ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Préparation au concours général de mathématiques

Année 2021-2022
Fiche numéro 2

Exercice 1

a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :
$a^{2^n} - 1 = (a-1)(a+1)(a^2+1))(a^4+1) \dots)(a^{2^{n-1}}+1)$

b. En déduire que pour tout entier $n > 1$ et pour tout entier a impair, $a^{2^n} - 1$ est un multiple de 2^{n+2}

c. Montrer qu'un entier, $n > 1$, est impair si et seulement si n divise $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$.

a. Pour $n = 1$, $a^{2^n} - 1 = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ et la propriété est vérifiée
Si, pour un entier n, on a $a^{2^n} - 1 = (a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1) \dots)(a^{2^{n-1}}+1)$ alors
$a^{2^{n+1}} - 1 = \left(a^{2^n}\right)^2 - 1 = \left(a^{2^n} - 1\right)\left(a^{2^n}+1\right) = (a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1) \dots)(a^{2^{n-1}}+1)\left(a^{2^n}+1\right)$
Et la propriété est encore vraie au rang $n+1$.
On a donc bien, tout entier naturel non nul n, $a^{2^n} - 1 = (a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1) \dots)(a^{2^{n-1}}+1)$.

b. Comme a est impair, il existe un entier p tel que $a = 2p+1$.
Alors $(a-1)(a+1) = 2p(2p+2) = 4p(p+1)$. Or le produit de deux entiers consécutifs est pair donc le nombre $(a-1)(a+1)$ est un multiple de $8 = 2^3$.
Chacun des $n-1$ facteurs du produit $(a^2+1)(a^4+1) \dots)(a^{2^{n-1}}+1)$ est pair (somme de deux nombres impairs).
Au final $a^{2^n} - 1$ est multiple de $2^3 \times 2^{n-1} = 2^{n+2}$.

c. Posons $S_n = 1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$.

- Si n est impair, alors pour tout entier k, $2 \leq k \leq n-1$, $k^n + (n-k)^n$ est divisible par n car le seul terme du développement de $(n-k)^n$ non divisible par n est $(-k)^n$ soit $-k^n$ si n est impair. On en déduit que n divise $2S_n$ et donc n divise S_n car n est impair.
- Si n est pair, alors il existe un entier $a \geq 1$ et un entier m impair tels que $n = 2^a m$.
  - Si k est impair, alors d'après le b, $k^{2^a} - 1$ est un multiple de 2^a soit $k^{2^a} \equiv 1 \ [2^a]$ d'où $\left(k^{2^a}\right)^m \equiv 1 \ [2^a]$;
  - Si k est pair, alors $\left(k^{2^a}\right)^m \equiv 0 \ [2^a]$ et $S_n \equiv 1 + 1 + \dots + 1 \ [2^a]$, somme dans laquelle on n'a gardé que les valeurs de k paires, valeurs au nombre de $\frac{n}{2} = 2^{a-1}m$ mais alors n ne peut diviser S_n.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul, on appelle index d'abondance le nombre $I_n = \frac{S(n)}{n}$, où $S(n)$ est la somme de tous les diviseurs positifs de n, y compris 1 et n.

a. Démontrer que pour tout nombre premier p, $I_p \leq \frac{3}{2}$.

b. Démontrer que pour tout nombre premier impair p et pour tout entier strictement positif k, $I\left(p^k\right) < 2$.

c. Soit p et q deux nombres premiers distincts et soit a et b deux entiers positifs.
Démontrer que $I(p^a)I\left(q^b\right) = I\left(p^a q^b\right)$.

d. Déterminer le plus petit entier impair positif n tel que $I(n) > 2$.

a. Soit p un nombre premier. Ses deux diviseurs sont 1 et p donc $I(p) = \frac{1+p}{p} = \frac{1}{p} + 1$
Comme $p \geq 2$, on en déduit que $I(p) \leq \frac{3}{2}$.

b. Soit p un nombre premier impair. On a donc $p \geq 3$ et si k est un entier positif, alors les diviseurs positifs de p^k sont $1, p, p^2, \dots, p^{k-1}, p^k$ donc $I\left(p^k\right) = \frac{1+p+p^2+\dots+p^{k-1}+p^k}{p^k} = \frac{1}{p^k} + \frac{1}{p^{k-1}} + \dots + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + 1 = \frac{1-\frac{1}{p^{k+1}}}{1-\frac{1}{p}}$
On en déduit que $I\left(p^k\right) < \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ soit $I\left(p^k\right) < \frac{p}{p-1}$ soit $I\left(p^k\right) < 1 + \frac{1}{p-1}$.

Comme $p \geq 3$, $\frac{1}{p-1} \leq \frac{1}{2}$. d'où $I(p^k) < 1 + \frac{1}{p-1} \leq 2$ d'où $I(p^k) < 2$.

c. Comme p est un nombre premier, les diviseurs positifs de p^k sont $1, p, \dots, p^k$ donc $I(p^2) = \frac{1+p+\cdots+p^k}{p^k}$.

Comme q est un nombre premier, on a de même $I(q^l) = \frac{1+q+\cdots+q^l}{q^b}$.

En regroupant « astucieusement » les diviseurs de $p^k q^l$, on a :

$I(p^k q^l) = \frac{1+p+\cdots+p^k+q(1+p+\cdots+p^k)+\cdots+q^l(1+p+\cdots+p^k)}{p^k q^l} = \frac{(1+p+\cdots+p^k)(1+q+\cdots+q^l)}{p^k q^l} = I(p^k)I(q^l)$

d. D'après le a. un entier n tel que $I(n) > 2$ est nécessairement non premier.

Il existe donc m entiers premiers $p_1, p_2, \dots, p_m$ deux à deux distincts et m entiers naturels non nuls $k_1, k_2, \dots, k_m$ tels que $n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2} \dots {p_m}^{k_m}$.

- En prolongeant le résultat obtenu à la question c, on peut alors écrire $I(n) = I({p_1}^{k_1})I({p_2}^{k_2}) \dots I({p_m}^{k_m})$.
- Soit p et q sont deux nombres premiers tels que $p < q$ et soit k un entier positif. Alors, comme

$I(p^k) = \frac{1+p+p^2+\cdots+p^{k-1}+p^k}{p^k} = \frac{1}{p^k} + \frac{1}{p^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + 1$

Et $I(q^k) = \frac{1+q+q+\cdots+q^k}{q^k} = \frac{1}{q^k} + \cdots + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1$

Comme $0 < p < q$, pour tout entier l compris entre 1 et k, $\frac{1}{p^l} > \frac{1}{q^l}$ donc $I(p^k) > I(q^k)$.

- Soit p un nombre premier et a, b deux entiers positifs tels que $a < b$. Alors $I(p^a) = \frac{1-\frac{1}{p^{a+1}}}{1-\frac{1}{p}}$

  et $I(p^b) = \frac{1-\frac{1}{p^{b+1}}}{1-\frac{1}{p}}$. Comme $p > 1$ et $0 < a < b$, $p^{a+1} < p^{b+1}$ d'où $\frac{1}{p^{a+1}} > \frac{1}{p^{b+1}}$ d'où $1 - \frac{1}{p^{a+1}} < 1 - \frac{1}{p^{b+1}}$

  et comme $p > 2$, $1 - \frac{1}{p} > 0$ donc $I(p^a) < I(p^b)$.

On en déduit que le plus petit entier n tel que $I(n) > 2$ doit avoir, dans sa décomposition en produit de facteurs premiers, des « petits » facteurs premiers, facteurs supérieurs ou égaux à 3 puisque n est impair.

Or, d'après le,b $I(p^k) < \frac{p}{p-1}$ d'où $I(3^a) < \frac{3}{2}$ et $I(5^b) < \frac{5}{4}$ et d'après le c, $I(3^a 5^b) = I(3^a)I(5^b)$

donc $I(3^a 5^b) < \frac{15}{8} < 2$. Il est donc nécessaire d'avoir au moins trois nombres premiers distincts dans la décomposition de n.

On tente avec la décomposition $n = 3^a 5^b 7^c$ où a, b, c sont les plus petits possibles :

a	b	c	n	$I(n)$
1	1	1	105	$I(n) = I(3)I(5)I(7) = \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{7} = \frac{64}{35}$
2	1	1	315	$I(n) = I(3^2)I(5)I(7) = \frac{13}{9} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{7} = \frac{208}{105}$
3	1	1	945	$I(n) = I(3^3)I(5)I(7) = \frac{40}{27} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{7} = \frac{128}{63}$

On constate que $I(945) < 2$ et on peut vérifier que 945 est bien le plus petit entier n impair dont l'index d'abondance est strictement inférieur à 2.

En effet :

- on a vu qu'il est nécessaire de se limiter aux plus petits facteurs premiers ;
- avec les mêmes facteurs premiers, l'index d'abondance augmente avec les exposants de ces facteurs ;
- si n a quatre facteurs premiers à savoir 3, 5, 7 et 11, alors $n > 3 \times 5 \times 7 \times 11$ soit $n > 1\,155$;
- si $n = 3^a 5^b 7^c$ les plus petites valeurs de n sont celles pour lesquelles $a \geq b \geq c$.

Exercice 3 (Olympiades Internationales 2006)

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On considère un point P intérieur au triangle ABC et tel que : (i) $\widehat{\mathrm{PBA}} + \widehat{\mathrm{PCA}} = \widehat{\mathrm{PBC}} + \widehat{\mathrm{PCB}}$.

Montrer que $\mathrm{AP} \geq \mathrm{AI}$ et que l'égalité n'est vérifiée que lorsque $\mathrm{P} = \mathrm{I}$.

(on pourra s'appuyer sur :

- le théorème dit de l'angle inscrit : la mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre interceptant le même arc ;
- son corollaire : si quatre points deux à deux distincts A, B, C et D sont sur un cercle et du même côté de la droite (AB) alors $\widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{ADC}}$;
- sa réciproque : si quatre points deux à deux distincts A, B, C et D sont tels que $\widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{ADC}}$ alors les quatre points sont cocycliques et les points C et D sont du même côté de la droite (AB).

Le point P est à l'intérieur du triangle ABC donc :

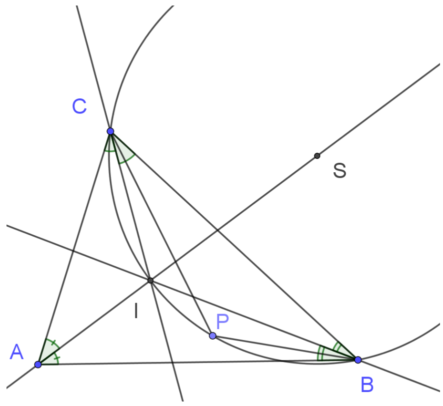
$$\widehat{\mathrm{PBA}} + \widehat{\mathrm{PCA}} = \left(\widehat{\mathrm{CBA}} - \widehat{\mathrm{PBC}}\right) + \left(\widehat{\mathrm{BCA}} - \widehat{\mathrm{PCB}}\right)$$
$$= \widehat{\mathrm{CBA}} + \widehat{\mathrm{BCA}} - \widehat{\mathrm{PBC}} - \widehat{\mathrm{PCB}}$$

L'égalité (i) vérifiée par le point P s'écrit donc :

$2\left(\widehat{\mathrm{PBC}} + \widehat{\mathrm{PCB}}\right) = \widehat{\mathrm{CBA}} + \widehat{\mathrm{BCA}} = 180° - \widehat{\mathrm{BAC}}$ (somme des mesures des angles d'un triangle)

soit $\widehat{\mathrm{PBC}} + \widehat{\mathrm{PCB}} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{BAC}}$ soit $180° - \widehat{\mathrm{BPC}} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{BAC}}$ c'est-à-dire $\widehat{\mathrm{BPC}} = 90° + \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{BAC}}$.

On constate que la valeur de $\widehat{\mathrm{BPC}}$ ne dépend pas de P. Or, par définition du point I, $\widehat{\mathrm{IBA}} + \widehat{\mathrm{ICA}} = \widehat{\mathrm{IBC}} + \widehat{\mathrm{ICB}}$ donc I vérifie (i).



On en déduit que le lieu des points P vérifiant (i) est celui des points P tels que $\widehat{\mathrm{BPC}} = \widehat{\mathrm{BIC}}$, c'est-à-dire l'arc du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC contenant I (réciproque citée ci-dessus dans l'énoncé).
Pour démontrer que $\mathrm{AP} \geq \mathrm{AI}$, il suffit alors de prouver que I est le point du cercle $\mathcal{C}$ le plus proche de A. Soit S le centre de $\mathcal{C}$. Pour tout point P de $\mathcal{C}$, $\mathrm{AS} \leq \mathrm{AP} + \mathrm{PS}$ soit $\mathrm{AS} \leq \mathrm{AP} + \mathrm{IS}$ soit $\mathrm{AS} - \mathrm{IS} \leq \mathrm{AP}$.
Montrons que $\mathrm{I} \in [\mathrm{AS}]$. $\widehat{\mathrm{AIC}} + \widehat{\mathrm{CIS}} = \left(180° - \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{CAB}} - \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{ACB}}\right) + \frac{1}{2}\left(180° - \widehat{\mathrm{CSI}}\right)$ en se plaçant dans le triangle ABC puis dans le triangle CIS isocèle en S. Or, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\frac{1}{2}\widehat{\mathrm{CSI}} = \widehat{\mathrm{CBI}}$ et, par définition de I, $\widehat{\mathrm{CBI}} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{CBA}}$. Donc $\widehat{\mathrm{AIC}} + \widehat{\mathrm{CIS}} = 180° + 90° - \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{CAB}} - \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{ACB}} - \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{CBA}} = 180° + 90° - \frac{1}{2}180° = 180°$.
On a donc bien $\mathrm{I} \in [\mathrm{AS}]$ d'où $\mathrm{AS} - \mathrm{IS} = \mathrm{AI}$ et on en tire $\mathrm{AI} \leq \mathrm{AP}$, l'égalité n'ayant lieu que si P et I sont confondus.

(cette solution est tirée du livre Olympiades internationales de mathématiques 2006-2021 aux éditions Cassini)

Exercice 4 (Olympiades internationales 2008)

1. Montrer que pour tous nombres réels x, y et z différents de 1 et tels que $xyz = 1$, on a :
$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$
2. Montrer qu'il existe une infinité de triplets (x, y, z) de nombres rationnels différents de 1 et tels que $xyz = 1$ pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

1. On pose $a = \frac{x}{x-1}$, $b = \frac{y}{y-1}$ et $c = \frac{z}{z-1}$, ce qui équivaut à $x = \frac{a}{a-1}$, $y = \frac{b}{b-1}$ et $z = \frac{c}{c-1}$.

On est ramené à montrer que si a, b, c sont différents et de 1 et vérifient $abc = (a-1)(b-1)(c-1)$, ce qui s'écrit aussi $abc = abc - ab - bc - ca + a + b + c + 1$ soit $ab + bc + ca = a + b + c - 1$, alors $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$.
Or, pour de tels réels, $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - 2(a + b + c) + 1$
Soit $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c - 1)^2 + 1$.
On en déduit que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$ et l'inégalité est une égalité si et seulement si $a + b + c = 1$

2. Dans le changement de variable effectué à la question 1, on remarque que x, y, z sont rationnels si et seulement si a, b, c sont rationnels. On se ramène donc à chercher des rationnels a, b, c différents de 1 et tels que $1 = a + b + c = 1 + ab + bc + ca$ ce qui revient au système $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \end{cases}$

qui s'écrit aussi $\begin{cases} a + b = -c + 1 \\ ab = -c(a + b) = c(c - 1) \end{cases}$. On sait que cela signifie que a et b sont les solutions de l'équation $X^2 - (1 - c)X + c(c - 1) = 0$, équation dont le discriminant est $\Delta = (1 - c)^2 - 4c(c - 1) = (1 - c)(1 + 3c)$.

L'équation et donc le système auront des solutions rationnelles si et seulement si Δ est le carré d'un nombre rationnel. On cherche donc deux entiers p et q tels que $c = \frac{p}{q}$ et $\Delta = \left(1 - \frac{p}{q}\right)\left(1 + 3\frac{p}{q}\right) = \frac{(q-p)(q+3p)}{q^2}$ soit le carré d'un nombre rationnel.

Pour cela, il suffit qu'il existe deux entiers u et v tels que $q - p = u^2$ et $q + 3p = v^2$ c'est-à-dire $p = \frac{v^2-u^2}{4}$ et $q = \frac{3u^2+v^2}{4}$.

Si on pose $u = 2n$ et $v = 2(n + 1)$ où n est un entier naturel non nul alors $u^2 = 4n^2$ et $v^2 = 4(n + 1)^2$ d'où $p = \frac{2n+1}{4}$ et $q = \frac{4n^2+2n+1}{4}$ d'où $c = \frac{p}{q} = \frac{2n+1}{4n^2+2n+1}$ et $\Delta = \frac{u^2v^2}{q^2} = \left(\frac{4n(n+1)}{4n^2+2n+1}\right)^2$.

On en tire d'une part $a = \frac{1}{2}(1 - c + \sqrt{\Delta}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2n+1}{4n^2+2n+1} + \frac{4n(n+1)}{4n^2+2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8n^2+4n}{4n^2+2n+1}\right) = \frac{2n(2n+1)}{4n^2+2n+1}$

Et $a - 1 = \frac{2n(2n+1)}{4n^2+2n+1} - 1 = \frac{2n(2n+1)-(4n^2+2n+1)}{4n^2+2n+1} = \frac{-1}{4n^2+2n+1}$ d'où $x = \frac{a}{a-1} = -2n(2n + 1)$.

D'autre part $b = \frac{1}{2}(1 - c - \sqrt{\Delta}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2n+1}{4n^2+2n+1} - \frac{4n(n+1)}{4n^2+2n+1}\right) = \frac{-2n}{4n^2+2n+1}$

Et $b - 1 = \frac{-2n}{4n^2+2n+1} - 1 = \frac{-2n-4n^2-2n-1}{4n^2+2n+1} = \frac{-(2n+1)^2}{4n^2+2n+1}$ d'où $y = \frac{2n}{(2n+1)^2}$

Enfin $c = \frac{2n+1}{4n^2+2n+1}$ d'où $c - 1 = \frac{2n+1-4n^2-2n-1}{4n^2+2n+1} = \frac{-4n^2}{4n^2+2n+1}$ donc $z = \frac{2n+1}{-4n^2}$.

(on peut vérifier ses calculs puisqu'avec ces valeurs on a bien $xyz = 1$)

Chaque valeur de n donne un triplet solution du problème. Il y a donc bien une infinité de triplets (x, y, z) de rationnels solutions.

(cette solution est tirée du livre Olympiades internationales de mathématiques 2006-2021 aux éditions Cassini)

Exercice 5

1. Soit a, b et c trois nombres réels strictement positifs tels que : $a + \frac{b}{c} = b + \frac{c}{a} = c + \frac{a}{b} = 2$. (R)
   Déterminer la valeur de $a + b + c$.
2. Soit x, y et z trois nombres rationnels deux à deux distincts.
   Montrer que $\frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$ est le carré d'un nombre rationnel.

1. Remarquons déjà que le triplet $(1,1,1)$ vérifie les relations (R) et qu'alors $a + b + c = 3$.

Les relations (R) s'écrivent :

- d'une part $ac + b = 2c, ba + c = 2a, cb + a = 2b$ d'où l'on tire $ac + ba + cb + b + c + a = 2(c + b + a)$ soit $a + b + c = ab + bc + ca$ (1)
- d'autre part $acb + b^2 = 2bc, bac + c^2 = 2ca, cba + a^2 = 2ab$ d'où l'on tire $3abc + a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$. (2)

On a de plus, $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$ (3)

Enfin, d'après relations (R), $1 = \frac{b}{c} \times \frac{c}{a} \times \frac{a}{b} = (2 - a)(2 - b)(2 - c)$

Soit $1 = (2 - a)(4 - 2b - 2c + bc) = 8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) - abc$. (4)

Posons $X = a + b + c$. D'après (1), $X = ab + bc + ca$.

D'après (2), $3abc = 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)$ soit, d'après (3)

$3abc = 2(ab + bc + ca) - (a + b + c)^2 + 2(ab + bc + ca) = 4(ab + bc + ca) - (a + b + c)^2 = 4X - X^2$

D'autre part, d'après (4), $abc = -1 + 8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) = 7 - 4X + 2X = 7 - 2X$

Le nombre X est donc solution de l'équation $\frac{4X-X^2}{3} = 7-2X$ soit $X^2 - 10X + 21 = 0$. Les solutions de cette équation sont 3 et 7.
Si $a+b+c=7$ alors comme $a+\frac{b}{c}+b+\frac{c}{a}+c+\frac{a}{b}=6, \frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}=6-7=-1$ ce sui est impossible pour des nombres tous strictement positifs.
On a vu qu'en revanche il était possible d'obtenir $a+b+c=3$ qui est donc la seule valeur pour $a+b+c$.
2. Posons $a=\frac{1}{y-z}, b=\frac{1}{z-x}, c=\frac{1}{x-y}$.
Alors $ab+bc+ca=\frac{1}{(y-z)(z-x)}+\frac{1}{(z-x)(x-y)}+\frac{1}{(x-y)(y-z)}$
Soit $ab+bc+ca=\frac{1}{(x-y)(y-z)(z-x)}\big((x-y)+(y-z)+((-x)\big)=0$
En reprenant l'égalité (3) de la question précédente, on en déduit que $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$
C'est-à-dire $\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}$ est le carré du nombre rationnel $\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}$.