercice 4 – Sommes et inégalités

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbf{N}^*$ et telle que, pour tous entiers non nuls i et j, $u_{i+j}\leq u_i+u_j$.

Montrer que, pour tout entier naturel $n\geq 1$, $u_n\leq\frac{u_1}{1}+\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}+\cdots+\frac{u_n}{n}$. (*)

On effectue un raisonnement par récurrence.

Initialisation : pour $n=1$, $u_1\leq\frac{u_1}{1}$.

Hérédité : si pour tous les entiers de 1 à n, l'inégalité (*) est vérifiée alors en posant pour tout entier $0\leq k\leq n$, $v_k=\frac{u_1}{1}+\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}+\cdots+\frac{u_k}{k}$, on sait que pour tout entier $0\leq k\leq n$, $u_k\leq v_k$ donc $\sum_{k=1}^{k=n}u_k\leq\sum_{k=1}^{k=n}v_k$.

Soit $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n\leq n\frac{u_1}{1}+(n-1)\frac{u_2}{2}+(n-2)\frac{u_3}{3}+\cdots+2\frac{u_{n-1}}{n-1}+\frac{u_n}{n}$.

D'où $2(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n)\leq n\frac{u_1}{1}+(n-1)\frac{u_2}{2}+(n-2)\frac{u_3}{3}+\cdots+2\frac{u_{n-1}}{n-1}+\frac{u_n}{n}+(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n)$

Soit $2(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n)\leq(n+1)\frac{u_1}{1}+\left(\frac{n-1}{2}+1\right)u_2+\left(\frac{n-2}{3}+1\right)u_3+\cdots+\left(\frac{2}{n-1}+1\right)u_{n-1}+\left(\frac{1}{n}+1\right)u_n$.

Soit $2(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n)\leq(n+1)\left(\frac{u_1}{1}+\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}+\cdots+\frac{u_n}{n}\right)$

On en déduit que $2(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n)+u_{n+1}\leq(n+1)\left(\frac{u_1}{1}+\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}+\cdots+\frac{u_n}{n}\right)+(n+1)\frac{u_{n+1}}{n+1}$

Soit $2(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n)+u_{n+1}\leq(n+1)\left(\frac{u_1}{1}+\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}+\cdots+\frac{u_n}{n}+\frac{u_{n+1}}{n+1}\right)$.

Or $2(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n)=(u_1+u_n)+(u_2+u_{n-1})+\cdots+(u_n+u_1)$ et, d'après les hypothèses sur lq suite (u_n), $u_1+u_n\geq u_{n+1}, u_2+u_{n-1}\geq u_{n+1}, \ldots, u_n+u_1\geq u_{n+1}$ donc $2(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n)\geq nu_{n+1}$

Et $2(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n)+u_{n+1}\geq(n+1)u_{n+1}$.

On a donc $(n+1)u_{n+1}\leq(n+1)\left(\frac{u_1}{1}+\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}+\cdots+\frac{u_n}{n}+\frac{u_{n+1}}{n+1}\right)$ soit $u_{n+1}\leq\frac{u_1}{1}+\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}+\cdots+\frac{u_n}{n}+\frac{u_{n+1}}{n+1}$

Et l'inégalité (*) est encore vérifiée au rang $n+1$.

On a donc bien, pour tout entier naturel $n\geq 1$, $u_n\leq\frac{u_1}{1}+\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}+\cdots+\frac{u_n}{n}$.

Exercice 5

L'ensemble des termes des suites $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ est l'ensemble des entiers compris entre 1 et $2n$. Chacun de ces nombres n'est utilisé qu'une fois. La suite $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ est décroissante, la suite $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ est croissante.
Combien vaut : $S = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| + \cdots + |a_{n-1} - b_{n-1}| + |a_n - b_n|$?

Supposons qu'il existe un rang k pour lequel a_k et b_k sont tous les deux supérieurs à n. Dans ce cas, $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_k$ et $b_k < b_{k-1} < \cdots < b_n$ constituent un ensemble de $n+1$ nombres différents, supérieurs ou égaux à n et inférieurs ou égaux à $2n$. Impossible. On obtiendrait une autre contradiction si on supposait a_k et b_k tous deux inférieurs ou égaux à n. Conclusion : pour tout entier k compris entre 1 et n, les entiers a_k et b_k appartiennent l'un à $[\![1,n]\!]$, l'autre à $[\![n+1,2n]\!]$.
Or, d'après la définition de la valeur absolue, $|x-y| = \max(x,y) - \min(x,y)$.

En sommant toutes ces différences, on retrouve la somme de tous les entiers compris entre $n+1$ et $2n$ diminuée de la somme de tous les entiers compris entre 1 et n.
Finalement $S = 2n + 2n - 1 + \cdots + n + 1 - (1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 + n)$
Et $S = n^2$.

Exercice 6 – tiré du concours général 2023

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $v(n)$ le plus grand entier naturel k tel que $\frac{n}{2^k}$ soit un entier.
On définit la suite (u_n) par récurrence, en posant $u_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 2$:

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } u_{n-1} = 0 \\ 1 + 2v(n) - \frac{1}{u_{n-1}} & \text{si } u_{n-1} \neq 0 \end{cases}.$$

1. Donner la valeur des entiers $v(1), v(2), v(3), v(4)$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v(n) = 0$ si n est impair et que $v(n) = v\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ si n est pair.
3. Calculer les huit premiers termes de la suite (u_n) et verifier que $u_8 = 4$.
4. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est un nombre rationnel strictement positif, que $u_{2n} = u_n + 1$ et que $u_{2n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.
5. Démontrer que tout nombre entier strictement positif et que tout inverse d'un entier strictement positif est égal à un terme u_n.

1. On voit rapidement que $v(1) = 0, v(2) = 1, v(3) = 0, v(4) = 2$.
2. Si n est un entier impair, alors il est premier avec 2 et $v(n) = 0$.
   Si n est un entier pair, alors il existe un entier m tel que $n = 2m$ et pour tout entier naturel k, $\frac{n}{2^k} = \frac{m}{2^{k-1}}$ donc 2^k divise n si et seulement si 2^{k-1} divise m d'où $v(m) = v(n) - 1$ soit $v(n) = v\left(\frac{n}{2}\right) + 1$.
   On peut en déduire, par un raisonnement par récurrence, que
3. $u_1 = 1$ donc $u_2 = 1 + 2v(2) - \frac{1}{1} = 2$ $\quad$ $u_2 = 2$ donc $u_3 = 1 + 2v(3) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
   $u_3 = \frac{1}{2}$ donc $u_4 = 1 + 2v(4) - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3$ $\quad$ $u_4 = 3$ donc $u_5 = 1 + 2v(5) - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
   $u_5 = \frac{2}{3}$ donc $u_6 = 1 + 2v(6) - \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 + 2(v(3)+1) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$
   $u_6 = \frac{3}{2}$ donc $u_7 = 1 + 2v(7) - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $u_7 = \frac{1}{3}$ donc $u_8 = 1 + 2v(8) - 3 = -2 + 2(v(4)+1) = 4$.
4. On effectue un premier raisonnement par récurrence pour montrer que tous les termes de la suite sont strictement positifs.
   Soit P_k : « pour tout entier p tel que $2^k \leq p < 2^{k+1}$, $u_p > 0$ et si $p = 2r$ alors $u_{2r} = u_r + 1$ et si $p = 2r+1$ alors $u_{2r+1} = \frac{u_r}{1+u_r}$ »
   <u>**Initialisation 1**</u> : *pour* $k = 1, 2 \leq p < 4$,
   $u_2 = 2$ et $u_3 = \frac{1}{2}$ sont strictement positifs et $u_2 = 2 = u_1 + 1$ et $u_3 = \frac{1}{2} = \frac{u_1}{u_1+1}$

   <u>**Hérédité 1 :**</u>
   Si pour tout entier p tel que $2^k \leq p < 2^{k+1}$, $u_p > 0$ et si $p = 2r$, $u_{2r} = u_r + 1$ et si $p = 2r+1$, $u_{2r+1} = \frac{u_r}{1+u_r}$

$2^{k+1} \leq p < 2^{k+2}$ équivaut à dire qu'il existe un entier i avec $0 \leq i < 2^{k+1}$ tel que $p = 2^{k+1} + i$

On fait maintenant une récurrence finie sur i : (on va avancer de 1 pour montrer la non nullité, et la condition sur la tranche de puissance de 2 permet de revenir à la tranche précédente pour avoir les formules) :

<u>Initialisation 2</u> : pour $i = 0, p = 2^{k+1}$, $u_{p=}u_{2^{k+1}} = 1 + 2v(2^{k+1}) - \frac{1}{u_{2^{k+1}-1}}$ car d'après P_k , on a u_{p-1} non nul
Or comme $2^{k+1} - 1$ est impair et strictement inférieur à 2^{k+1}, par hypothèse, de récurrence, on a $u_{2^{k+1}-1} = \frac{u_{2^k-1}}{1+u_{2^k-1}}$.
On en déduit : $u_{p=}u_{2^{k+1}} = 1 + 2v(2^{k+1}) - \frac{1}{u_{2^{k+1}-1}} = 1 + 2 + 2v(2^k) - \frac{1+u_{2^k-1}}{u_{2^k-1}} = 2 + v(2^k) - \frac{1}{u_{2^k-1}} = 1 + u_{2^k}$ et donc $u_p = u_{2^{k+1}} \neq 0$ et u_p est rationnel et vérifie la formule voulue.
<u>Hérédité 2</u> : Supposons que la non nullité et les formules sont montrées au rang i (i conforme à ce qu'il faut) :
On a $u_{2^{k+1}+i} \neq 0$ donc $u_{2^{k+1}+i+1} = 1 + 2v(2^{k+1} + i + 1) - \frac{1}{u_{2^{k+1}+i}}$
Si $2^{k+1} + i + 1$ impair alors il existe un entier $l, 2^k \leq l < 2^{k+1}$, tel que $2^{k+1} + i + 1 = 2l + 1$
et donc $u_{2^{k+1}+i+1} = u_{2l+1} = 1 + 2v(2l + 1) - \frac{1}{u_{2l}} = 1 + 0 - \frac{1}{1+u_l} = \frac{u_l}{1+u_l}$
Si $2^{k+1} + i + 1$ pair alors il existe un entier $l, 2^k \leq l < 2^{k+1}$, tel que $2^{k+1} + i + 1 = 2l + 2$
et donc $u_{2^{k+1}+i+1} = u_{2l+2} = 1 + 2v(2l + 2) - \frac{1}{u_{2l+1}} = 1 + 2 + 2v(l + 1) - \frac{1+u_l}{u_l} = 2 + v(l + 1) - \frac{1}{u_l} = 1 + u_{l+1}$
Ceci achève la récurrence finie.
On a donc ainsi prouvé que pour tout entier p tel que $2^{k+1} \leq p < 2^{k+2}$, $u_p > 0$ alors $u_{2p} = 1 + u_p$ et $u_{2p+1} = \frac{u_p}{1+u_p}$ et donc P_{k+1} est encore vraie.
On a donc bien « pour tout entier p tel que $2^k \leq p < 2^{k+1}$, $u_p > 0$ et si $p = 2r$alors $u_{2r} = u_r + 1$ et si $p = 2r + 1$ alors $u_{2r+1} = \frac{u_r}{1+u_r}$ »

En particulier, tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs et un autre raisonnement par récurrence permet alors de montrer que tous les termes de la suite sont des rationnels.

5. Comme pour tout entier $n \geq 1$, $u_{2n} = u_n + 1$ et $u_1 = 1$, on montre par recurrence que, pour tout entire $k \geq 1$, $u_{2^k} = 1 + k$ et donc tout entier strictement positif p est égal à $u_{2^{p-1}}$ et donc un terme de la suite (u_n).
De plus, $u_{2^k} = 1 + k$ s'écrit aussi $1 + 2v(2^k) - \frac{1}{u_{2^k-1}} = 1 + k$ soit $1 + 2k - \frac{1}{u_{2^k-1}} = 1 + k$ car le plus grand entier i tel que $\frac{2^k}{2^i}$ soit un entier est k. On a donc $u_{2^k-1} = \frac{1}{k}$ et tout inverse d'un entier naturel non nul est un terme de la suite (u_n).

Remarque : on montre en fait que tout nombre rationnel strictement positif est un terme de la suite (u_n).

Fonctions – Équations, inéquations et fonctions

Exercice 1 – Autour de la partie entière

On rappelle que la notation $E(x)$ désigne la *partie entière* du réel x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.

1. Montrer que l'équation $E(x)(x^2+1) = x^3$ admet une unique solution dans chaque intervalle dont les extrémités sont des entiers strictement positifs consécutifs.
2. Montrer que cette solution est irrationnelle.

1. Plaçons-nous dans l'intervalle $[n, n+1[$ et posons $x = n + y$ où $0 \leq y < 1$. L'équation initiale s'écrit : $n((n+y)^2+1) = (n+y)^3$, ou encore : $y(n+y)^2 = n$.
Sur l'intervalle $[0,1[$, la fonction $y \longmapsto y(n+y)^2$ est continue et croissante. Elle réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[0,(n+1)^2[$ et donc prend une et une seule fois la valeur n.

2. Reprenons l'équation de départ en posant $x = \frac{p}{q}$, p et q étant premiers entre eux. En appelant n la partie entière de x, il vient $\frac{n(p^2+q^2)}{q^2} = \frac{p^3}{q^3}$, ou encore $qn(p^2+q^2) = p^3$, d'où vient que q divise p^3, contradiction.
Se peut-il qu'un entier soit solution ? L'équation $n(n^2+1) = n^3$ n'a comme solution que 0, qui a été exclu au départ.

Exercice 2 – Recherche de fonction

Déterminer la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ et vérifiant :

Pour tous les réels x et y, $f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$ et $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. (*)

Si f est une fonction vérifiant (*) alors :
On sait que $f(0+0) = f(0) + f(0) + 0$ soit $f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$.
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ signifie que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.
Plus généralement, pour tout réel x et tout réel h non nul,
$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x)+f(h)+x^2h+xh^2-f(x)}{h} = \frac{f(h)+x^2h+xh^2}{h} = \frac{f(h)}{h} + (x^2+xh)$.
Or $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 1$ et $\lim_{h\to 0}(x^2+xh) = x^2$ donc $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 1 + x^2$.
On en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que, pour tout réel x, il existe un réel k tel que $f'(x) = x^2 + k$. Comme $f'(0) = 1$, $k = 1$ et $f'(x) = x^2 + 1$.
Alors, il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + C$ et, comme $f(0) = 0$, $C = 0$ et $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$.
Reste à montrer que cette fonction vérifie bien la relation (*).

Exercice 3 – Équation fonctionnelle dans N

Déterminer les fonctions f, de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$, pour lesquelles :
(1) Pour tout couple (m,n) d'entiers, $f(mn) = f(m)f(n)$;
(2) Pour tout entier n, $f^{(n)}(n) = n$, écriture dans laquelle $f^{(n)}$désigne la composée de f par elle-même $(n-1)$ fois.

Si f est une fonction vérifiant les deux relations (1) et (2) alors :
$f(1) = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $f(n) \geq 2$ (en effet si $f(n) = 1$ alors $f^{(n)}(n) = 1 \neq n$)
Par un raisonnement par récurrence sur k entier naturel non nul, on montre déjà que si p est un nombre premier, alors $f(p^k) = (f(p))^k$ puis, par récurrence sur l'entier n, que l'image du produit de n entiers est le produit des images de ces n entiers pour en déduire que l'image de tout entier est le produit des images des facteurs premiers de sa décomposition, chacun représenté avec son exposant.
De plus, l'orbite de tout entier n (c'est-à-dire l'ensemble de ses images successives par f) est un ensemble fini dont le cardinal est un diviseur de n. En effet, comme $f^{(n)}(n) = n$, l'orbite de n possède au plus n éléments. Appelons $a_0 = a_1, a_2, .., a_k$ etc … ($a_0 = a_n$ et $a_k = f^{(k)}(n)$) les éléments de l'orbite de n et d le plus petit entier pour lequel on peut trouver k compris entre 0 et $n-1$ tels que $a_{k+d} = a_k$. Un tel entier existe, puisque n lui-même a cette propriété. En prenant un certain nombre de fois l'image de chacun des membres de cette égalité par f, on obtient $a_0 = a_d$
Montrons que d est un diviseur de n :

pour cela, considérons la division euclidienne de n par d : $n = dq + r$ et $0 \leq r < d$. On a $a_{dq} = a_0 = a_n$ donc $a_{dq} = a_{dq+r}$ avec $r < d$. La définition de d comme plus petit élément pour lequel on peut trouver k compris entre 0 et $n-1$ tels que $a_{k+d} = a_k$ implique que $r = 0$.
Enfin, l'image de tout nombre premier p par f est lui-même. En effet, l'orbite de p contient 1 élément (p) ou p éléments.
Supposons que l'orbite de p contienne p éléments.
Considérons l'élément $x = f^{(p-1)}(p)$ de cette orbite, on a $x \neq p$ et $f(x) = f\left(f^{(p-1)}(p)\right) = f^{(p)}(p) = p$.
Considérons maintenant la décomposition en produit de facteurs premiers de x : $x = \prod_{i=1}^{i=N} p_i$, les p_i pouvant être égaux.
L'application des propriétés énoncées précédemment conduit à $f(x) = f\left(\prod_{i=1}^{i=N} p_i\,,\right) = \prod_{i=1}^{i=N} f(p_i)$,
soit encore $p = \prod_{i=1}^{i=N} f(p_i)$. Comme les $f(p_i)$ sont tous supérieurs à 2, $\prod_{i=1}^{i=N} f(p_i)$ contient au moins N facteurs premiers, $p = \prod_{i=1}^{i=N} f(p_i)$ implique donc que $N = 1$.
Donc $x = p_1$.
Or par choix de x, l'orbite de x est égale à l'orbite de p donc le cardinal de l'orbite de x est p et le cardinal de l'orbite de x divise x donc p divise $x = p_i$, les deux étant premiers, il vient $p = p_i$, soit $x = p$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.
Conclusion l'orbite de p contient un seul élément donc $f(p) = p$.
Et par application des propriétés énoncées précédemment, pour tout entier naturel non nul, $f(n) = n$.

On vérifie aisément que la fonction f définie par, pour tout entier naturel non nul, $f(n) = n$, est bien solution du problème.

Exercice 4 -

Montrer que pour tous nombres réels a, b, c strictement positifs et deux à deux distincts :

$$\left(\frac{2a-b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{2c-a}{c-a}\right)^2 \geq 5. \quad (*)$$

On pose $\frac{a}{a-b} = x$, $\frac{b}{b-c} = y$ et $\frac{c}{c-a} = z$.
Alors, d'une part, $\frac{2a-b}{a-b} = \frac{a-b+a}{a-b} = 1 + \frac{a}{a-b} = 1 + x$ et de même $\frac{2b-c}{b-c} = 1 + \frac{b}{b-c} = 1 + y, \frac{2c-a}{c-a} = 1 + \frac{c}{c-a} = 1 + z$.
D'autre part, $\frac{1}{x} = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$ et, de même, $\frac{1}{y} = 1 - \frac{c}{b}, , \frac{1}{z} = 1 - \frac{a}{c}$.
(*) s'écrit donc $(1+x)^2 + (1+y)^2 + (1+z)^2 \geq 5$
Soit $3 + 2(x+y+z) + (x^2+y^2+z^2) \geq 5$ c'est-à-dire $2(x+y+z) + (x^2+y^2+z^2) \geq 2$.
Or $\left(-\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{c}{b}\right)\left(-\frac{a}{c}\right) = -1$ c'est-à-dire $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right) = -1$
Soit $\frac{1}{xyz} - \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 1 = -1$ c'est-à-dire $\frac{1}{xyz} - \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 0$
Soit, après réduction au même dénominateur $1 - (z+x+y) + (yz+zx+xy) = 0$. (**)
Or $2(yz+zx+xy) = (z+x+y)^2 - (x^2+y^2+z^2)$
(*) équivaut donc à $2(x+y+z) + (z+x+y)^2 - 2(yz+zx+xy)) \geq 2$
Soit, d'après (**), $2(x+y+z) + (z+x+y)^2 - 2\big((z+x+y) - 1\big) \geq 2$
Soit $(z+x+y)^2 + 2 \geq 2$ c'est-à-dire $(z+x+y)^2 \geq 0$ ce qui est toujours vrai.

Exercice 5 – Une fonction toute simple

Déterminer toutes les fonctions f, de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$, vérifiant :

$$f(1) > 0 \text{ et pour tous entiers naturels } n \text{ et } m,\ f(m^2+n^2) = (f(m))^2 + (f(n))^2. \quad (*)$$

Si f est une fonction vérifiant (*) alors :
En posant $m = n = 0$, (*) donne $f(0) = 2\big(f(0)\big)^2$ soit $f(0) = 0$ ou $f(0) = \frac{1}{2}$.
Comme la fonction f est à valeurs dans $\mathbf{N}$, la seule possibilité est $f(0) = 0$.

En posant maintenant $m = 0$, on en déduit que pour tout entier naturel n, $f(n^2) = (f(n))^2$. (**)
Alors, en réutilisant (*) ou (**) plusieurs fois, montrons que pour tout entier compris entre 1 et 10, $f(n) = n$:
Pour $n = 1$, $f(1) = (f(1))^2$ d'où, comme $f(1) > 0$, $f(1) = 1$.
Pour $n = 2 = 1^2 + 1^2$, $f(2) = 2\left(f(1)\right)^2 = 2$
Pour $n = 4 = 2^2$, $f(4) = \left(f(2)\right)^2 = 4$
Pour $n = 5 = 2^2 + 1^2$, $f(5) = \left(f(2)\right)^2 + \left(f(1)\right)^2 = 5$
Pour $n = 8 = 2^2 + 2^2$, $f(8) = \left(f(2)\right)^2 + \left(f(2)\right)^2 = 8$
De plus, $f(25) = \left(f(5)\right)^2 = 25$ et $f(25) = f(3^2 + 4^2) = \left(f(3)\right)^2 + \left(f(4)\right)^2 = \left(f(3)\right)^2 + 16$ d'où $\left(f(3)\right)^2 = 9$ et, comme $f(3) \geq 0$, $f(3) = 3$.
Pour $n = 9 = 3^2$, $f(9) = \left(f(3)\right)^2 = 9$
Pour $n = 10 = 1^2 + 3^2$, $f(10) = \left(f(1)\right)^2 + \left(f(3)\right)^2 = 1 + 9 = 10$
De plus, $10^2 = 6^2 + 8^2$ donc $100 = \left(f(10)\right)^2 = \left(f(6)\right)^2 + \left(f(8)\right)^2 = \left(f(6)\right)^2 + 64$ d'où $\left(f(6)\right)^2 = 36$ et, comme $f(6) \geq 0$, $f(6) = 6$.
Enfin, $f(50) = f(5^2 + 5^2) = 2\left(f(5)\right)^2 = 50$ mais aussi $f(50) = f(7^2 + 1^2) = \left(f(7)\right)^2 + \left(f(1)\right)^2 = \left(f(7)\right)^2 + 1$
Donc $\left(f(7)\right)^2 = 49$ et, comme $f(7) \geq 0$, $f(7) = 7$.
Pour tout entier n, il existe un unique couple (k, r) d'entiers naturels tels que $n = 5k + r$ et $1 \leq r \leq 5$
On va démontrer par récurrence sur que pour tout entier k la proposition P_k : « pour tout entier $1 \leq r \leq 5$, $f(5k + r) = 5k + r$ » est vraie.
Initialisation : l'égalité est vraie pour $k = 0$ d'après les calculs précédents
Hérédité : si la proposition est vraie pour tout entier inférieur ou égal à $k - 1$ c'est-à-dire que $f(n) = n$ pour tout entier $n \leq 5k$ alors montrons que la proposition est encore vraie pour l'entier k c'est-à-dire $f(5k + 1) = 5k + 1$, $f(5k + 2) = 5k + 2, f(5k + 3) = 5k + 3, f(5k + 4) = 5k + 4{,}5(5k + 1) = 5k + 5$.
Pour cela, on va chercher à adopter des démarches analogues à celles utilisées pour les premières valeurs de n en cherchant à exprimer les carrés $(5k + 1)^2, (5k + 2)^2, (5k + 3)^2, (5k + 4)^2, (5k + 5)^2$ en fonction de carrés plus petits, en partant du fait que $5^2 = 3^2 + 4^2$ et donc en cherchant une égalité du type :
$(5k + r)^2 = (3k + a)^2 + (4k + b)^2 - c^2$.
Pour $r = 1$, on obtient $6a + 8b = 10$ et $a^2 + b^2 - c^2 = 1$ et on constate que $a = -1$ et $b = 2$ vérifient la première égalité et qu'alors $c = 2$ convient donc $(5k + 1)^2 + 2^2 = (3k - 1)^2 + (4k + 2)^2$ et comme, $2, 3k - 1$ *et* $4k + 2$ sont des entiers plus petits que $5k + 1$, $f((5k + 1)^2 + 2^2) = f((3k - 1)^2) + f((4k + 2)^2)$
Soit $\left(f(5k + 1)\right)^2 + \left(f(2)\right)^2 = (f(3k - 1))^2 + (f(4k + 2))^2$ soit $\left(f(5k + 1)\right)^2 = (3k - 1)^2 + (4k + 2)^2 - 2^2$ c'est-à-dire $\left(f(5k + 1)\right)^2 = (5k + 1)^2$ et comme $f(5k + 1) \geq 0$, $f(5k + 1) = 5k + 1$.
On procède de même pour obtenir les égalités :
$(5k + 2)^2 + 1^2 = (3k + 2)^2 + (4k + 1)^2$, $(5k + 3)^2 + 1^2 = (3k + 1)^2 + (4k + 3)^2$
$(5k + 4)^2 + 2^2 = (3k + 4)^2 + (4k + 2)^2$, $(5k + 5)^2 = (3k + 3)^2 + (4k + 4)^2$
Et pour démontrer que
$f(5k + 2) = 5k + 2, f(5k + 3) = 5k + 3, f(5k + 4) = 5k + 4, f(5k + 5) = 5k + 5$
Ce qui permet d'affirmer que si l'égalité est vraie pour tout entier inférieur ou égal à un entier n, alors montrons que l'égalité est encore vraie pour les entiers $n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5$.
On en déduit que, pour tout entier n, $f(n) = n$.

On vérifie aisément que la fonction f définie par, pour tout entier naturel non nul, $f(n) = n$, est bien solution du problème.

Exercice 6 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Soit $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ des nombres réels.

Montrer que $\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} {y_i}^2\right)$ et qu'on a égalité si et seulement si il existe un réel α tel que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_i = \alpha y_i$.

2. Soit a, b, c des nombres réels strictement positifs tels que $a + b + c = 1$.

Montrer que $\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$.

1. Soit f la fonction qui, à tout réel λ associe le nombre $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{i=n} (\lambda x_i + y_i)^2$. Pour tout réel λ, $f(\lambda) \geq 0$.

Or $f(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^2\right)\lambda^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i\right)\lambda + \left(\sum_{i=1}^{i=n} {y_i}^2\right)$.

On pose $A = \sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^2$, $B = 2\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^2$ et $C = \sum_{i=1}^{i=n} {y_i}^2$.

Si tous les x_i sont nuls, $A = 0$ et l'inégalité est vérifiée.

Sinon, $A > 0$ et $f(\lambda)$ est un trinôme du second degré (en λ) qui est toujours positif si et seulement si son discriminant est négatif ou nul, c'est-à-dire $\left(2\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^2\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} {y_i}^2\right) \leq 0$ soit $\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} {y_i}^2\right)$.

L'inégalité est une inégalité si et seulement si :

(3) Soit tous les x_i sont nuls et tous les y_i sont nuls et il existe bien un réel α tel que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_i = \alpha y_i$.

(4) Soit le discriminant du trinôme $f(\lambda)$ est nul et l'équation $f(\lambda) = 0$ admet une unique solution λ_0, c'est-à-dire pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\lambda_0 x_i + y_i = 0$. Il ne reste plus qu'à poser $\alpha = -\lambda_0$.

2. Comme $a + b + c = 1$, $1 - \frac{a-bc}{a+bc} = \frac{a+bc-a+bc}{a+bc} = \frac{2bc}{1-b-c+bc} = \frac{2bc}{(1-b)(1-c)}$.

De même, $1 - \frac{b-ca}{b+ca} = \frac{2ca}{(1-c)(1-a)}$ et $1 - \frac{c-ab}{c+ab} = \frac{2ab}{(1-a)(1-b)}$.

L'inégalité à démontrer s'écrit donc $\frac{2bc}{(1-b)(1-c)} + \frac{2ca}{(1-c)(1-a)} + \frac{2ab}{(1-a)(1-b)} \geq 3 - \frac{3}{2}$

Soit $\frac{2bc}{(1-b)(1-c)} + \frac{2ca}{(1-c)(1-a)} + \frac{2ab}{(1-a)(1-b)} \geq \frac{3}{2}$. (*)

Or $\frac{2bc}{(1-b)(1-c)} + \frac{2ca}{(1-c)(1-a)} + \frac{2ab}{(1-a)(1-b)} = \frac{2bc((1-a)+2ca(1-b)+2ab(1-c)}{(1-a)(1-b)(1-c)} = \frac{2(bc+ca+ab)-6abc}{1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc}$

Comme a, b, c sont strictement positifs et tels que $a + b + c = 1$, $(1-a)(1-b)(1-c) > 0$ et l'inégalité (*) équivaut à $2(2(bc + ca + ab) - 6abc) \geq 3\big((ab + bc + ca) - abc\big)$

Soit $bc + ca + ab \geq 9abc$ c'est-à-dire $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$ soit encore $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c) \geq 9$.

En posant, puisque a, b, c sont strictement positifs, $x_1 = \sqrt{\frac{1}{a}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{1}{b}}$ et $x_3 = \sqrt{\frac{1}{c}}$ d'une part et $y_1 = \sqrt{a}$, $y_2 = \sqrt{b}$ et $y_3 = \sqrt{c}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c) \geq \left(\sqrt{a} \times \sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{b} \times \sqrt{\frac{1}{b}} + \sqrt{c} \times \sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2$

Soit $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c) \geq 3^2$.

Exercice 7 -

Déterminer toutes les fonctions f de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ tels que :

Pour tous réels x et y, $f(x)f\big(yf(x)\big) = f(x + y)$. (*)

Si f est une fonction vérifiant (*) alors :

Montrons que pour tout $x > 0$, $f(x) \leq 1$.

Pour cela, s'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) > 1$ alors si on pose $y_0 = \frac{x_0}{f(x_0)-1}$ alors $y_0 > 0$ et $f(x_0 + y_0) = f(x_0)f\big(y_0 f(x_0)\big)$. Or $y_0 f(x_0) = \frac{x_0 f(x_0)}{f(x_0)-1} = \frac{x_0(f(x_0)-1)+x_0}{f(x_0)-1} = x_0 + y_0$.

On a donc $f(x_0 + y_0) = f(x_0)f(x_0 + y_0)$ ce qui signifie puisque f est à valeurs dans $]0, +\infty[$, $f(x_0) = 1$ et on aboutit à une contradiction.

On en déduit que pour tous réels x et y de $]0,+\infty[$, $f(x) \geq f(x+y)$, ce qui signifie que la fonction f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

- S'il existe un réel $x > 1$ tel que $f(x) = 1$, alors pour tout réel $0 < y \leq x$, $f(y) \geq f(x)$ car f est décroissante sur $]0,+\infty[$. On a donc à la fois $f(y) \ \leq 1$ et $f(y) \geq 1$ donc $f(y) = 1$ et pour tout entier naturel non nul k,

$f\big((k+1)x\big) = f(kx+x) = f(x)f(kx) = f(kx)$ et un raisonnement par récurrence sur k conduit à pour tout entier naturel non nul k, $f(kx) = 1$. Comme, pour tout réel strictement positif y, il existe un entier naturel non nul k tel que $0 < y \leq kx$, $f(y) = 1$ et f est la fonction constante égale à 1.

- Si, pour tout $x > 0, 0 < f(x) < 1$, alors comme pour tout $y > 0$, $f(x)f\big(yf(x)\big) = f(x+y)$, $f(x+y) < f(x)$.

La fonction f est donc strictement décroissante et injective.

Pour tous réels x et y , (*) s'écrit $f(x+y) = f\big(1+(x+y-1)\big) = f(1)f\big((x+y-1)f(1)\big)$

soit $f(x)f\big(yf(x)\big) = f(1)f\big((x+y-1)f(1)\big)$.

En posant $y = \frac{1}{f(x)}$, cette égalité s'écrit $f(x)f(1) = \ f(1)f\left(\left(x+\frac{1}{f(x)}-1\right)f(1)\right)$ soit, puisque $f(1) \neq 0$,

$f(x) = \ f\left(\left(x+\frac{1}{f(x)}-1\right)f(1)\right)$. Comme f est injective, on en tire $x = \left(x+\frac{1}{f(x)}-1\right)f(1)$

Soit $\frac{x}{f(1)} - x + 1 = \frac{1}{f(x)}$ soit $f(x) = \frac{1}{1+x\left(\frac{1}{f(1)}-1\right)}$.

Il existe donc un réel a strictement positif (car $0 < f(1) < 1$) tel que pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{1+ax}$.

Remarque : $a = 0$ correspond au cas f constante égale à 1.

Réciproquement si pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{1+ax}$ où $a \geq 0$.

$f(x)f\big(yf(x)\big) = \frac{1}{1+ax} \times \frac{1}{1+ay\frac{1}{1+ax}} = \frac{1}{1+ax} \times \frac{1}{1+ay\frac{1}{1+ax}} \times \frac{1+ax}{1+ax+ay} = \frac{1}{1+a(x+y)} = f(x+y)$ et f est bien solution du problème.

Géométrie – Nombres complexes

Exercice 1 – Alignement et tangente

Soit A, B, C et D sont quatre points placés dans cet ordre sur un cercle.

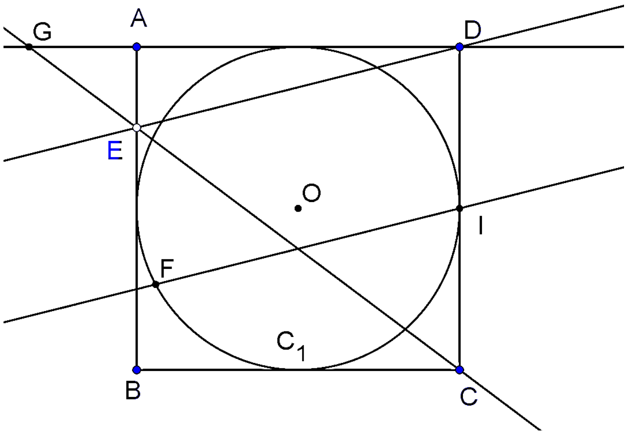
a. Montrer que si les droites (AB) et (CD) sont parallèles alors ABCD est un trapèze isocèle.

b. Montrer que si AD = BC alors ABCD est un trapèze isocèle.

On considère un carré ABCD et $\mathcal{C}_1$ son cercle inscrit. On note :

- I le milieu de [CD] ;
- E un point du segment [AB] distinct du point B ;
- F le deuxième point d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et de la parallèle à (DE) passant par I ;
- G le point d'intersection des droites (AD) et (CE).

On veut montrer que la droite (GF) est tangente à $\mathcal{C}_1$ en F.



1. On suppose que la droite (DE) recoupe le cercle $\mathcal{C}_2$ circonscrit au carré ABCD en un point M et que la parallèle à (AM) passant par D recoupe le cercle $\mathcal{C}_2$ en N. Montrer que les quadrilatères ADNM et DCNM sont des trapèzes isocèles.
2. En déduire que les triangles AEM et DCN sont semblables.
3. Montrer que les points G, M et N sont alignés. On pourra utiliser une homothétie.
4. Montrer que la droite (MN) est tangente à $\mathcal{C}_1$ en F. On pourra utiliser une symétrie axiale.
5. Conclure.

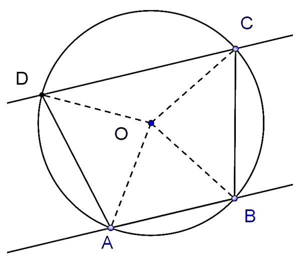
Questions préliminaires

a. Les points A, B, C et D sont sur un même cercle de centre O. Donc :

OA = OB d'où O appartient à la médiatrice de [AB] ;

OC = OD d'où O appartient à la médiatrice de [CD].

Ces deux médiatrices sont perpendiculaires aux deux droites parallèles (AB) et (CD) donc elles sont parallèles. Elles passent de plus par le point O. Elles sont donc confondues. Une symétrie axiale conservant les distances, on en déduit, en utilisant la symétrie d'axe cette médiatrice commune, que AD = BC.



b. Les points A, B, C et D sont sur un même cercle de centre O. Donc :

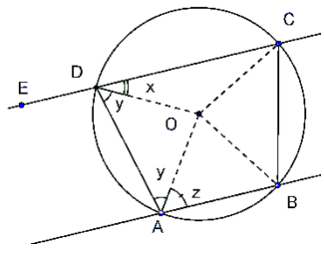
Les triangles OAD et OBC sont isocèles en O et isométriques

Les triangles OCD et OAB sont isocèles en O.

La somme des mesures des angles d'un quadrilatère vaut 360° donc, avec les notations de la figure ci-contre, on peut écrire : $2x + 2y + 2z + 2x = 360°$

soit $x + y + y + z = 180°$. On en déduit que, pour un point E de la demi-droite [CD) extérieur au segment [CD] :

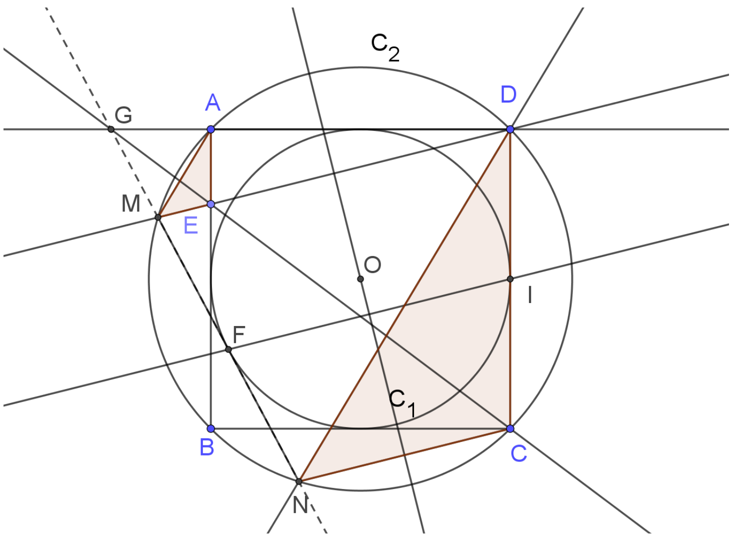
$\widehat{\mathrm{EDA}} = 180° - (x + y) = y + z = \widehat{\mathrm{DAB}}$.



Les angles alternes-internes $\widehat{\mathrm{EDA}}$ et $\widehat{\mathrm{DAB}}$ étant de même mesure, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

1. Par construction (E est sur le segment [AB]), les points A, D, N et M sont sur le cercle $\mathcal{C}_2$ dans cet ordre et les droites (AM) et (DN) sont parallèles donc, d'après la question préliminaire **a.**, ADNM est un trapèze isocèle. En particulier AD = MN.

Par construction, les points D, C, N et M sont sur le cercle $\mathcal{C}_2$ dans cet ordre et MN = AD = DC puisque ABCD est un carré. Donc, d'après la question préliminaire **b.**, ADNM est un trapèze isocèle. En particulier, les côtés de même longueur de ce trapèze étant [DC] et [MN], les bases de ce trapèze sont [CN] et [DM] donc (DM) est parallèle à (CN).



2. Par construction, (AM) est parallèle à (DM).
E est sur le segment [AB] et ABCD est un carré donc (AE) est parallèle à (DC).
(DM) est parallèle à (CN) et E appartient à (DM) donc (EM) et (CN) sont parallèles.
On en déduit que les triangles AEM et DCN sont semblables.

3. Plus précisément, soit h l'homothétie de centre G transformant E en C.
$h(\mathrm{A}) = \mathrm{D}$ car l'image de A est le point d'intersection de la droite (GA) avec la parallèle à (AE) passant par l'image de E.
Le point M est le point d'intersection de (AM) et (ME). L'image par h de (AM) est la parallèle à (AM) passant par $h(\mathrm{A}) = \mathrm{D}$: c'est la droite (DN). L'image par h de (ME) est la parallèle à (ME) passant par $h(\mathrm{E}) = \mathrm{C}$: c'est la droite (CN). On en déduit que $h(M) = N$.
En particulier, les points G, M et N sont alignés.

4. (DC) est la tangente à $\mathcal{C}_1$ en I milieu de [DC] (car ABCD est un carré). CDNM est un trapèze isocèle donc si s est la symétrie d'axe la médiatrice commune de [CN] et [DM], droite passant par le centre O de $\mathcal{C}_1$ donc axe de symétrie de ce cercle, $s(\mathrm{D}) = \mathrm{M}, s\,(\mathrm{C}) = \mathrm{N}, s(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_1$ et (MN) est la tangente à $\mathcal{C}_1$ en J milieu de [MN].
Or, par construction, F appartient à $\mathcal{C}_1$ et (FI) est parallèle à (DM) donc $s(\mathrm{I})$ appartient à la fois à $\mathcal{C}_1$ et à (FI), soit $s(\mathrm{I}) = \mathrm{F}$ et F est le milieu de [MN].
En particulier les points G, M, F et N sont alignés.

5. La droite (GF) est la droite (MN) qui est tangente à $\mathcal{C}_1$ en F.

Exercice 2 – Tiré du concours général 2017

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Un point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ est dit *entier* lorsque ses trois coordonnées x, y et z sont des entiers.
De même, un point $M(x, y)$ du plan $\mathcal{P}$ rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sera dit *entier* lorsque ses deux coordonnées x et y sont des entiers.
Dans tout le problème, les triangles seront supposés non aplatis et leurs points tous distincts.

1. Soit ABC un triangle du plan rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et H le pied de sa hauteur issue de A.

a. Prouver que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC^2} \times \overrightarrow{BC}$.

b. En déduire que si A, B et C sont des points entiers du plan $\mathcal{P}$ alors les coordonnées de H sont des nombres rationnels.

c. Si ABC est un triangle de l'espace $\mathcal{E}$, les résultats établis aux questions ***a*** et ***b*** ci-dessus sont-ils encore valables ?

2. *a.* Soit $\vec{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{u'}(x', y')$ deux vecteurs non nuls du plan. Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs r et r' et deux réels θ et θ' tels que $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et $x' = r'\cos\theta'$, $y' = r'\sin\theta'$.

Montrer que $\sin\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{u'}}\right) = \frac{\text{dét}\,(\vec{u}, \overrightarrow{u'})}{\|\vec{u}\|\|\overrightarrow{u'}\|}$.

b. Existe-t-il un triangle équilatéral dont les sommets sont trois points entiers du plan $\mathcal{P}$ rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$?

1. *a.* Le point H est un point de (BC) donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{BH} = k\overrightarrow{BC}$ et H est sur la perpendiculaire à (BC) passant par A donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ soit $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}\right).\overrightarrow{BC} = 0$ c'est-à-dire $\left(\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{BC} = 0$.

On en déduit $kBC^2 = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$. Comme on a supposé $B \neq C$, on en tire $k = -\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{BC^2} = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC^2}$.

Donc $\overrightarrow{BH} = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC^2} \times \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC^2} \times \overrightarrow{BC}$.

b. Comme les coordonnées de A, B, C sont des entiers, il en est de même pour les nombres $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et BC^2 ainsi que les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. Le quotient $\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC^2}$ est donc un rationnel et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BC^2} \times \overrightarrow{BC}$ sont des rationnels, comme celle du point H puisque celles du point A sont des entiers.

Remarque : on utilise ici le fait que somme, différence, produit, quotient de rationnels sont des rationnels.

c. Oui car la colinéarité et l'orthogonalité se traduisent de la même façon dans l'espace.

2. *a.* Il suffit de poser $r = \|\vec{u}\|, r' = \left\|\overrightarrow{u'}\right\|$ et $(\widehat{\vec{\imath}, \vec{u}}) = \theta$, $\left(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{u'}}\right) = \theta'$.

Alors $\frac{\text{dét}\,(\vec{u}, \overrightarrow{u'})}{\|\vec{u}\|\|\overrightarrow{u'}\|} = \frac{r\cos\theta r'\sin\theta' - r\sin\theta r'\cos\theta'}{rr'} = \cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' = \sin(\theta' - \theta) = \sin\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{u'}}\right)$

b. Si ABC est un triangle isocèle en A alors $\sin\widehat{BAC} = \frac{|\text{dét}\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}{AB \times AC}$ d'après la question précédente en prenant l'angle géométrique. Le triangle est isocèle en A donc $AC = AB$ d'où $\sin\widehat{BAC} = \frac{|\text{dét}\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}{AB^2}$.

Or $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ *et* $\text{dét}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)$

Si A, B et C sont des points à coordonnées rationnelles alors $\sin\widehat{BAC}$ est un nombre rationnel, ce qui est impossible si ABC est équilatéral puisqu'alors $\sin\widehat{BAC} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il n'existe donc pas de triangle équilatéral dont les sommets sont à coordonnées rationnelles, encore moins des points entiers.

Exercice 3 – Théorème de Carnot

Soit ABC un triangle non aplati et D, E, F des points respectivement des droites (BC), (CA) et (AB).

Montrer que les perpendiculaires aux côtés du triangle et passant par D, E et F sont concourantes si et seulement si :

$$\mathrm{BD}^2 + \mathrm{CE}^2 + \mathrm{AF}^2 = \mathrm{DC}^2 + \mathrm{EA}^2 + \mathrm{FB}^2 .$$

Remarque préalable : On a fait fonctionner, dans ce qui suit, le produit scalaire, mais on peut aussi utiliser le théorème de Pythagore en exprimant de deux manières différentes la somme $OA^2 + OB^2 + OC^2$ pour la condition nécessaire, en introduisant le point O comme point d'intersection de deux des perpendiculaires pour la condition suffisante.

Soit I le milieu d'un segment [AB] et M un point quelconque du plan. Montrons que si H est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) alors $AM^2 - BM^2 = AH^2 - BH^2$.

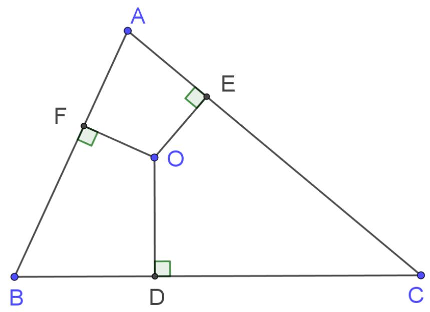
$AM^2 - BM^2 = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}\right)^2 - \left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}\right)^2 = AI^2 + 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM} + IM^2 - \left(BI^2 + 2\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IM} + IM^2\right)$

I est le milieu de [AB] donc $AM^2 - BM^2 = 2\left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}\right).\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}$.

En particulier $AH^2 - BH^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH}$

D'autre part, par définition de H, $\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH}$.

Donc, pour tout point M de projeté orthogonal H sur [AB], $AM^2 - BM^2 = AH^2 - BH^2$.



- Si les trois droites sont concourantes, notons O leur point de concours.

Alors, d'après le résultat obtenu précédemment,
$BD^2 - DC^2 = BO^2 - OC^2, CE^2 - EA^2 = CO^2 - OA^2$ et $AF^2 - FB^2 = AO^2 - OB^2$, ce qui permet d'affirmer que $BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2 = 0$
Soit $BD^2 + CE^2 + AF^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2$.

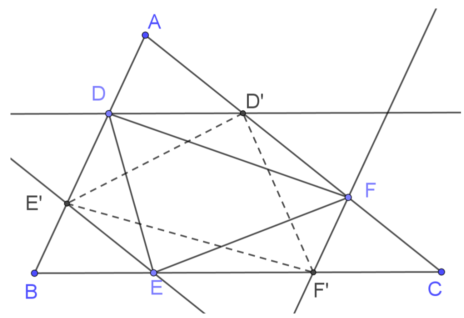
- Réciproquement, si D, E, F sont des points respectivement des segments [BC], [CA], [AB] tels que :

$BD^2 + CE^2 + AF^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2$ soit $BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2 = 0$
Comme le triangle ABC n'est pas aplati, les droites (BC) et (CA) ne sont pas parallèles et les perpendiculaires à (BC) et (CA) passant respectivement par D et E se coupent en un point noté O.
Soit alors F' le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par O avec (AB). On a alors :
$(BD^2 - DC^2) + (CE^2 - EA^2) + (AF^2 - FB^2) = 0$ par hypothèse
et $(BD^2 - DC^2) + (CE^2 - EA^2) + (AF'^2 - F'B^2) = 0$ car les droites (OD), (OE) et (OF') sont concourantes en O.
On en déduit $AF^2 - FB^2 = AF'^2 - F'B^2$ soit $2\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{IF} = 2\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{IF'}$ d'où $\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{FF'} = 0$. Or les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FF'}$ sont colinéaires puisque les points A, B, F, F' sont alignés. Donc $F = F'$.

Exercice 4 – Comparaison d'aires

Soit ABC un triangle. Une droite $\mathcal{D}_1$ parallèle à (BC) coupe les droites (AB) et (AC) respectivement en D et D'. Une droite $\mathcal{D}_2$ parallèle à (CA) coupe les droites (BC) et (BA) respectivement en E et E'. Une droite $\mathcal{D}_3$ parallèle à (AB) coupe les droites (CA) et (CB) respectivement en F et F'.
Montrer que les triangles DEF et D'E'F' ont même aire.

On peut démontrer que si MNP est un triangle alors son aire est égale à $\frac{1}{2} \times MN \times MP \times \sin \widehat{MNP}$. On en déduit que
$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC \times \sin \widehat{BAC}$ et $\mathcal{A}_{ADF} = \frac{1}{2} AD.AF \times \sin \widehat{DAF}$.
Or $\widehat{BAC} = \widehat{DAF}$ donc $\frac{\mathcal{A}_{DAF}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{AD.AF}{AB.AC}$.
D'après le théorème de Thalès, $\frac{AD}{AB} = \frac{AD'}{AC}$. On pose $a = \frac{AD}{AB} = \frac{AD'}{AC}$.
On peut de même poser $b = \frac{BE}{BC} = \frac{BE'}{BA}$ et $c = \frac{CF}{CA} = \frac{CF'}{CB}$



On a alors $\frac{\mathcal{A}_{DAF}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{AD.AF}{AB.AC} = a(1-c)$ soit $\mathcal{A}_{DAF} = a(1-c)\ \mathcal{A}_{ABC}$.
De même $\mathcal{A}_{BDE} = b(1-a)\ \mathcal{A}_{ABC}$ et $\mathcal{A}_{CEF} = c(1-b)\ \mathcal{A}_{ABC}$.
On en déduit que $\mathcal{A}_{DEF} = \mathcal{A}_{ABC} - (\mathcal{A}_{DAF} + \mathcal{A}_{BDE} + \mathcal{A}_{CEF}) = \mathcal{A}_{ABC}(1 - a(1-c) + b(1-a) + c(1-b))$
Soit $\mathcal{A}_{DEF} = \mathcal{A}_{ABC}(1 - a - b - c + ac + ba + cb)$.
D'autre part, $\mathcal{A}_{AD'E'} = \frac{1}{2} AD'.AE' \times \sin \widehat{D'AE'} = \frac{1}{2} AD'.AE' \times \sin \widehat{BAC}$ d'où
$\frac{\mathcal{A}_{D'AE'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{AD'.AE'}{AC.AB} = a(1-b)$ soit $\mathcal{A}_{D'AE'} = a(1-b)\ \mathcal{A}_{ABC}$
De même $\mathcal{A}_{BE'F'} = b(1-c)\ \mathcal{A}_{ABC}$ et $\mathcal{A}_{BCD'F'} = c(1-a)\ \mathcal{A}_{ABC}$ et on vérifie que :
$\mathcal{A}_{D'E'F'} = \mathcal{A}_{ABC}(1 - a - b - c + ac + ba + cb) = \mathcal{A}_{DEF}$.

Exercice 5 – Racines complexes

Soit a, b, c des nombres complexes. On considère l'équation (*) : $z^3 + az^2 + bz + c = 0$.
Soit Z une racine complexe de (*).

1. Montrer que $|Z| \leq max(1, |a| + |b| + |c|\,)$.
2. Plus généralement, soit $r > 0$, montrer que $|Z| \leq max(r, |a| + \frac{|b|}{r} + \frac{|c|}{r^2}\,)$.
3. Montrer que (**) : $x^3 - |a|x^2 - |b|x - |c| = 0$ admet une unique solution, notée ρ, dans $\mathbf{R}_+^*$.
4. Montrer que $|Z| \leq \rho$.

1. Si $|Z| \leq 1$ alors, de façon évidente, $|Z| \leq max(1, |a| + |b| + |c|\,)$.
Sinon, $|Z| > 1$ et il s'agit de montrer que $|Z| \leq |a| + |b| + |c|$.
Z est une racine complexe non nulle de (*) donc $Z^3 = -aZ^2 - bZ - c$ s'écrit aussi $Z = -a - \frac{b}{Z} - \frac{c}{Z^2}$.
On en déduit que $|Z| \leq |a| + \frac{|b|}{|Z|} + \frac{|c|}{|Z|^2}$ d'où, puisque $|Z| > 1$, $|Z| \leq |a| + |b| + |c|$.
On a donc $1 < |Z| \leq |a| + |b| + |c|$ et donc $|Z| \leq max(1, |a| + |b| + |c|\,)$.

2. On fait le même raisonnement en distinguant les cas $|Z| \leq r$ et , $|Z| > r$ et en travaillant sur $\frac{|Z|}{r}$.

3. Sur $\mathbf{R}_+^*$, (**) équivaut à $1 - \frac{|a|}{x} - \frac{|b|}{x^2} - \frac{|c|}{x^3} = 0$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = 1 - \frac{|a|}{x} - \frac{|b|}{x^2} - \frac{|c|}{x^3}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{|a|}{x^2} + \frac{2x|b|}{x^4} + \frac{3x^2|c|}{x^6}$ d'où $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
Comme de plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution ρ.

4. D'après la question **2**, $|Z| \leq max(\rho, |a| + \frac{|b|}{\rho} + \frac{|c|}{\rho^2}\,)$. Comme ρ est solution de (**), $|a| + \frac{|b|}{\rho} + \frac{|c|}{\rho^2} = \rho$ et donc $|Z| \leq \rho$.

Exercice 6 – Tiré du concours général 2017

Une partie $\mathcal{A}$ non vide de $\mathbf{C}$ est dite de type S si pour tout $z_1 \in \mathcal{A}$ et tout $z_2 \in \mathcal{A}$, le produit $z_1 z_2$ et la somme $z_1^2 + z_2^2$ sont encore dans $\mathcal{A}$.
Dans tout le problème, $\mathcal{A}$ désigne une partie de $\mathbf{C}$ de type S et on note $b(\mathcal{A})$ le nombre de nombres complexes z de $\mathcal{A}$ dont le module est inférieur ou égal à 1. On note $b(\mathcal{A}) = \infty$ lorsque ce nombre est infini.

Partie A

1. Les ensembles suivants sont des parties de $\mathbf{C}$ de type S (on ne demande pas de le vérifier). Déterminer pour chacun d'eux la valeur de $b(\mathcal{A})$:
   (a) $\mathcal{A} = \{0\}$ (b) $\mathcal{A} = \mathbf{C}$ (c) $\mathcal{A} = \mathbf{N}$ (d) $\mathcal{A} = \mathbf{N}^*$
2. ***a.*** Donner une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbf{C}$ de type S telle que $b(\mathcal{A}) = 0$.
   b. Donner une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbf{C}$ de type S telle que $b(\mathcal{A}) = 3$.
3. On note $\bar{\mathcal{A}} = \{\bar{z}, z \in \mathcal{A}\}$ c'est-à-dire la partie de $\mathbf{C}$ constituée des nombres complexes conjugués des éléments de $\mathcal{A}$. Montrer que $\bar{\mathcal{A}}$ est de type S et préciser $b(\bar{\mathcal{A}})$.

Partie B

On définit le complexe $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ et on note $Z[j] = \{a + bj, (a, b) \in \mathbf{Z}^2\}$.

1. ***a.*** Calculer $1 + j + j^2$.
   b. Montrer que $Z[j]$ est de type S.
   c. Montrer que $b(Z[j]) = 7$.
   d. On note $Z[j]^* = Z[j] - \{0\}$. Justifier que $Z[j]^*$ est de type S et déterminer $b(Z[j]^*)$.
2. On définit la partie $\mathcal{R}$ de $\mathbf{C}$ par $\mathcal{R} = \{z \in \mathbf{C}, z^2 \in Z[j]\}$.
   a. Montrer que $\mathcal{R}$ est de type S.
   b. Déterminer $b(\mathcal{R})$.

Partie A

1. $b(\{0\}) = 1$ $\quad b(\mathbf{C}) = \infty$ $\quad b(\mathbf{N}) = 2$ $\quad$ et $b(\mathbf{N}^*) = 1$.

2. ***a.*** Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers relatifs pairs non nuls. Le produit de deux entiers relatifs pairs non nul est bien un entier relatif pair non nul. Le carré d'un entier relatif pair non nul est un entier relatif pair non nul et la somme de deux entiers relatifs pairs non nuls est un entier relatif pair non nuls. Donc cet ensemble $\mathcal{A}$ est de type S. De plus $b(\mathcal{A}) = 0$ (aucun nombre relatif pair de module inférieur ou égal à 1)

b. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers relatifs. Le produit et la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif donc $\mathcal{A}$ est de type S. De plus $b(\mathcal{A}) = 3$ (les seuls nombres relatifs de de module inférieur ou égal à 1 sont $-1,0,1$).

3. Le produit des conjugués de deux nombres complexes est le conjugué du produit de ces deux nombres. Le carré du conjugué d'un nombre complexe est le conjugué du carré de ce nombre. La somme des conjugués de deux nombres complexes est le conjugué de la somme de ces deux nombres. De plus la conjugaison est une bijection de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$. Donc si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbf{C}$ de type S alors $\bar{\mathcal{A}}$ est aussi une partie de $\mathbf{C}$ de type S.
Comme $|\bar{z}| = |z|$, $b(\bar{\mathcal{A}}) = b(\mathcal{A})$.

Partie B

1. ***a.*** $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ d'où $1 + j + j^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) = 0$.

b. Soit a_1, b_1, a_2, b_2 quatre entiers relatifs et $z_1 = a_1 + b_1 j$ et $z_2 = a_2 + b_2 j$ qui sont donc deux éléments de $Z[j]$. Alors :

$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) j + b_1 b_2 j^2$

Or $1 + j + j^2 = 0$ soit $j^2 = -1 - j$ d'où $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 - b_1 b_2) j$

Et, comme l'ensemble $\mathbf{Z}$ est stable par addition et multiplication, $a_1 a_2 - b_1 b_2$ et $a_1 b_2 + b_1 a_2 - b_1 b_2$ sont des entiers relatifs donc $z_1 z_2 \in Z[j]$.

D'autre part, $z_1^2 = (a_1 + b_1 j)^2 = a_1^2 + 2a_1 b_1 j + b_1^2 j^2 = (a_1^2 - b_1^2) + (2a_1 b_1 - b_1^2) j$ et de façon analogue pour z_2.

D'où $z_1^2 + z_2^2 = (a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2) + (2a_1 b_1 - b_1^2 + 2a_2 b_2 - b_2^2)$.

Les nombres $a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2$ et $2a_1 b_1 - b_1^2 + 2a_2 b_2 - b_2^2$ sont aussi des entiers relatifs donc $z_1^2 + z_2^2 \in Z[j]$.

Conclusion $Z[j]$ est un ensemble de type S.

c. Soit a et b deux entiers relatifs et $z = a + bj$ un élément de $Z[j]$.

$|z| \leq 1$ équivaut à $|z|^2 \leq 1$ soit $z\bar{z} \leq 1$. Or $z\bar{z} = (a + bj)(a + b\bar{j}) = a^2 + ab(j + \bar{j}) + b^2 j\bar{j}$.

$\bar{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2$ donc $j + \bar{j} = -1$ et $j\bar{j} = |j|^2 = 1$ donc $z\bar{z} = a^2 - ab + b^2$

et $|z| \leq 1$ équivaut à $a^2 - ab + b^2 - 1 \leq 0$. On considère $a^2 - ab + b^2 - 1$ comme un trinôme du second degré en a, trinôme dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4(b^2 - 1) = 4 - 3b^2$.

Si $4 - 3b^2 < 0$ c'est-à-dire $b^2 > \frac{4}{3}$ alors le trinôme $a^2 - ab + b^2 - 1$ est de signe constat, le signe du coefficient de a^2, c'est-à-dire $a^2 - ab + b^2 - 1 > 0$. Comme b est un entier, cette condition sera réalisée si $|b| \geq 2$.

$a^2 - ab + b^2 - 1 \leq 0$ ne sera donc réalisé que si $|b| \leq 1$ (b étant un entier, le contraire de $|b| \geq 2$ est $|b| \leq 1$).

Or, toujours comme b est un entier, $|b| \leq 1$ équivaut à $b \in \{-1,0,1\}$.

Si $b = -1$ alors $a^2 - ab + b^2 - 1 \leq 0$ s'écrit $a^2 + a \leq 0$ soit $a(a+1) \leq 0$. Les seules solutions entières de cette inéquation sont $a = -1, a = 0$.

Si $b = 0$ alors $a^2 - ab + b^2 - 1 \leq 0$ s'écrit $a^2 - 1 \leq 0$ soit $(a+1)(a-1) \leq 0$. Les seules solutions entières de cette inéquation sont $a = -1, a = 0, a = 1$.

Si $b = 1$ alors $a^2 - ab + b^2 - 1 \leq 0$ s'écrit $a^2 - a \leq 0$ soit $a(a-1) \leq 0$. Les seules solutions entières de cette inéquation sont $a = 0, a = 1$.

On obtient ainsi 7 éléments dans $Z[j]$ de module inférieur ou égal à 1 : $-1, 0, 1, -j, j, -1-j, 1+j$
et $b(Z[j]) = 7$.

d. Le produit de deux éléments non nuls de $Z[j]$ est bien un élément non nul de $Z[j]$.

Soit a_1, b_1, a_2, b_2 quatre entiers relatifs et $z_1 = a_1 + b_1 j$ et $z_2 = a_2 + b_2 j$ deux éléments non nuls de $Z[j]$. Il reste à vérifier que $z_1^2 + z_2^2 \neq 0$.

$z_1^2 + z_2^2 = 0$ équivaut à $z_1^2 = i^2 z_2^2$ soit $z_1 = iz_2$ ou $z_1 = -iz_2$

Or $z_1 = a_1 + b_1 j = \left(a_1 - \frac{1}{2}b_1\right) + i\frac{b_1\sqrt{3}}{2}$ et $iz_2 = -\frac{b_2\sqrt{3}}{2} + i\left(a_2 - \frac{1}{2}b_2\right)$

Montrons qu'aucune des égalités n'est possible. Si on fixe z_2, on cherche alors si les équations $\left(x - \frac{1}{2}y\right) + i\frac{y\sqrt{3}}{2} = -\frac{b_2\sqrt{3}}{2} + i\left(a_2 - \frac{1}{2}b_2\right)$ et $\left(x - \frac{1}{2}y\right) + i\frac{y\sqrt{3}}{2} = \frac{b_2\sqrt{3}}{2} - i\left(a_2 - \frac{1}{2}b_2\right)$ admettent au moins un couple d'entiers relatifs (x, y) solution.

La première équation équivaut au système $\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = -\frac{b_2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{y\sqrt{3}}{2} = a_2 - \frac{1}{2}b_2 \end{cases}$ dont l'unique couple solution est $\left(\frac{a_2 - 2b_2}{\sqrt{3}}, \frac{2a_2 - b_2}{\sqrt{3}}\right)$.

Les réels obtenus ne sont rationnels que s'ils sont nuls car $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Or $a_2 - 2b_2 = 0$ et $2a_2 - b_2 = 0$ que si $a_2 = b_2 = 0$ ce qui est exclus dès le départ.

De même, la deuxième équation équivaut au système $\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = \frac{b_2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{y\sqrt{3}}{2} = -a_2 + \frac{1}{2}b_2 \end{cases}$ dont l'unique couple solution est $\left(\frac{-a_2 + 2b_2}{\sqrt{3}}, \frac{-2a_2 + b_2}{\sqrt{3}}\right)$. Par un raisonnement analogue au précédent, ce couple ne peut pas être un couple de rationnels non nuls.

Donc $z_1^2 + z_2^2$ est bien un élément non nul de $Z[j]$ et $Z[j]$ est bien de type S.

Enfin les éléments de $Z[j]^*$ de module inférieur ou égal à 1 sont ceux non nuls de $Z[j]$ à savoir $-1, 1, -j, j, -1 - j, 1 + j$ et $(Z[j]^*) = 6$.

Remarque : ces éléments sont en fait les six racines sixièmes de l'unité.

2. ***a.*** Soit z_1 et z_2 deux éléments de $\mathcal{R} = \{z \in \mathbf{C}, z^2 \in Z[j]\}$.

$z_1^2 \in Z[j]$ et $z_2^2 \in Z[j]$. Or $(z_1 z_2)^2 = z_1^2 z_2^2$ et $Z[j]$ est de type S donc $z_1^2 z_2^2 \in Z[j]$ et $z_1 z_2 \in \mathcal{R}$.

De plus, $(z_1^2 + z_2^2)^2 = z_1^4 + z_2^4 + 2z_1^2 z_2^2$. Or $z_1^2 z_2^2 \in Z[j]$, par stabilité par produit $z_1^4 \in Z[j]$ et $z_2^4 \in Z[j]$ et, par stabilité par somme, $(z_1^2 + z_2^2)^2 \in Z[j]$ donc $z_1^2 + z_2^2 \in \mathcal{R}$.

On en déduit que $\mathcal{R}$ est de type S.

b. Un nombre complexe est de module inférieur ou égal à 1 si et seulement si son carré est de module inférieur ou égal à 1.

Les éléments de $\mathcal{R}$ de module inférieur ou égal à 1 sont donc les nombres complexes dont les carrés sont dans $Z[j]$ et de modules inférieurs ou égal à 1. Il s'agit donc, en plus du nombre 0, des racines douzièmes de l'unité (racines carrées des racines sixièmes).

$\mathcal{R} = \left\{0, -1, 1, -i, i, -e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{3}}, -e^{-i\frac{\pi}{6}}, e^{-i\frac{\pi}{6}}, -e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, -e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{6}}\right\}$ donc $b(\mathcal{R}) = 13$.

Dénombrement – Probabilités

Exercice 1 – Placement sur un table circulaire

Combien y a-t-il de façons différentes d'assoir 6 filles et 15 garçons autour d'une table circulaire de 21 places de sorte qu'il y ait au moins deux garçons entre deux filles.
On ne considèrera que les positions relatives des personnes entre elles.

Chacune des 6 filles a un garçon à sa gauche et un à sa droite. Pour respecter la consigne d'au moins deux garçons entre chaque fille, cela nécessite déjà 12 garçons distincts. Le nombre de choix ordonnés de ces 12 garçons parmi les 15 est $\frac{15!}{3!}$. Il reste 3 garçons à placer. Si on considère les 6 trios « une fille entre deux garçons » et les 3 garçons, cela donne 9 « groupes » (dont 3 réduits à une seule personne) à arranger autour de la table soit puisque seules les positions relatives sont prises en compte) $(9-1)! = 8!$ Possibilités.
Au total, il y a donc $\frac{15!}{3!} \times 8!$ façons d'assoir les 21 personnes.

Exercice 2 – Sommes et formule du binôme

Pour tout entier naturel n non nul, calculer les sommes $S_1 = \sum_{k=0}^{k=n} k^2 \binom{n}{k}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{k=n} k^2 \binom{2n}{2k}$

- Soit n un entier naturel non nul et la fonction polynôme P définie sur $\mathbf{R}$ par $P(x) = (1+x)^n$. La fonction P est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout réel x, $P'(x) = n(1+x)^{n-1}$

D'autre part, pour tout réel x, $P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k$ donc $P'(x) = \sum_{k=1}^{k=n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$.
Si $n \geq 2$, P est deux fois dérivable et $P''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{k=n} k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2}$.
Alors $S_1 = P'(1) + P''(1) = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$.
Si $n = 1$, $S_1 = 0 + 1\binom{1}{1} = 1$ et $n(n+1)2^{n-2} = 1 \times 2 \times 2^{1-2} = 1$.
Donc, pour tout entier naturel non nul n, $S_1 = n(n+1)2^{n-2}$.

- Soit maintenant Q la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $Q(x) = \frac{(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}}{2}$. En réutilisant la formule du binôme, on constate que les termes de puissances impaires de x s'annulent et que $Q(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{2n}{2k} x^{2k}$.

Alors, Q est dérivable et $Q'(x) = \frac{1}{2}(2n(1+x)^{2n-1} - 2n(1-x)^{2n-1}) = n((1+x)^{2n-1} - (1-x)^{2n-1})$
mais aussi $Q'(x) = \sum_{k=0}^{k=n} 2k \binom{2n}{2k} x^{2k-1}$.
Q est deux fois dérivable et $Q''(x) = n(2n-1)\left((1+x)^{2n-2} + (1-x)^{2n-2}\right)$
mais aussi $Q''(x) = \sum_{k=0}^{k=n} 2k(2k-1) \binom{2n}{2k} x^{2k-2}$.
D'où $S_2 = \frac{1}{4}(Q'(1) + Q''(1)) = \frac{1}{4}(n2^{2n-1} + n(2n-1)2^{2n-2}) = \frac{n}{4}2^{2n-2}(2 + 2n - 1) = n(2n+1)2^{2n-4}$

Exercice 3 – Relations entre coefficients

Soit n un entier naturel non nul et soit, pour tout $k, 0 \leq k \leq 2n$, a_k le coefficient de x^k dans le développement de l'expression $(1+x+x^2)^n$. Montrer que :

1. $a_0a_1 - a_1a_2 + a_2a_3 - \cdots - a_{2n-1}a_{2n} = 0$.
2. $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}^2 + (-1)^n a_n^2 = a_n$.
3. $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots = \frac{3^n+1}{2}$ et $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots = \frac{3^n-1}{2}$.
4. $a_k - na_{k-1} + \binom{n}{2}a_{k-2} + \cdots + (-1)^k\binom{n}{k}a_0 = 0$ si k n'est pas multiple de 3.

Les coefficients a_k sont tels que pour tout nombre réel x,
$(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$. (*)

Si, dans cette égalité (*), on remplace x par $\frac{1}{y}$ puis on multiplie les deux membres de l'égalité par y^{2n} , on obtient, pour tout réel y non nul :

$(y^2+y+1)^n = a_0 y^{2n} + a_1 y^{2n-1} + \cdots + a_{2n}$ (**)

Ceci prouve déjà la symétrie des coefficients a_k.

1. En remplaçant x par $-x$ dans (*), on obtient : $(1-x+x^2)^n = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n}$ (***)
comme , $(1+x+x^2)(1-x+x^2) = \big((x^2+1)+x\big)\big((x^2+1)-x\big) = (x^2+1)^2 - x^2 = x^4+x^2+1,$
en multipliant membre à membre (*) et (***),
$(x^4+x^2+1)^n = \sum_{k=0}^{k=4n} (-1)^k \big(a_0 a_k - a_1 a_{k-1} + \cdots + (-1)^k a_k a_0\big)\, x^k$ (****)
si on pose $a_k = 0$ pour tout $k \in \{2n+1, 2n+2, \dots, 4n\}$.
Les relations étant vraies pour une infinité de réels x, on peut identifier les coefficients de x^{2n-1} dans les deux membres de (****) et on obtient, par symétrie des coefficients a_k :
$a_0 a_{2n-1} - a_1 a_{2n-2} + a_2 a_{2n-3} - \cdots - a_{2n-1} a_{2n} = a_0 a_1 - a_1 a_2 + a_2 a_3 - \cdots - a_{2n-1} a_{2n} = 0.$

2. L'égalité s'obtient en considérant les coefficients de x^{2n} dans l'égalité   (****).

3. Les deux égalités s'obtiennent en posant $x = 1$ successivement dans les égalités (*) et (***).

4. L'égalité s'obtient en multipliant les deux membres de (*) par $(1-x)^n$

Exercice 4 – Principe des tiroirs

1. Parmi 17 scientifiques, chacun est en correspondance avec tous les autres. Dans leurs échanges de lettres, ils ne traitent que trois sujets. Lors d'un échange entre deux scientifiques, ces derniers ne traitent que d'un seul sujet.
Montrer qu'il y a au moins 3 scientifiques qui traitent un seul et même sujet**.**

2. Dix joueurs ont pris part à un tournoi d'échecs où chaque joueur doit jouer exactement une partie contre tous les autres joueurs. Un joueur marque 1 point s'il gagne un duel, il perd un point s'il perd le duel et 0 point clôt un duel avec match nul. A la fin du tournoi, on constate que plus de 70% se sont terminés par un match nul.
Montrer que deux joueurs ont le même score final.

1. On commence par choisir un scientifique, noté S. Comme il y a 17 scientifiques et seulement trois sujets traités, S échange des lettres sur un seul sujet avec au moins 6 autres scientifiques, d'après le principe des tiroirs. En ne gardant que ces 6 scientifiques :
- soit il y en a deux qui correspondent sur le même sujet que celui des lettres reçues ou échangées avec S et on a terminé ;
- soit deux d'entre eux correspondent sur un des deux autres sujets restants et alors, on recommence le même raisonnement en appliquant le principe des tiroirs à ces six scientifiques : deux d'entre eux échangent des lettres sur l'un des deux sujets possibles.

2. Le nombre de duels avec 10 joueurs est $\binom{10}{2} = 45$. Comme $\frac{70}{100} \times 45 = 31{,}5$ et plus de 70% se sont terminés par un match nul, il y a eu au moins 32 duels se terminant par un match nul soit au plus $45 - 32 = 13$ duels ne se terminant pas par un match nul. Si on suppose que les 10 joueurs ont des scores totaux tous distincts alors, en particulier, au plus un joueur a un score total nul. Cela signifie qu'au moins 9 joueurs ont des scores totaux strictement positifs ou strictement négatifs. Si ces 9 joueurs jouent le rôle des chaussettes et les signes ceux des tiroirs (un tiroir des positifs et un tiroir des négatifs) alors, d'après le principe des tiroirs, au moins 5 joueurs ont des scores totaux strictement positifs ou au moins 5 joueurs ont des scores totaux strictement négatifs. Par symétrie, on se place dans le premier cas. La somme des scores totaux (tous différents) positifs est donc au moins égale à $1+2+3+4+5 = 15$. Cela implique qu'au moins 15 duels ne se sont pas terminés par un match nul ce qui contredit « au plus $45 - 32 = 13$ duels ne se terminant pas par un match nul ».
Conclusion : deux joueurs ont obtenu le même score total.

Exercice 5 – tiré du Concours général 2021

Soit n un entier naturel non nul. Dans un sac, on place $2n+1$ boules indiscernables au toucher et numérotées $0,1,2,\ldots,2n$. On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :
— on tire trois boules simultanément ;
— si les trois boules tirées ont pour numéros a, b et c, avec $a < b < c$, on élimine les boules de numéros a et c puis on replace dans le sac la boule de numéro b ;
— on recommence les opérations précédentes.
Au bout de n tirages, il ne reste plus qu'une seule boule, et on note D_n son numéro. Pour tout entier k, on note $P(D_n = k)$ la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro k.

I – Étude des petits cas

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire D_1.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire D_2.

II – Valeurs extrêmes et symétrie

1. Déterminer la probabilité $P(D_n = 0)$.
2. Déterminer la probabilité $P(D_n = 1)$ en fonction de n.
3. Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq 2n$. Pourquoi a-t-on $P(D_n = i) = P(D_n = 2n - i)$?
4. Calculer l'espérance de la variable aléatoire D_n en fonction de n.

Les boules étant indiscernables au toucher, les conditions de tirage assurent l'équiprobabilité.

Partie I

1. Lorsque $n = 1$, le sac contient trois boules numérotées 0, 1 et 2. La boule numérotée 1 est nécessairement la dernière boule restante donc D_1 ne prend que la valeur 1 avec la probabilité 1.
2. Lorsque $n = 2$, le sac contient cinq boules numérotées 0, 1, 2, 3, 4 et, lors de la première étape, on a $\binom{5}{3} = 10$ tirages distincts possibles. On replace une boule dans le sac qui en contient alors trois qu'on tire pour la deuxième étape et a boule qui reste est déterminée. On peut ainsi décrire toutes les situations dans le tableau ci-dessous.

Premier tirage	Boule remise	Boules dans le sac	Dernière boule
0, 1, 2	1	1, 3, 4	3
0, 1, 3	1	1, 2, 4	2
0, 1, 4	1	1, 2, 3	2
0, 2, 3	2	1, 2, 4	2
0, 2, 4	2	1, 2, 3	2
0,3, 4	3	1, 2, 3	2
1, 2, 3	2	0, 2, 4	2
1, 2, 4	2	0, 2, 3	2
1, 3, 4	3	0, 2, 3	2
2, 3, 4	3	0, 1, 3	1

D'où $P(D_2 = 1) = P(D_2 = 3) = \frac{1}{10}$ et $P(D_2 = 2) = \frac{8}{10}$.

Partie II

1. Dans tout tirage, si la boule 0 est tirée, elle est nécessairement la plus petite donc éliminée. On obtient $P(D_n = 0) = 0$.
   On peut remarquer que de même $P(D_n = 2n) = 0$ et que D_n ne peut prendre que les valeurs $1, 2, \ldots, 2n-1$.
2. La boule numérotée 1 reste la dernière uniquement lorsque le dernier tirage donne les boules 0, 1 et une autre boule. Cela signifie que les boules 0 et 1 n'ont pas été obtenues lors des $(n-1)$ premiers tirages.
   Pour faire le premier tirage (de 3 boules parmi $2n+1$), il y a $\binom{2n+1}{3} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6} = \frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$ résultats possibles. Parmi ces résultats, il y en a $\binom{2n-1}{3} = \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{6} = \frac{(2n-1)(n-1)(2n-3)}{3}$ qui ne contiennent pas les boules 0 et 1. La probabilité que les boules 0 et 1 ne soient pas tirées est donc $\frac{(n-1)(2n-3)}{n(2n+1)}$.

Pour faire le deuxième tirage, il reste $2n-1$ boules dans le sac (dont les boules 0 et 1), et la probabilité que ce tirage ne contienne pas les boules 0 et 1 est $\frac{\binom{2n-3}{3}}{\binom{2n-1}{3}} = \frac{(2n-5)(n-2)}{(2n-1)(n-1)}$.

On reproduit le même raisonnement à chaque étape…

Pour faire le $(n-2)^{\text{e}}$ tirage, il reste 7 boules dans le sac (dont les boules 0 et 1), et la probabilité que ce tirage ne contienne pas les boules 0 et 1 est $\frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{5\times3\times2}{7\times6\times5}$.

Pour faire le $(n-1)^{\text{e}}$ tirage, il reste 5 boules dans le sac (dont les boules 0 et 1), et la probabilité que ce tirage ne contienne pas les boules 0 et 1 est $\frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1\times3\times1}{5\times3\times2}$.

Au final, on obtient la probabilité $P(D_n = 1)$ en multipliant entre elles les probabilités obtenues précédemment, soit $\frac{\binom{2n-1}{3}}{\binom{2n+1}{3}} \times \frac{\binom{2n-3}{3}}{\binom{2n-1}{3}} \times \frac{\binom{2n-5}{3}}{\binom{2n-3}{3}} \times \ldots \times \frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} \times \frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{\binom{2n+1}{3}} = \frac{3}{n(2n-1)(2n+1)}$.

3. Si on imagine faire une double numérotation de chaque boule en ajoutant à la boule numérotée i la numérotation $2n-i$, on peut définir une nouvelle variable aléatoire qui prend comme valeur la nouvelle numérotation. Comme le protocole de l'expérience reste inchangé, cette nouvelle variable aléatoire $D_n{}'$ suit la même loi que D_n et $P(D_n = i) = P(D_n{}' = i)$. Or « $D_n{}' = i$ » équivaut à « $D_n = 2n - i$ »
   Donc, pour tout i tel que $0 \leq i \leq 2n$, $P(D_n = i) = P(D_n = 2n - i)$.
4. La variable aléatoire D_n prend les valeurs entières comprises entre 1 et $2n-1$
   donc $E(D_n) = \sum_{i=1}^{i=2n-1} i\ P(D_n = i)$. (*)
   En appliquant le résultat de la question précédente et en posant $k = 2n - i$, on peut aussi écrire $E(D_n) = \sum_{k=1}^{k=2n-1}(2n-k)\ P(D_n = 2n-k) = \sum_{k=1}^{k=2n-1}(2n-k)\, P(D_n = k)$
   ce qui s'écrit aussi $E(D_n) = \sum_{i=1}^{i=2n-1}(2n-i)\, P(D_n = i)$ (**).
   En ajoutant membre à membre (*) et (**), on obtient $2E(D_n) = \sum_{i=1}^{i=2n-1}(2n-i+i)\, P(D_n = i)$
   Soit $2E(D_n) = 2n\sum_{i=1}^{i=2n-1} P(D_n = i) = 2n$ donc $E(D_n) = n$.