Stage olympique pour lycéens de seconde

11 et 12 avril 2011

La Pépinière académique de mathématiques est une initiative de l'académie de Versailles et de ses partenaires, l'INRIA (Centres de Paris Rocquencourt et de Saclay Île de France) et l'Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines. Elle organise grâce à des bénévoles des stages destinés aux élèves intéressés et talentueux *désignés par leurs établissements*.

Emploi du temps

Lundi 11 avril 2011

	Groupe 1	**Groupe 2**
10 heures	**Combinatoire, logique, probabilités** Michel ABADIE	**Calcul numérique et littéral** Richard BREHERET
Midi	**Repas**	**Repas**
13 heures	**Calculer avec un ordinateur** Claude GOMEZ	**Combinatoire, logique, probabilités** Michel ABADIE
14 heures	**Géométrie et calculs** Carine LILETTE	
14 h 30		**Calculer avec un ordinateur** Claude GOMEZ
15 h 30 – **17 heures**	**Calcul numérique et littéral** Richard BREHERET	**Géométrie et calculs** Carine LILETTE

Mardi 11 avril 2011

	Groupe 1	**Groupe 2**
10 heures	**Fonctions et équations** Bruno BAUDIN	**Fonctions et équations** Catherine HOUARD
Midi	**Repas**	**Repas**
13 heures	**Polyèdres** Pierre MICHALAK	**Géométrie du triangle** Anne ALLARD
14 heures	**Nombres et autres** Alexandra VIALE	
14 h 30		**Polyèdres** Pierre MICHALAK
15 h 30 – **17 heures**	**Géométrie du triangle** Anne ALLARD	**Nombres et autres** Alexandra VIALE

Responsables : Dominique BARTH, Mohamed KRIR (UVSQ), Marie-Françoise BOURDEAU, Véronique MESSEANT, Pierre MICHALAK, Evelyne ROUDNEFF (Inspection, Rectorat de Versailles). **Intervenants :** Michel ABADIE (Lycée Galilée GENNEVILLIERS), Anne ALLARD (Lycée Les Pierres Vives, CARRIERES SUR SEINE), Bruno BAUDIN (Lycée Pissarro PONTOISE), Richard BREHERET (Lycée Galilée CERGY), Claude GOMEZ (Directeur du Consortium Scilab, Fondation DIGITEO) Catherine HOUARD (Lycée Pissarro PONTOISE), Carine LILETTE (Lycée Lakanal SCEAUX), Alexandra VIALE (Lycée Emilie de Breteuil MONTIGNY LE BRETONNEUX), Christine WEILL (Lycée Dumont d'Urville MAUREPAS). **Organisation :** Florence GHOERS (UVSQ), Frédérique CHAUVIN (Rectorat de Versailles)

Combinatoire, logique, probabilités

1. Deux polygones réguliers ont un total de 17 sommets et 53 diagonales. Calculer le nombre des sommets de chacun des deux polygones.

2. Dans certains bâtiments, on rencontre des portes munies d'une serrure numérique à cinq boutons. Les combinaisons de cette serrure sont formées d'une séquence de mouvements (au moins un). Il y a deux sortes de mouvements :

- soit on appuie sur un seul bouton ;
- soit on appuie sur deux boutons en même temps.

Durant une combinaison, on n'appuie jamais plus d'une fois sur un même bouton.
Certaines combinaisons n'utilisent pas tous les boutons.
L'ordre des mouvements est important.
Combien de combinaisons différentes y a-t-il ?

3. Pendant un tournoi d'échecs, chaque joueur a joué exactement une partie avec chacun des autres joueurs. Cinq joueurs ont perdu 2 parties chacun et les joueurs restants ont gagné 2 parties chacun. Il n'y a eu aucune partie nulle.
Combien de joueurs participaient à ce tournoi ?

4. On considère le jeu suivant qui oppose deux joueurs. Sur six jetons indiscernables placés dans un sac, deux sont verts, quatre sont rouges. Le premier joueur tire un jeton au hasard. Si ce jeton est rouge, le deuxième joueur choisit un jeton au hasard (le jeton tiré n'étant pas remis dans le sac). Si ce jeton est rouge, le premier joueur choisit un nouveau jeton (le jeton tiré n'étant pas remis dans le sac) et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un joueur obtienne un jeton vert.
Quelle la probabilité que le premier joueur n'obtienne jamais un jeton vert ?

5. Un jury est formé de trois juges. Deux de ces juges sont également compétents : chacun a une probabilité p ($p > 0,5$) de prendre la bonne décision, c'est-à-dire acquitter l'innocent ou condamner le coupable. Le troisième juge s'en remet au hasard : il acquitte ou condamne selon le lancer d'une pièce équilibrée. La décision finale du jury est prise à la majorité simple (2 à 1 ou 3 à 0).
Quelle est la probabilité que le jury prenne la bonne décision ?

6. Un pion est promené au hasard sur les 9 cases d'un échiquier 3×3. Les cases sont numérotées comme dans la figure ci-contre.
Au temps 0, le pion est sur la case 1 puis, à chaque unité de temps, le pion est déplacé au hasard vers une des 2, 3 ou 4 cases voisines de celle où il était placé (par exemple, s'il y a 3 cases voisines de celle où il était placé, la probabilité d'être déplacé vers chacune de ces trois cases est 1/3).

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Les mouvements diagonaux sont interdits.
Quelle est la probabilité que la case 3 soit visitée avant la case 9 ?

7. Trouver tous les nombres de dix chiffres, s'écrivant : $N = a_0 a_1 a_2 ... a_7 a_8 a_9$, et pour lesquels le chiffre a_k représente le nombre d'apparitions du chiffre k dans l'écriture de N.

8. Il y a 17 tours sur un échiquier ordinaire. Montrer qu'on peut toujours en trouver 3 qui ne se menacent pas entre elles.

Calcul numérique et littéral

Exercice 1

Montrer que pour tous nombres *a*, *b* et *c* tels que $a+b\neq 0, b+c\neq 0$ et $c+a\neq 0$ le nombre

$$\left(1+\frac{c}{a+b}\right)\left(1+\frac{a}{b+c}\right)\left(1+\frac{b}{c+a}\right)-\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

est indépendant de *a*, *b* et *c*.

Exercice 2

Dans l'écriture du nombre $\frac{1}{97}$, une « période » de 96 chiffres se répète, qui commence ainsi :

$\frac{1}{97}=0,010309278350...$ Quels sont les 94ème, 95ème et 96ème chiffres ?

Exercice 3

Si $a+b=1$ et $a^2+b^2=2$, combien vaut a^3+b^3 ? et a^4+b^4 ?

Exercice 4

Prouver que si *a*, *b* et *c* sont des réels positifs tels que $ab+bc+ca=1$, alors

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geqslant\sqrt{3}+\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}$$

Exercice 5

Si les nombres *a*, *b* et *c* vérifient $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$, montrer que $a+\frac{1}{b}=-abc$

Exercice 6

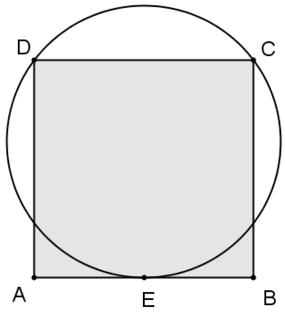
On donne un nombre $n\geqslant 10^{2011}$.

Quel est le premier chiffre après la virgule dans l'écriture décimale de $\sqrt{n^2+n+200}$?

Exercice 7

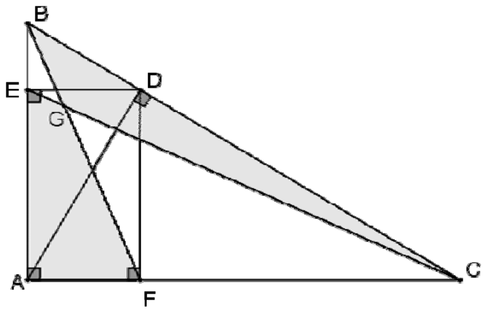
Evaluer $A=\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$

Géométrie et calculs

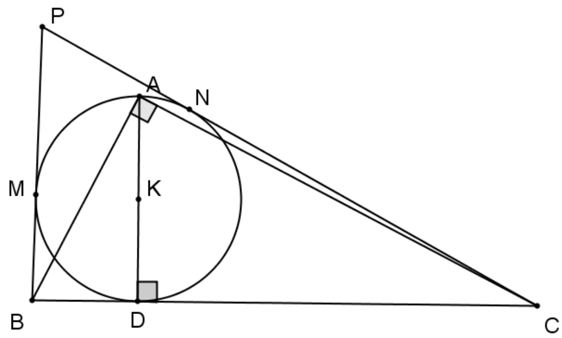


Exercice 1

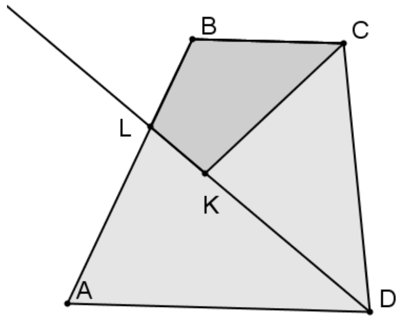
Soit ABCD un carré de côté 4 cm. Quel est le rayon du cercle passant par C et D et tangent en E à (AB) ?



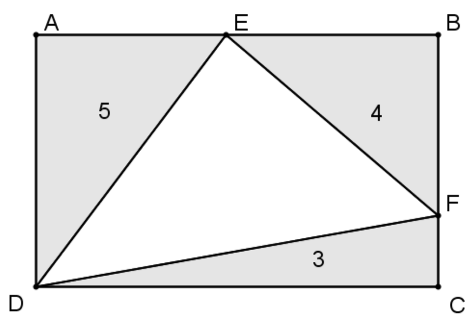
Exercice 2
Soit ABC un triangle rectangle en A et D le pied de la hauteur issue de A dans ce triangle.
On appelle respectivement E et F les projetés orthogonaux de D sur (AB) et (AC).
Les droites (BF) et (EC) se coupent en G.
Démontrer que l'aire du quadrilatère AEGF est égale à celle du triangle BGC.



Exercice 3
Soit B et C deux points du plan tels que BC = 6 et A un point tel que le triangle ABC soit rectangle en A.
On désigne par D le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
Les tangentes au cercle de diamètre [AD] issues respectivement de B et C (autres que (BD)) touchent ce cercle respectivement en M et N et se coupent en P.
Démontrer que le périmère du triangle PBC est constant.



Exercice 4
On considère un trapèze ABCD d'aire 1 tel que :
(BC) // (AD) et AD = 2BC
Soit K le milieu de [AC] et L le point d'intersection de (DK) et (AB).
Calculer l'aire du quadrilatère BCKL..

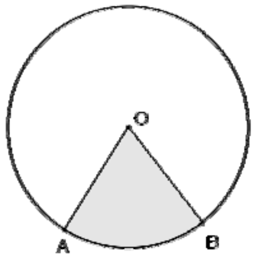


Exercice 5
Soit ABCD un rectangle, E et F deux points des côtés [AB] et [BC].
Quelle est l'aire du triangle EDF, sachant que les aires des triangles AED, EBF et CDF sont respectivement égales à 5, 4 et 3.?

Exercice 6

1. Soit x et y deux nombres réels de somme S et de produit P.

Démontrer que $P = \frac{S^2}{4} - \left(x - \frac{S}{2}\right)^2$.

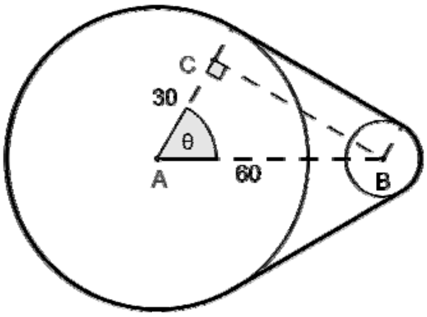


2. On considère un cercle de centre O.

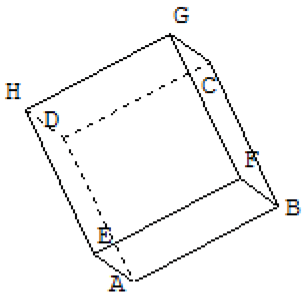
Soit A et B deux points de ce cercle tels que le périmètre du secteur angulaire grisé OAB ait pour périmètre 12.
Déterminer le rayon R du cercle pour lequel l'aire du secteur grisé est maximale.

Exercice 7

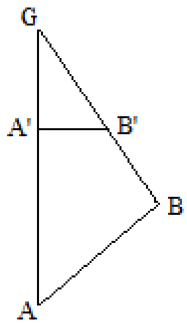
Deux poulies circulaires sont reliées par une courroie bien tendue comme dans la figure suivante. Les poulies sont de rayons 40 cm et 10 cm, leurs centres sont distants de 60 cm. Quelle est la longueur de la courroie ?

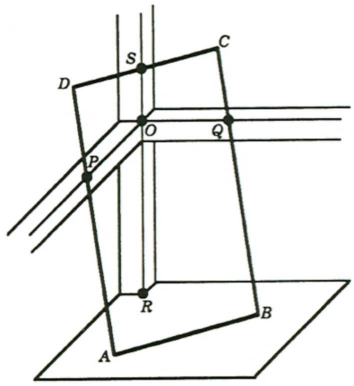


Exercice 8



Josée possède un petit flacon cubique de 3 cm de côté contenant un liquide précieux qu'un marchand veut lui acheter. Pour fixer le prix, le marchand prétend que le flacon est rempli aux deux tiers car si on le place de telle sorte qu'une grande diagonale du cube (par exemple [AG] sur la figure) soit perpendiculaire au sol, il y a du liquide jusqu'aux deux tiers de cette diagonale. Pour savoir si Josée a intérêt à accepter cette interprétation, trouver la fraction du volume du flacon que le liquide représente en réalité





Exercice 9

Une vitre rectangulaire ABCD est appuyée sur le coin d'un balcon (voir figure). La vitre touche les rampes horizontales aux points P er Q respectivement et la colonne verticale au point S. La base [AB] de la vitre repose complètement sur le plancher du balcon.
Déterminer les dimensions de la vitre sachant que :
OP = OQ = 30 cm, Os = 15 cm et RO = 80 cm,

Fonctions et équations

1. On donne un nombre réel positif *p*. Résoudre l'inéquation $\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2$.

2. On appelle ***partie entière*** d'un réel *x* le plus grand entier inférieur ou égal à *x*. On note $[x]$ la partie entière du réel *x*.
a. Représenter l'allure de la fonction partie entière.
b. Représenter l'allure de la fonction *m* qui, à tout réel *x* associe $m(x) = x - [x]$ (on l'appelle la mantisse)
c. Représenter la fonction *f* définie sur $[0,2]$ par $f(x) = [x^2] - ([x])^2$. On pourra commencer par faire la liste des images possibles d'un nombre de l'intervalle $[0,2]$ par *f*.

3. On donne un nombre réel positif *a* et on considère l'inéquation : $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} \geqslant \sqrt{a}$
- Résoudre l'inéquation correspondant à $a = 3$;
- Trouver les valeurs de *a* pour lesquelles l'ensemble des solutions de l'inéquation est un intervalle borné de longueur inférieure ou égale à $\sqrt{3}$ (et qui peut être réduit à un singleton).

4. On dispose de cinq nombres entiers. Si on les ajoute deux à deux on obtient les dix sommes : 2 001, 2 006, 2 007, 2 008, 2 009, 2 014, 2 017, 2 018, 2 023, 2 025. Quels sont ces entiers ?

5. Une équation fonctionnelle Trouver toutes les fonctions *f* de **R** dans **R** vérifiant : pour tous réels *x* et *y*

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

6. Alice et Bob comparent leurs cagnottes. La monnaie qu'ils utilisent est le doublezon. Alice dit : « Si tu me donnais un certain nombre de tes doublezons, j'en aurais six fois plus que toi ; par contre, si je te donnais ce même nombre de doublezons, tu en aurais trois fois moins que moi ». Quel est le plus petit nombre de doublezons que peut posséder Alice ?

7. Trouver tous les triplets (x, y, z) de nombres réels tels que :

$$x + yz = y + zx = z + xy = 6$$

8. Trouver tous les nombres de trois chiffres (on écrit $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$) tels que

$$\overline{xyz} = x + y + z + xy + yz + zx + xyz$$

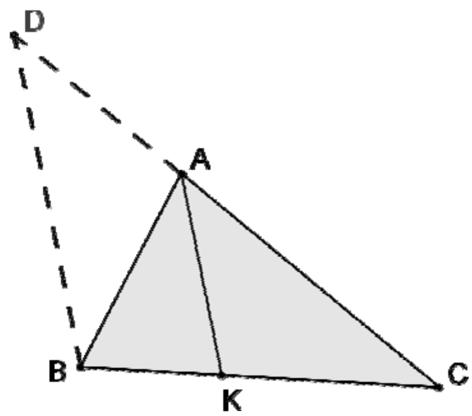
Géométrie du triangle

Exercice 1
Démontrer que dans tout triangle rectangle la somme des mesures des côtés de l'angle droit est égale à la demi-somme des diamètres des cercles circonscrit et inscrit de ce triangle.

Exercice 2
Démontrer le théorème suivant :
Soit K le pied de la bissectrice de l'angle de sommet A d'un triangle ABC. Alors :

$$\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$$

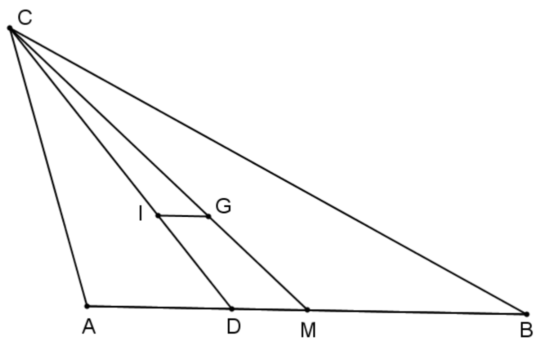
Indications : Soit D le point intersection de la droite (AC) et de la parallèle à (AK) passant par B. Quelle est la nature du triangle ABD ?



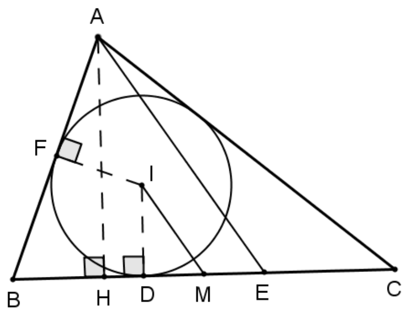
Exercice 3
On considère un triangle ABC. On désigne par G son centre de gravité et par I le centre de son cercle inscrit. On pose :
a = BC, b = AC et c = AB.
Démontrer que si les droites (IG) et (AB) sont parallèles, alors :

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

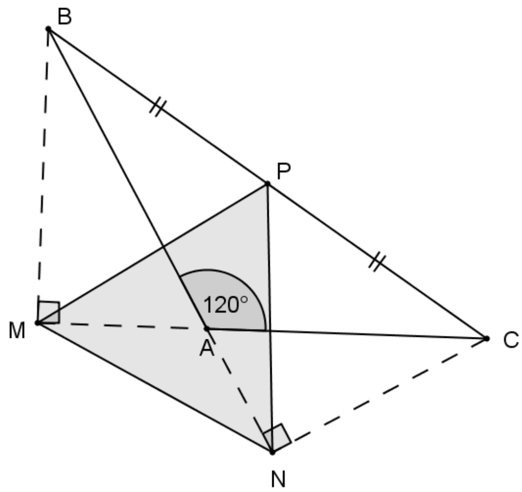
Étudier la réciproque.



Exercice 4
Soit ABC un triangle quelconque, I le centre de son cercle circonscrit. On désigne respectivement par H et D les projetés orthogonaux de A et I sur (BC). Soit M le milieu du segment [BC] et E le symétrique de D dans la symétrie de centre M.
Démontrer que les droites (IM) et (AE) sont parallèles.
(Indication : On pourra utiliser l'égalité $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$ dite « formule d'Al-Kashi).



Exercice 5
Soit ABC un triangle tel que $\widehat{A}$ = 120°. On désigne par M et N les pieds des hauteurs issues respectivement de B et C dans le triangle ABC.
Soit P le milieu du segment [BC].
Démontrer que le triangle MNP est équilatéral.



Nombres et autres

1. Déterminer les réels *m* tels que les solutions de l'équation $x^3 + mx + 6 = 0$ soient des nombres entiers.

2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, l'entier $n^4 + 4$ n'est pas un nombre premier.

3. On considère une suite de *n* nombres réels tels que les deux conditions suivantes soient simultanément vérifiées :

- la somme de trois nombres consécutifs est toujours négative ;
- la somme de cinq nombres consécutifs est toujours positive.

a. Quelles la plus grande valeur possible de l'entier *n* ?
b. Construire une telle suite de longueur *n*.

4. L'écriture décimale du nombre $2007^{2008} + 2008^{2007}$ contient exactement 6 632 chiffres.
Quel est son chiffre des unités ?

5. Démontrer que la somme des cubes d'entiers consécutifs strictement plus grands que 1 n'est jamais un nombre premier.

6. Partant d'un entier naturel, on calcule le produit de ses chiffres et on recommence avec le nombre obtenu, ceci jusqu'à l'obtention d'un nombre à un seul chiffre.

On appelle *persistance* d'un nombre le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir un nombre à un seul chiffre. Ainsi la persistance de 6 est 0, celle de 23 est 1, celle de 54 est 2 et celle de 999 est 4.
On appelle *nombre consistant* un nombre dont la persistance est supérieure ou égale à 4.
Quel est le plus petit des nombres consistants ?

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

7. Pour tout entier naturel *n*, on pose $t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Calculer $\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} + \dfrac{1}{t_3} + ... + \dfrac{1}{t_{2011}}$.

8. Soit *a*, *b* et *c* trois nombres réels tels que $a^2 + 2b = 7$, $b^2 + 4c = -7$ et $c^2 + 6a = -14$.
Calculer $a^2 + b^2 + c^2$.