## *Partie académique : éléments de solution*

## Exercice 4 - Entiers $n$-sommables

**1.** Cas $n = 4$

**a.** $4 = 1 + 2 - 3 + 4$

**b.** Le plus grand entier 4-sommable est obtenu en complétant avec des sommes : $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

**c.** Le plus petit est obtenu en complétant avec des soustractions : $1 - 2 - 3 - 4 = -8$.

**d.** On a déjà $-8$ et $10$ qui sont 4-sommables. On complète avec les nombres obtenus avec 2 puis 1 soustractions

| | |
|---|---|
| $-8 = 1 - 2 - 3 - 4$ | $2 = 1 + 2 + 3 - 4$ |
| $-4 = 1 + 2 - 3 - 4$ | $4 = 1 + 2 - 3 + 4$ |
| $-2 = 1 - 2 + 3 - 4$ | $6 = 1 - 2 + 3 + 4$ |
| $0 = 1 - 2 - 3 + 4$ | $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ |

On aurait pu également remarquer que puisqu'il existe seulement 8 décompositions différentes ($2 \times 2 \times 2$), qu'il n'y avait pas d'autres entiers 4-décomposables.
Finalement, l'ensemble des entiers 4-sommables est $\{-8, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 10\}$.

**2.** Pour tout réel $a$, $a - (a + 1) - (a + 2) + (a + 3) = 0$
On a donc $(1 - 2 - 3 + 4) + (5 - 6 - 7 + 8) + \cdots + (97 - 98 - 99 + 100) = 0$ donc est 100-sommable.

**3. a.** Soit $N$ et $M$ deux entiers $n$-sommables alors $N + M = 2 + k_2 \times 2 + k_3 \times 3 + \cdots k_i \times i + \cdots + k_n \times n$ où $k_i$ vaut 0 si $N$ et $M$ ont des signes différents devant $i$ et vaut $-2$ ou $2$ sinon.
Donc $N + M$ est une somme de nombres pairs donc est pair et par conséquent, $N$ et $M$ ont même parité.

**b.** Tout d'abord, on doit avoir $1 + 2 + \cdots + n \geq 2023$ soit $n^2 + n \geq 4046$. En résolvant l'inéquation du second degré ou avec un tableur on obtient $n \geq 64$.
Pour $n = 64$ : $1 + 2 + \cdots + 64 = \frac{64 \times 65}{2} = 2080$ est pair donc, d'après le **a.**, tous les entiers 64-sommables sont pairs, 2023 n'est pas 64-sommable.
$Pour\ n = 65$ : $1 + 2 + \cdots + 65 = \frac{65 \times 66}{2} = 2145$ et $2145 - 2023 = 122 = 2 \times 61$ donc :

$$2023 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 60 - 61 + 62 + 63 + 64 + 65$$

Le plus petit entier $n$ tel que 2023 soit $n$-sommable est 65.

**c.** Si $S = 1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$ (où $a_i = \pm 1$) alors $2 - S = 1 - 2a_2 - 3a_3 - \cdots - na_n$ qui est donc bien $n$-sommable.

**d.** Tout d'abord, $M = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.
Soit $N$ un autre entier $n$-sommable, $N = 1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$ où $a_i = \pm 1$
On a donc $M - N = 2(1 - a_{2)} + 3(1 - a_3) + \cdots + n(1 - a_n)$ avec $1 - a_i \geq 0$. Comme $M \neq N$, au moins un des $1 - a_i$ est non nul et $(1 - a_i)i \geq 4$ car $i \geq 2$. On en déduit $M - N \geq 4$ soit $N \leq M - 4$.
Si $m + 2$ était $n$-sommable, $2 - (m + 2) = M - 2$ le serait également d'après la question précédente (1.c).

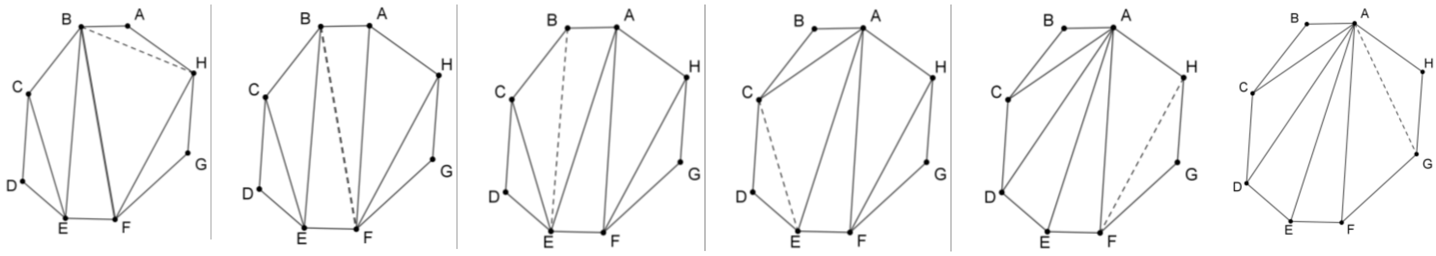
**e.** Tout d'abord, $1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$ donc tous les entiers 100-sommables sont pairs.
Soit $N$ un entier 100-sommable strictement positif et $X$ la somme des entiers *soustraits* dans la décomposition de $N$, alors $N = 5050 - 2 \times X$.
Ainsi, $X$ vaut 0 ou la somme d'une partie des entiers compris entre 2 et 100 et $X \leq 2524$ puisque $N > 0$.
Prenons maintenant un nombre entier $X$ compris entre 2 et 2524.
On a $100 + 99 + \cdots + 1 > 2524$ donc il existe un entier naturel non nul $k$ tel que :

$$(k + 1) + (k + 2) + \cdots + 100 \leq X < k + (k + 1) + \cdots + 100$$

Alors $X = (k + 1) + \cdots + 100 + d$, soit $d = X - \big((k + 1) + \cdots + 100\big)$, et $0 \leq d < k$.
Donc $X$ est somme d'une partie des entiers compris entre 2 et 100.
Il y a 2524 possibilités différentes pour $X$ : tous les entiers compris entre 2 et 2524 auxquels on ajoute 0. Il y a donc 2524 entiers 100-sommables strictement positifs.
D'après la question **c.** et comme $N \geq 2$, il y a autant de négatifs 100-sommables, obtenus en faisant $2 - N$.
On a donc au total 5048 nombres 100-sommables : tous les nombres pairs compris entre $-5048$ et $5050$ exceptés $-5046$ et $5048$.

# Exercice 5 -Triangulations et retournements

**1. a.** On peut utiliser la suite de retournements ci-dessous :




**b.** Il suffit de remarquer que le processus est réversible.

**2. a.** Il y a n sommets, dont A et ses deux voisins. Une triangulation utilise donc $n-3$ diagonales et détermine alors $n-2$ triangles.

La triangulation divise les angles intérieurs de $\mathcal{P}$ afin de former les angles intérieurs des $n-2$ triangles. La somme des mesures des angles intérieurs de $\mathcal{P}$ est ainsi égale à la somme des mesures des angles intérieurs de ces $n-2$ triangles, et elle vaut donc $(n-2)180°$.

**b.** Toute triangulation divise les angles intérieurs de $\mathcal{P}$ afin de former les angles intérieurs des triangles. Appelons $t$ le nombre de triangles d'une triangulation donnée. La somme des mesures des angles intérieurs de $\mathcal{P}$ est ainsi égale à la somme des mesures des angles intérieurs de ces t triangles, et on a donc :

$(n-2)180° = t \times 180°$ soit $t = n-2$.

Ainsi toute triangulation de $\mathcal{P}$ est formée de $n-2$ triangles.

**3. a.** On note B et C les sommets adjacents au sommet A.

Si [BC] n'est pas une diagonale de $\mathcal{T}$, le triangle ABC n'est pas un des triangles définis par $\mathcal{T}$. Il existe alors une diagonale issue du sommet A, diagonale qu'on note [AX].

Si [BC] est une diagonale de $\mathcal{T}$, [BC] est un côté d'un triangle BCX où $\mathrm{X} \neq \mathrm{A}$. On utilise alors le retournement qui échange les diagonales [BC] et [AX], ce qui ajoute une diagonale issue de A et on divise le polygone en deux sous-polygones via la diagonale [AX].

Dans tous les cas, on peut donc considérer, en utilisant la diagonale [AX], un découpage de $\mathcal{P}$ en deux sous-polygones, eux-mêmes triangulés via les triangulations induites par celles de $\mathcal{P}$ (l'un ou l'autre de ces polygones pouvant être réduit à un triangle). Il suffit de recommencer sur chacun de ces sous-polygones. On ajoute ainsi, une par une, toutes les diagonales issues de A pour aboutir à la triangulation $\mathcal{T}_A$.

**b.** On peut de même transformer $\mathcal{T}'$ en $\mathcal{T}_A$ et donc, puisque le processus est réversible, $\mathcal{T}_A$ en $\mathcal{T}'$. Quitte à transiter par $\mathcal{T}_A$, on peut donc toujours transformer $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$ à l'aide d'un nombre fini de retournements.

**4.** Soit A et B deux sommets adjacents de $\mathcal{P}$. On considère la triangulation $\mathcal{T}_A$ dont les diagonales sont celles issues de A, et la triangulation $\mathcal{T}_B$ dont les diagonales sont celles issues de B. Puisque A et B sont adjacents, ces deux triangulations n'ont aucune diagonale commune. Si l'on veut transformer $\mathcal{T}_A$ en $\mathcal{T}_B$, il faut donc que chacune des $n-3$ diagonales de $\mathcal{T}_A$ soit impliquée dans un retournement. Ainsi, il faut au moins $n-3$ retournements pour transformer $\mathcal{T}_A$ en $\mathcal{T}_B$.

**5.** Soit $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux triangulations de $\mathcal{P}$. Soit A un sommet de $\mathcal{P}$ qui est l'extrémité d'au moins une diagonale utilisée dans $\mathcal{T}'$. Soit $\mathcal{T}_A$ la triangulation dont les diagonales sont celles issues de A.

Pour transformer $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}_A$, il suffit à chaque retournement d'ajouter une diagonale issue de A, ce qui nécessite au plus $n-3$ retournements. On peut transformer $\mathcal{T}'$ en $\mathcal{T}_A$ selon le même principe, mais puisqu'au moins une diagonale est déjà en place, cela ne nécessite qu'au plus $n-4$ retournements.

On peut donc, en inversant le processus, transformer $\mathcal{T}_A$ en $\mathcal{T}'$ en au plus $n-4$ retournements.

Ainsi, on transforme $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$ à l'aide d'au plus $2n-7$ retournements.

**6.** On suppose que $n \geq 13$ et on considère deux triangulations $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{P}$.

**a.** À elles deux, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ utilisent $2(n-3)$ diagonales, par forcément distinctes.

Chaque diagonale a ses deux extrémités parmi les $n$ sommets de $\mathcal{P}$, donc, à elles toutes, elles nécessitent $4(n-3)$ extrémités. En moyenne, un sommet de $\mathcal{P}$ est l'extrémité de $\frac{4n-12}{n} = 4 - \frac{12}{n}$ diagonales.

Comme $n \geq 13$, $4 - \frac{12}{n} > 3$.

Ainsi, il existe un sommet de $\mathcal{P}$ qui est l'extrémité d'au moins 4 des diagonales parmi celles utilisées par $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$.

**b.** Il suffit de reprendre le raisonnement du **5.** en choisissant pour sommet A l'un de ceux qui sont l'extrémité d'au moins 4 des diagonales concernées.
Cela permet d'économiser 3 retournements par rapport au **5.** Ainsi, on peut toujours transformer $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$ à l'aide d'au plus $2n - 10$ retournements.

*Remarque : en fait, la majoration* $2n - 10$ *est optimale pour* $n \geq 13$. *Cependant, la preuve de cette optimalité est inaccessible dans le cadre de l'épreuve.*

## Exercice 6- Numerus clausus

**1.** Notons $m_r$ la moyenne des étudiants recalés. On a 350 admis dont la moyenne est 80 et 250 recalés dont la moyenne est $m_r$.
La moyenne de l'ensemble des étudiants est 66, on a donc $350 \times 80 + 250 \times\ m_r = 600 \times 66$, on obtient $m_r = 46{,}4$

**2.**

**a.** Si l'on note $N$ le nombre d'étudiants admis, il y a $600 - N$ recalés.
On a donc $N \times 71 + (600 - N) \times 56 = 600 \times 66$, soit $N = 400$.

**b.** La nouvelle moyenne de l'ensemble des étudiants est $\frac{400\times72+200\times58}{600} = \frac{40400}{600} \approx 67{,}33$.

**c.** La note minimale d'un étudiant est 3.

**d.** Les $400$ admis le restant, on s'intéresse aux étudiants initialement recalés. Ils sont 200 et la moyenne de leurs notes est 58. On dispose de $200 \times 58 = 11\,600$ points à répartir entre ces étudiants.
Comme chaque étudiant a au minimum 3 points, on répartit d'abord $200 \times 3 = 600$ points.
Il reste donc $11\,600 - 600 = 11\,000$ à répartir entre un maximum d'étudiants de façon à compléter leur 3 points pour atteindre la barre des 65 points.
$\frac{11000}{62} \approx 177{,}4$ donc on peut avoir au maximum $177$ étudiants qui passent de recalés à admis, soit au maximum un total de 577 étudiants admis.