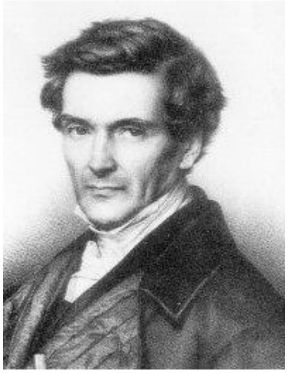

Stage préolympique ouvert aux lycéens de première talentueux et motivés désignés par leurs établissements, les 2 et 3 janvier 2014

La Pépinière académique de mathématique organise pour la huitième année, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le centre INRIA de Paris-Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise le collège Paul Fort de Montlhéry. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Anne ALLARD, Marie-Françoise BOURDEAU, Joëlle DEAT, Yann ÉGLY, Anne MENANT, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF, Éric SOROSINA

Les intervenants professeurs : Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Dominique CLÉNET (Lycée François Villon, LES MUREAUX), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Philippe JULIEN (Lycée International, SAINT GERMAIN EN LAYE), Martine SALMON (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Karim ZAYANA (Lycée Hoche, VERSAILLES), Joffrey ZOLNET (Lycée Léonard de Vinci, LEVALLOIS PERRET)

Professeurs accompagnants : Jeanne ALLEMAND (Lycée Daniélou, RUEIL MALMAISON), Caroline FERRARI (Lycée Daniélou, RUEIL MALMAISON), Michelle JACCOTTET (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Fadi TAMIM (Lycée Hoche, VERSAILLES),

Emploi du temps

Jeudi 2 janvier 2014

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
10 heures	Films « Numériquement vôtre », « Chaos III », « Dimensions 5 »		
11 heures	Logique, dénombrement KZ+PJ	Nombres DC	Aires et volumes NF+CD
13 heures	Repas		
13 h 50	Aires et volumes NF+CD	Logique, dénombrement KZ+PJ	Nombres DC
15 h 20	Nombres DC	Aires et volumes NF+CD	Logique, dénombrement KZ+PJ

Vendredi 3 janvier 2014

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
10 heures	Équations JZ	Angles et distances MS+AM	Suites et fonctions CH+BB
12 heures	Conférence « Règle et compas ». Le théorème de Wantzel		
13 heures	Repas		
13 h 50	Suites et fonctions CH+BB	Équations JZ	Angles et distances MS+AM
15 h 20	Angles et distances MS+AM	Suites et fonctions CH+BB	Équations JZ

Thème : Nombres

On rappelle que « multiple » et « diviseur » font référence à des relations entre nombres entiers.

Exercice 1 Calculatrice interdite

Si vous tenez vraiment à utiliser votre calculatrice, remplacez 2 013 par 20 132 013 et 2 014 par 20 132 014

Le nombre $\frac{1+2013^4+2014^4}{1+2013^2+2014^2}$ est-il un entier ?

Exercice 2 Pourquoi 1 4 6 4 1 ?

Trouver un diviseur du nombre M = 1 464 101 210 001 compris entre 1 210 000 et 1 220 000.

Trouver un diviseur du nombre N = 100 140 001 compris entre 8 000 et 9 000.

Exercice 3 Petite monnaie

Pour tout entier *n*, on appelle $f(n)$ le chiffre des unités de la somme $1+2+3+...+(n-1)+n$.

Calculer $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2013)+f(2014)$.

Exercice 4 Synonymies

1. Montrer que le produit de quatre nombres impairs consécutifs est une différence de deux carrés.

2. Montrer que la somme des cubes des n premiers entiers est le carré de leur somme. En déduire que la somme des cubes de trois entiers consécutifs est la différence de deux carrés.

Exercice 5 Le dernier trou

On considère l'ensemble des nombres sommes de multiples de 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143 et 144 (dans une telle somme, chacun de ces dix nombres apparaît affecté d'un coefficient entier qui peut être 0).

Quel est le plus grand nombre entier ne faisant pas partie de cet ensemble ?

Thème : Équations

Exercice 1

Résoudre le système d'équations d'inconnues a et b réels :

$$\begin{cases} 2a^2 - 2ab + b^2 = a \\ 4a^2 - 5ab + 2b^2 = b \end{cases}$$

Exercice 2 On dit « factorielle *k* »

Pour tout entier naturel n, on note $a(n)$ le plus petit entier pour lequel $(a(n))!$ est divisible par n.

On rappelle que la factorielle d'un entier k, notée k !, est le produit des k entiers non nuls inférieurs ou égaux à k.

Résoudre l'équation : $\dfrac{a(n)}{n} = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 3

Trouver les entiers p et q tels que $p + q = 2014$ et que l'équation $19x^2 + px + q = 0$ ait deux racines entières.

Exercice 4 Attention, ça tourne

Les nombres x, y, z, w et t sont positifs, distincts deux à deux, et vérifient :

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{w} = w + \frac{1}{x} = t\ .$$

Déterminer t.

Exercice 5 Équation d'un ensemble de points du plan

On considère l'ensemble E des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient :

$$\textit{Pour tout } t \in [-1,1],\ t^2 + xt + y \ldots 0.$$

Représenter cet ensemble en utilisant un repère orthogonal $(O;\vec{i}, \vec{j})$.

Thème : Suites et fonctions

Exercice 1

On définit la suite $\{a_n\}$ par la donnée de son premier terme a_1, réel positif, et la relation de récurrence :

$$\text{Pour tout } n,\ a_{n+1} = 1 + a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n$$

On lui associe la suite $\{b_n\}$ définie par :

$$\text{Pour tout } n,\ b_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \cdot$$

1. Montrer que pour tout n : $b_n < \frac{2}{a_1} \cdot$

2. Peut-on trouver un réel x tel que pour tout n $b_n < x < \frac{2}{a_1}$?

Exercice 2

On définit la suite $\{x_n\}$ par la donnée de son premier terme $x_1 = 1$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n} \cdot$

Quel est le signe de $x_{2014}^2 + x_{2014} - 1$?

Exercice 3 Le retour de la factorielle

On définit une suite (a_n) de nombres par :

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3 \text{ et, pour tout entier } n :\ a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$$

Montrer que tous les termes de la suite sont entiers. Parmi eux, quels sont les multiples de 11 ?

Exercice 4 Un peu de trigonométrie

On définit une suite (x_n) de nombres par la donnée de son premier terme x_1 et la relation de récurrence :

$$\text{Pour tout } n\ x_{n+1} = \frac{-x_n + \sqrt{3 - 3x_n^2}}{2} \cdot$$

1. Donner une condition sur x_1 suffisante pour que la suite soit bien définie et ses termes tous positifs.

2. Montrer que cette suite est périodique.

Exercice 5 Une équation fonctionnelle

L'inconnue est une fonction *f* définie sur l'ensemble **Q*** des nombres rationnels non nuls et vérifiant les deux conditions suivantes :

1. Pour tout rationnel non nul x, $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$;

2. Pour tout rationnel non nul x, $f(2x) = 2f\left(f(x)\right)$.

On demande une expression explicite de $f(x)$, valable pour tout rationnel non nul.

Thème : Aires et volumes

Exercice 1 Étoiles et rosaces

À l'intérieur d'un carré ABCD de côté 10 cm, on place les points E, F, G et H de sorte que les triangles ABE, BCF, CDG et DAH soient équilatéraux. Les cercles circonscrits à ces quatre triangles définissent quatre disques. Quelle est l'aire de la partie commune à ces quatre disques ?

Exercice 2 Petit lopin

Sur le côté [AC] du triangle ABC, on place les points M et N, sur le côté [BC] les points X et Y qui partagent ces segments en trois segments de même longueur. Les segments [BM]et [AY] ont le point S en commun. Les segments [BN] et [AY] ont en commun le point R.

Quelle fraction de l'aire du triangle ABC l'aire du quadrilatère MNRS représente-t-elle ?

N.B. Les points D, E, F placés sur la figure peuvent aider.

Exercice 3 Concurrence entre triangles

Deux triangles rectangles ABC et $A_1B_1C_1$ ont le même cercle circonscrit et le même cercle inscrit. Un triangle ABC étant donné, combien de triangles peuvent jouer le rôle de $A_1B_1C_1$?

Le triangle ABC a pour dimensions 3, 4 et 5. Quelle est l'aire de la portion de plan qui est commune à ABC et $A_1B_1C_1$?

Exercice 4 Ébénisterie

Un cube d'arête 2 cm est coupé par un plan P selon un hexagone régulier.

La sphère inscrite dans ce cube (c'est-à-dire tangente à chacune des six faces) coupe le plan P selon un cercle.

Quelle est l'aire de la portion de plan intérieure à l'hexagone mais extérieure au disque ?

Exercice 5 Jerrycan academy

Un cube d'arête 1 est posé sur un sommet (une de ses diagonales est verticale). On le remplit jusqu'à la hauteur *h*. Une fois bouché l'orifice ayant permis de le remplir, on pose le cube sur une de ses faces. Quelle hauteur atteint le liquide dans cette nouvelle position ?

La figure ci-contre n'est pas bonne : faire une figure correcte est un des enjeux de l'exercice.

Thème : Angles et distances

Exercice 1

On considère un parallélogramme ABCD. On appelle Q le milieu de [AD]. La perpendiculaire abaissée de B sur (QC) coupe (QC) en F. Montrer que AF = AB.

Exercice 2

On considère un triangle ABC. Sur le cercle circonscrit à ABC on place le point D milieu de l'arc BC . Sur le segment [DA] on place le point P tel que DP = DB. Montrer que P est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Exercice 3 La bissectrice ne coupe pas que les angles

Dans le triangle ABC (figure ci-contre), l'angle en A mesure 60°, et la bissectrice de cet angle coupe le segment [BC] en un point X tel que $XC=2BX$. Quelle est la nature du triangle XAC ?

Exercice 4

Le cube ci-contre a pour arête 1.

Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [GH], [AD] et [GF].

1. Le quadrilatère IFJD est-il plan ? Quelle est sa nature ? Quelles sont les mesures de ses angles (on en donnera des arrondis au degré).

2. Les points M et N sont respectivement les ponts d'intersection de [ID] et [BK] et de [FJ] et [HL]. Quelle est la longueur du segment [MN] ?

Exercice 5 Hommage à Thalès

Sur le côté [BC] du triangle ABC on place les points M et N tels que

BM = MN = NC. Une droite parallèle à (AC) coupe les segments [AB], [AM] et [AN] respectivement en D, E et F.

Montrer que EF = 3 DE

Thème : Logique, dénombrement

Exercice 1 Plan de table

Dix chevaliers de la Table ronde sont réunis. Après une interruption dans les débats, chacun se rassoit, à sa place d'origine ou à une place immédiatement voisine de celle-ci. Combien de tables différentes peut-on ainsi constituer ?

Exercice 2 Ikéa

On a placé 111 balles bleues, rouges, vertes et jaunes, dans une urne. Si on tire 100 balles de l'urne, il est certain que les boules tirées seront de quatre couleurs.

Quel est le plus petit nombre N qui assure que, si on tire N balles de l'urne, elles seront d'au moins trois couleurs ?

Exercice 3 Flageolets

Sur les $n \times n$ cases d'un (grand) échiquier carré, on dispose 2 013 haricots secs, de sorte que l'effectif disposé sur chaque case diffère exactement de 1 avec celui de toute case voisine (c'est-à-dire ayant un côté commun avec elle).

Quel est le plus grand nombre de cases possible (le plus grand n possible) ?

Exercice 4 Langue rare

Dans une certaine langue, l'alphabet est réduit à deux lettres, et les mots ont tous 7 lettres. Deux mots sont considérés comme différents s'ils comportent des lettres distinctes en au moins trois positions.

Combien y a-t-il de mots dans cette langue ?

Exercice 5 Échafaudage

L'échafaudage représenté ci-contre est constitué de *tiges* et de *nœuds*. L'ensemble a la forme d'un cube d'arête 2.

Partant d'un certain nœud, un automate parcourt les tiges en observant la règle suivante : à chaque nœud, prendre une direction perpendiculaire à celle d'où on vient. Mis à part le nœud de départ, qui sera aussi le nœud d'arrivée, chaque nœud est atteint au plus une fois.

Quelle est la longueur maximale du parcours ? Donner un exemple de parcours de longueur maximale.

Exercice 6 Jeu de cartes

On dispose de 4 028 cartes, portant chacune un nombre entier compris entre 1 et 2 014, chacun de ces nombres figurant sur deux cartes.

Comment faire pour les disposer l'une après l'autre en ligne droite, de telle manière que, pour tout nombre *n*, il y ait entre les deux cartes portant le nombre *n* exactement *n* – 1 autres cartes ?