Stage préolympique janvier 2014

Éléments de solutions

Thème : Nombres

Exercice 1 Les triomphes du calcul littéral

En posant a = 2013, l'expression $\dfrac{1+2013^4+2014^4}{1+2013^2+2014^2}$ devient : $\dfrac{1+a^4+(a+1)^4}{1+a^2+(a+1)^2}$.

Or, pour tout réel a : $\dfrac{1+a^4+(a+1)^4}{1+a^2+(a+1)^2}=\dfrac{2a^4+4a^3+6a^2+4a+2}{2a^2+2a+2}=\dfrac{a^4+2a^3+3a^2+2a+1}{a^2+a+1}$.

De plus : $a^4+2a^3+3a^2+2a+1=\left(a^2+a+1\right)^2$. On en déduit que, pour tout réel a : $\dfrac{1+a^4+(a+1)^4}{1+a^2+(a+1)^2}=a^2+a+1$

En particulier, si a= 2013 : $\dfrac{1+2013^4+2014^4}{1+2013^2+2014^2}=1+2013+2013^2$ qui est un entier naturel.

Exercice 2 Pourquoi 1 4 6 4 1

1. M = 1 464 101 210 001

M = 14 641 × 10^8 + 121 × 10^4 + 1. Or 121 = 11^2 et 14 641 = 11^4. D'où : M = $(11 \times 10^2)^4 + (11 \times 10^2)^2 + 1$

M = $1\,100^4 + 2 \times 1\,100^2 + 1 - 1\,100^2$

M = $(1\,100^2 + 1)^2 - 1\,100^2$.

Soit M = $(1\,100^2 + 1 + 1\,100)\,(1\,100^2 + 1 - 1\,100)$

On en déduit que : M = 1 211 101 × 1 208 901. 1 211 101 est un diviseur de M qui répond à la question.

2. N = 100 140 001

N = 10^8 + 14 × 10^4 + 1.

En posant x = 10, on a : N = $x^8 + 14\,x^4 + 1$. L'idée est de factoriser N et pour cela, on réalise une factorisation « forcée » en ajoutant et soustrayant un terme afin de faire apparaître une identité remarquable.

En remarquant que x^8 et 1 sont deux des termes du développement de $(x^4 + 1)^2$, on obtient :

N = $x^8 + 1 + 14\,x^4 = (x^4 + 1)^2 - 2\,x^4 + 14\,x^4$

N = $(x^4 + 1)^2 + 12\,x^4 = (x^4 + 1)^2 + 4\,x^4 + 8\,x^4$. Or $(x^4 + 1)^2$ et $4\,x^4$ sont deux des termes du développement de $((x^4 + 1) + 2\,x^2)^2$.

D'où : $\mathrm{N}=\underbrace{\left(\left(x^4+1\right)+2x^2\right)^2-2\times 2x^2\left(x^4+1\right)}_{\left(x^4+1\right)^2+4x^4}+8x^4$.

$\mathrm{N}=\left(x^4+2x^2+1\right)^2-4x^2\left(x^4+1-2x^2\right)$

$\mathrm{N}=\left(x^4+2x^2+1\right)^2-\left(2x\left(x^2-1\right)\right)^2$

$\mathrm{N}=\left(x^4+2x^2+1-2x\left(x^2-1\right)\right)\left(x^4+2x^2+1+2x\left(x^2-1\right)\right)$

$\mathrm{N}=\left(x^4-2x^3+2x^2-2x+1\right)\left(x^4-2x^3+2x^2+2x+1\right)$. Avec x = 10, on obtient : N = 12 181 × 8 221.

N est donc divisible par 8 221, diviseur qui répond à la question.

Remarque : La factorisation en produit de facteurs premiers de N *(obtenue à l'aide d'une calculatrice) nous donne :*

N = *13 × 937 × 8 221*.

Exercice 3 Petite monnaie

La somme des *n* premiers entiers consécutifs non nuls est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

$f(n)$ est donc le chiffre des unités de $\dfrac{n(n+1)}{2}$. On remarque que, pour tout entier naturel *n*, $f(n+20)=f(n)$.

Démontrons le.

Si *n* est pair, il existe un entier *k* tel que *n* = 2*k*. On a alors $\dfrac{n(n+1)}{2}=k(2k+1)$ et $f(2k)$ est le chiffre des unités de $k(2k+1)$.

$f(n+20)$ est le chiffre des unités de $\dfrac{(n+20)(n+21)}{2}=(k+10)(2k+21)$. Or $k+10$ a le même chiffre des unités que *k*.

$2k+21=2k+20+1$ donc $2k+21$ a même chiffre des unités que $2k+1$. On en déduit que le chiffre des unités de $f(n+20)$ est celui de $k(2k+1)$. D'où $f(2k)=f(2k+20)$.

On peut faire un raisonnement analogue pour *n* impair. On a donc, pour tout naturel *n*, $f(n+20)=f(n)$.

$f(1)+f(2)+...+f(2014)=\left(f(1)+...+f(20)\right)+\left(f(21)+...+f(40)\right)+...+(f(1981)+...+f(2000))+f(2001)+...+f(2014)$.

Les sommes $f(1)+...+f(20)$, $f(21)+...+f(40)$, …, $f(1981)+...+f(2000)$ sont égales.

On vérifie que $f(1)+...+f(20)=70$. On a donc 100 sommes égales à 70.

Donc $f(1)+f(2)+...+f(2\ 014)=70\times100+f(2\ 001)+f(2\ 002)+...+f(2\ 014)$.

$f(2\ 001)$ est le chiffre des unités de $\dfrac{2\ 001\times 2\ 002}{2}=2\ 003\ 001$. Donc $f(2\ 001)=1$ etc…

On obtient ainsi : $f(2\ 001)+f(2\ 002)+...+f(2\ 014)=1+3+6+0+5+1+8+6+5+5+6+8+1+5=60$.

D'où : $f(1)+f(2)+...+f(2\ 014)=7\ 000+60=7060$.

Exercice 4 Changements d'écriture

1. Quatre nombres impairs consécutifs peuvent s'écrire $2n-3, 2n-1, 2n+1, 2n+3$ où *n* est un entier supérieur ou égal à 2.

Le produit de ces quatre nombres est: $P=(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)$ ou encore $P=\left((2n-3)(2n+3)\right)\left((2n-1)(2n+1)\right)$.

Soit $P=\left(4n^2-9\right)\left(4n^2-1\right)=16n^4+9-40n^2$

$P=\left(4n^2+3\right)^2-24n^2-40n^2$ d'où $P=\left(4n^2+3\right)^2-\left(8n\right)^2$ qui est la différence de deux carrés.

2. La somme des cubes des n premiers entiers naturels non nuls est égale au carré de la somme des n premiers entiers non nuls.

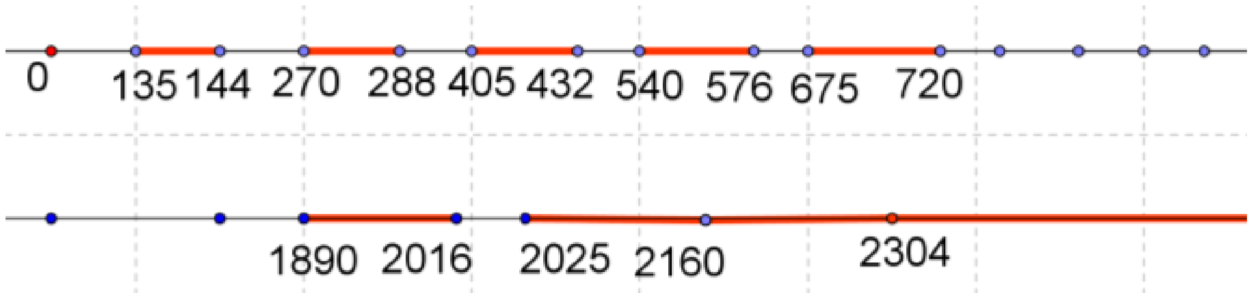
Soit n un entier naturel non nul et $n, n+1, n+2$ trois entiers consécutifs.

$$n^3+\left(n+1\right)^3+\left(n+2\right)^3=\sum_{k=1}^{n+2}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(1+2+...+\left(n+2\right)\right)^2-\left(1+2+...+\left(n-1\right)\right)^2.$$

Donc $n^3+\left(n+1\right)^3+\left(n+2\right)^3==\left(\frac{\left(n+2\right)\left(n+3\right)}{2}\right)^2-\left(\frac{\left(n-1\right)n}{2}\right)^2$ qui est la différence de deux carrés.

Exercice 5 Le dernier trou

Première approche : Nous pouvons examiner séparément les ensembles de nombres entiers combinaisons de 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144 avec comme somme des coefficients intervenant 0, puis 1, puis 2, puis 3, etc. Nous obtenons une situation qu'illustre la figure ci-dessous : dire que la somme des coefficients est 1 signifie que la somme est réduite à l'un des nombre, dire que cette somme est 2 c'est dire que la somme comporte deux termes éventuellement identiques, etc. (ce qui fait que ces sommes peuvent être atteintes de plusieurs manières).



Le plus petit nombre obtenu avec une somme de coefficients égale à 15 est 2 025 (15 fois 135) et le plus grand est 15 fois 144, c'est-à-dire 2 160. Mais 2 160 est aussi la somme d'une combinaison dans laquelle la somme des coefficients est 16 : c'est 16 fois 135. Après 2 025, il n'y a donc plus de « trou » dû au passage d'une somme de coefficients à une autre. Le dernier trou s'achève en 2 024.

Deuxième approche Les sommes considérées sont des sommes de n nombres pris parmi 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, avec répétition possible.. Pour n fixé, un tel nombre N est compris entre $135n$ et $144n$. Tant que $144n<135\left(n+1\right)$, il reste un trou. Cette inéquation se traduit par $n<15$. D'où le résultat.

Thème : Équations

Exercice 1

$$\begin{cases} 2a^2-2ab+b^2=a \\ 4a^2-5ab+2b^2=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2+2b^2=4ab+2a \\ 4a^2+2b^2=5ab+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2+2b^2=5ab+b \\ 5ab+b=4ab+2a \end{cases}.$$

$5ab+b=4ab+2a \Leftrightarrow b(a+1)=2a$.

Si $a=-1$, l'équation devient : $0b=-2$ Impossible.

Si $a\neq-1$, on obtient $b=\dfrac{2a}{a+1}$ et, en remplaçant b par l'expression obtenue en fonction de a dans la première équation du système : $4a^2+2\times\dfrac{4a^2}{(a+1)^2}=\dfrac{10a^2+2a}{a+1}$.

Si $a\neq0$, on obtient, en multipliant les deux membres par $\dfrac{(a+1)^2}{2a}$: $2a(a+1)^2+4a=(5a+1)(a+1)$ soit : $2a^3-a^2-1=0$.

ou $(2a^3-2a^2)+(a^2-1)=0$ qui équivaut à $2a^2(a-1)+(a-1)(a+1)=0$ soit $(a-1)(2a^2+a+1)=0$.

L'équation $2a^2+a+1=0$ n'admet pas de solution réelle. Il en résulte que l'équation $2a^3-a^2-1=0$ a une unique solution qui est 1. Si a = 1, on obtient b = 1.

Si a = 0, on a b = 0.

En conclusion : Le système initial admet deux couples (a, b) solutions qui sont (0, 0,) et (1, 1).

Exercice 2

Quelques calculs préalables :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a(n)$	2	3	4	5	3	7	4	6	5
	2 ! = 2	3 ! = 6 3 ! est la plus petite factorielle divisible par 3	4 ! = 24 4 ! est la plus petite factorielle divisible par 4.	5 ! = 120	3 ! = 6		4 ! = 24	6 ! = 720	5 ! = 120

$\dfrac{a(n)}{n}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow a(n)=\dfrac{2n}{3}$. Comme $a(n)$ est un entier naturel, $2n$ donc n doit être divisible par 3.

Il existe donc un entier k tel que $n = 3k$. On cherche donc k tel que $a(3k) = 2k$.

Si $k > 3$, k ! est divisible par $3k$ donc $a(3k) \leq k$. L'équation $a(3k) = 2k$ n'a donc pas de solution.

On vérifie que le seul entier qui convient est $k = 3$: $a(3\times3) = 2\times 3$ et $\dfrac{a(9)}{9}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$

En conclusion : L'équation $\dfrac{a(n)}{n}=\dfrac{2}{3}$ admet une unique solution qui est 9.

Exercice 3

Soit α et β les solutions de l'équation $19x^2+px+q=0$. On a $\alpha+\beta=-\dfrac{p}{19}$ et $\alpha\beta=\dfrac{q}{19}$ d'où : $2014=-19(\alpha+\beta)+19\alpha\beta$.

En divisant les deux membres par 19, on obtient : $106 = -(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

Or, pour tous réels α et β : $(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$. L'égalité $106 = -(\alpha+\beta)+\alpha\beta$ devient $107 = 1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta$ soit $(\alpha-1)(\beta-1) = 107$.

107 est un nombre premier et α et β sont des entiers. On a donc : soit $\alpha-1=1$ et $\beta-1=107$, soit $\alpha-1=107$ et $\beta-1=1$.

Les deux solutions entières sont 108 et 2.

D'où $\alpha+\beta=110$ et $\alpha\beta=216$. Donc $p=-19(\alpha+\beta)=-2090$ et $q=19\alpha\beta=4104$.

Exercice 4

$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{w}=w+\frac{1}{x}=t$. D'après les données de l'énoncé, x, y, z, w et t sont strictement positifs et deux à deux distincts.

Exprimons w, z et y en fonction de x et de t : $w=t-\frac{1}{x}$ soit $w=\frac{tx-1}{x}$.

$z=t-\frac{1}{w}$ soit $z=t-\frac{x}{tx-1}$ ou encore $z=\frac{t^2x-t-x}{tx-1}$. Notons que z est bien défini car w n'est pas nul, donc $tx-1\neq 0$.

$y=t-\frac{1}{z}$ soit $y=t-\frac{tx-1}{t^2x-t-x}$ ou encore $y=\frac{t^3x-t^2-2tx+1}{t^2x-t-x}$. y est bien défini car z n'est pas nul, donc $t^2x-t-x\neq 0$.

En remplaçant y par $\frac{t^3x-t^2-2tx+1}{t^2x-t-x}$ dans l'égalité $x+\frac{1}{y}=t$, on obtient : $x+\frac{t^2x-t-x}{t^3x-t^2-2tx+1}=t$. Multiplions les deux membres par $t^3x-t^2-2tx+1$: $x\left(t^3x-t^2-2tx+1\right)+t^2x-t-x=t\left(t^3x-t^2-2tx+1\right)$ qui équivaut à :
$t^4x-t^3\left(x^2+1\right)-2xt^2+2x^2t+2t=0$

$$t^4x-t^3\left(x^2+1\right)-2xt^2+2x^2t+2t=0 \Leftrightarrow t\left(t^3x-t^2\left(x^2+1\right)-2xt+2x^2+2\right)=0 \Leftrightarrow t\left(t^3x-2xt-t^2x^2+2x^2-t^2+2\right)=0$$

Or, pour tout t réel : $t^3x-2xt-t^2x^2+2x^2-t^2+2=tx\left(t^2-2\right)-x^2\left(t^2-2\right)-\left(t^2-2\right)=\left(t^2-2\right)\left(tx-x^2-1\right)$.

Finalement : $t^4x-t^3\left(x^2+1\right)-2xt^2+2x^2t+2t=0 \Leftrightarrow t\left(t^2-2\right)\left(tx-x^2-1\right)=0$.

Si $tx-x^2-1=0$, alors $t=x+\frac{1}{x}$ et, comme $x+\frac{1}{y}=t$, on a $x = y$, ce qui est contraire aux hypothèses. De même, t ne peut être nul. On en déduit que $t^2-2=0$ d'où $t=\sqrt{2}$ (car t est positif).

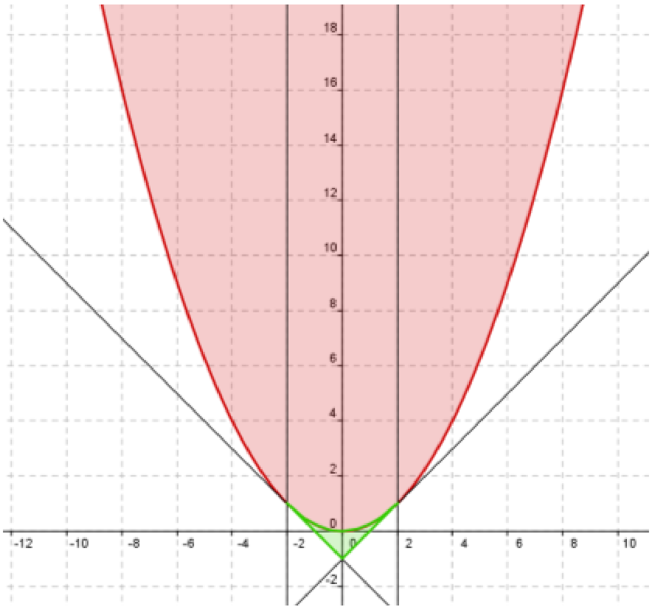
Exercice 5

Soit E l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient : Pour tout $t\in[-1,1]$, $t^2+xt+y\geqslant 0$.

t^2+xt+y est un trinôme du second degré en t. Il est positif ou nul pour tout $t\in[-1,1]$, si, et seulement si son discriminant est négatif ou s'il est positif ou nul et si l'intervalle $[-1,1]$ est à l'extérieur des racines. Comme – 1 et 1 doivent être « du même côté » des racines, il faut en outre que la somme de ces racines soit plus petite que – 2 ou plus grande que 2.

Ce qui, en posant, pour tout I réel, $f(t) = t^2 + xt + y$, se traduit par : $\begin{cases} x^2 - 4y \geq 0 \\ f(-1) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y \leq \dfrac{x^2}{4} \\ 1 - x + y \geq 0 \\ 1 + x + y \geq 0 \end{cases}$

E est la partie rose ou verte du plan représentée ci-dessous :



Thème : Suites et fonctions

Exercice 1

Tous les termes de la suite, sauf peut-être a_1, sont supérieurs à 1. La suite $\left(a_n\right)$ est croissante : en effet, pour un n quelconque :

$$a_{n+1}-a_n=a_1a_2\ldots a_{n-1}\left(a_n-1\right),$$

qui est un produit de facteurs positifs.

La relation définissant les $\left(a_n\right)$ permet d'écrire, pour tout n : $a_{n+1}=1+\left(-1+a_n\right)a_n$.

Nous démontrons par récurrence que pour tout n : $b_n=\dfrac{2}{a_1}-\dfrac{1}{-1+a_{n+1}}\cdot$

Cette relation est vraie pour n = 1. Nous démontrons qu'elle est héréditaire : on suppose que, pour un certain n sur lequel on ne fait aucune autre hypothèse que $b_n=\dfrac{2}{a_1}-\dfrac{1}{-1+a_{n+1}}$, et on calcule b_{n+1}.

$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{a_{n+1}}$, ou encore, en appliquant l'hypothèse de récurrence : $b_{n+1}=\dfrac{2}{a_1}-\dfrac{1}{-1+a_{n+1}}+\dfrac{1}{a_{n+1}}\cdot$ Après simplification, on conclut que la propriété est héréditaire, et donc finalement qu'elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 1.

La différence entre $\dfrac{2}{a_1}$ et b_n est l'inverse du produit de nombres à partir du rang 2 tous supérieurs à 1. Cette différence peut donc être majorée par l'inverse de la puissance n-1 ème de a_2. Elle a pour limite 0.

Exercice 2

Appelons f la fonction définie sur **R** par : $f\left(x\right)=x^2+x-1.$ Pour tout réel a : $f\left(\dfrac{1}{1+a}\right)=\dfrac{1}{\left(1+a\right)^2}+\dfrac{1}{1+a}-1.$

Cette égalité peut encore être écrite : $f\left(\dfrac{1}{1+a}\right)=\dfrac{1+\left(1+a\right)-\left(1+a\right)^2}{\left(1+a\right)^2}$,

ou encore $f\left(\dfrac{1}{1+a}\right)=-\dfrac{f\left(a\right)}{\left(1+a\right)^2}\cdot$

Cette dernière égalité prouve que, pour tout n, $f\left(x_n\right)$ et $f\left(x_{n+1}\right)$ sont de signe contraire. Reste à conclure.

Exercice 3

La relation de récurrence peut être écrite : $a_{n+2}-a_{n+1}=\left(n+2\right)\left(a_{n+1}-a_n\right)$. La suite de terme général $a_{n+1}-a_n$ obéit donc à la relation définissant la factorielle. On a :

$a_2-a_1=2$

$a_3-a_2=3\left(a_2-a_1\right)=3!$

...

$a_{n+1}-a_n=\left(n+1\right)\left(a_{n+1}-a_n\right)=\ldots=\left(n+1\right)!$

Finalement : Pour tout n $a_{n+1}=1!+2!+3!+\ \ldots\ +\left(n+1\right)!$

$1!=1,\ 1!+2!=3,\ 1!+2!+3!=9,\ 1!+\ldots+4!=33,$ qui est un multiple de 11,

Les multiples de 11 suivants sont :

$1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8!=46\ 233$ et $1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8!+9!+10!=4\ 037\ 913.$

Les factorielles des entiers suivants sont toutes multiples de 11 (elles ont toutes 11 comme facteur). Donc tous les termes suivants de la suite (a_n) sont des multiples de 11.

Exercice 4

Pour que x_2 puisse être calculé à partir de x_1 et positif, il est nécessaire que : $\begin{cases} 3-3x_1^2 \geqslant 0 \\ \sqrt{3-3x_1^2} \geqslant x_1 \end{cases}$. Cette condition nécessaire conduit à $0 \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On vérifie que cette condition est suffisante pour que la suite soit bien définie et ses termes positifs (ils sont alors tous inférieurs à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$).

1. Si on veut utiliser la trigonométrie, on peut associer à chaque x_n le nombre θ_n, compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{3}$, dont le sinus est x_n. La définition des termes de la suite s'écrit alors : $\sin\theta_{n+1} = \dfrac{-\sin\theta_n + \sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2\theta_n}}{2}$.

Ce qu'on peut encore écrire : $\sin\theta_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_n - \dfrac{1}{2}\sin\theta_n$.

Ou encore : $\sin\theta_{n+1} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta_n\right)$, en vertu des formules d'addition (quand on les connaît)

Les contraintes du problème imposent qu'alors $\theta_{n+1} = \dfrac{\pi}{3} - \theta_n$. Cette dernière égalité monter que deux valeurs seulement sont possibles pour les termes de la suite, et même que dans le cas où $x_1 = \dfrac{1}{2}$, la suite est stationnaire.

2. On peut ne pas connaître la trigonométrie (pour cet exercice !) et observer que, si *a* et *b* sont positifs, inférieurs à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et liés par la relation $b = \dfrac{-a+\sqrt{3}\sqrt{1-a^2}}{2}$, ils le sont aussi par l'égalité $a^2 + ab + b^2 - \dfrac{3}{4} = 0$. Cette relation est *symétrique* en a et b : a et b jouent alternativement les rôles d'inconnue et de paramètre d'une équation du second degré. La suite est donc de période 2 (dans le cas où *b*, par exemple, est égal à $\dfrac{1}{2}$, l'équation en *a* exprime la nullité d'un carré, avec comme seule racine $\dfrac{1}{2}$.)

Exercice 5

Les premiers essais de recherche d'image conduisent, en utilisant les deux conditions données, à $f(1) = \dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$, $f(2) = \dfrac{2}{3}$.

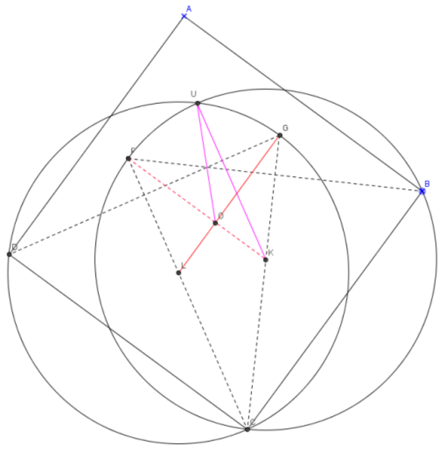
On vérifie que la fonction définie sur **Q*** qui, à chaque rationnel positif s'écrivant $r = \dfrac{p}{q}$, où *p* e t *q* sont des entiers positifs, associe $f(r) = \frac{p}{q+p}$, satisfait aux deux conditions posées. Il faut de plus vérifier le caractère intrinsèque de cette définition : toute autre écriture du rationnel *r* donne, avec le même mode de calcul, la même image. On peut étendre cette définition aux rationnels négatifs en posant $f(r) = f(-r)$.

Thème : Aires et volumes

Exercice 1

Sur la figure ci-contre, apparaissent les arcs UG et UF qui limitent un quart de la surface étudiée. Le point U est un point d'intersection des cercles de centre K de rayon KF et L de rayon LG.

Le côté du carré est de mesure 10, donc la hauteur des triangles équilatéraux est $5\sqrt{3}$. Le rayon KF, par exemple, mesure les deux tiers de cette hauteur, soit $\frac{10}{\sqrt{3}}$. Les segments OF et OG mesurent $5\left(\sqrt{3}-1\right)$.



Soit (O,I,J) un repère orthonormé tel que (OB) soit l'axe des abscisses et (OA) l'axe des ordonnées

Dans ce repère :

O a pour coordonnées (0 ; 0)

$$B\left(5\sqrt{2};0\right), A\left(0;5\sqrt{2}\right) C\left(0;-5\sqrt{2}\right); D\left(-5\sqrt{2};0\right)$$

La droite (OK) est perpendiculaire à la droite (BC) qui a pour coefficient directeur 1, donc la droite (OK) a pour équation $y=-x$ dans ce repère.

De plus $K \in [KF]$, donc $OK = KF - OK = \frac{15-5\sqrt{3}}{3}$

donc : $x_K = -y_k = \frac{OK}{\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{6} = \Gamma$ ($\approx$ 1,494 à 10^{-3})

et $x_L = y_L = -\Gamma$

Le cercle circonscrit au triangle BCF a pour équation $(x-\Gamma)^2+(y+\Gamma)^2 = \frac{100}{3}$

Le cercle circonscrit au triangle DGC a pour équation $(x+\Gamma)^2+(y+\Gamma)^2 = \frac{100}{3}$

Le point U est l'intersection de ces deux cercle avec $x_U = 0 \; et \; y_U > 0$

$$\Gamma^2+(y+\Gamma)^2 = \frac{100}{3}$$

$$y^2+2\Gamma y+2\Gamma^2-\frac{100}{3} = 0$$

$$\Delta = 4\Gamma^2-4\times\left(2\Gamma^2-\frac{100}{3}\right) > 0$$

$$y_1 = \frac{-2\Gamma-\sqrt{\Delta}}{2} < 0 \; et y_2 = \frac{-2\Gamma+\sqrt{\Delta}}{2} > 0$$

Donc $y_U = \frac{-2\Gamma+\sqrt{4\Gamma^2-4\times\left(2\Gamma^2-\frac{100}{3}\right)}}{2}$ donc $OU = \frac{-2\Gamma+\sqrt{4\Gamma^2-4\times\left(2\Gamma^2-\frac{100}{3}\right)}}{2}$

Soit p et S le périmètre et l'aire du triangle OKU

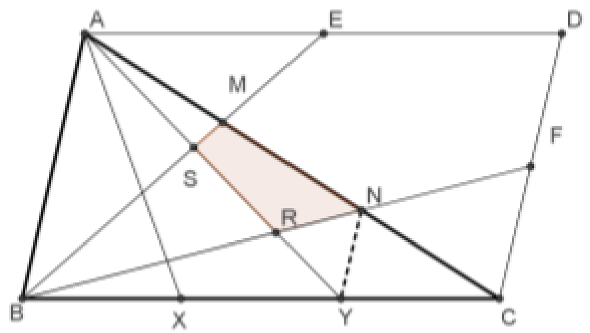
$S = \sqrt{p(p-OK)(p-UK)(p-OU)}$ (formule de Héron)

Formule des sinus

$$\frac{OU}{\sin\alpha} = \frac{UK}{\sin\frac{3\pi}{4}} \quad \text{donc :} \quad \sin\alpha = \frac{OU\times\sin 135}{UK}$$

Exercice 2 Petit lopin

L'aire du triangle ABC étant par convention égale à 1, l'aire du triangle BMN est donc $\frac{1}{3}$.



Les triangles RNY et RBA sont en situation de Thalès. On en déduit que : $\frac{YN}{AB} = \frac{RN}{RB}$. Il s'ensuit que $\frac{BR}{BN} = \frac{3}{4}$.

En complétant le triangle initial pour obtenir le parallélogramme ABCD, on observe que les points E et F sont respectivement les milieux de [AD] et [DC] (on peut aussi dire que les triangles MAE et MCB sont en situation de Thalès). On a notamment : $\frac{BM}{BE} = \frac{2}{3}$.

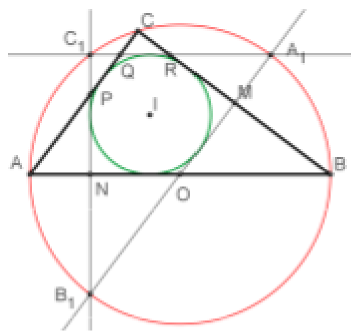
En considérant les triangles ASE et YSB, eux aussi en situation de Thalès : $\frac{BS}{SE} = \frac{BY}{AE} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$. On en déduit que

$$\frac{BS}{BM} = \frac{BS}{BE} \times \frac{BE}{BM} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{7}.$$

Reste à comparer les aires des triangles MBN et RBS. Ces triangles ont un angle commun. Le rapport de leurs aires est donc le rapport des produits des longueurs des côtés adjacents à cet angle dans l'un et l'autre triangle (car, dans ce qu'on appellerait la « hauteur » de chacun apparaîtrait le sinus – commun – de l'angle commun).

Donc : $\frac{Aire(\text{RBS})}{Aire(\text{RMN})} = \frac{\text{BR} \times \text{BS}}{\text{BN} \times \text{BM}} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{9}{14}$. L'aire du triangle RBS est donc $\frac{9}{14} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{14}$. L'aire du quadrilatère MNRS est donc : $\frac{1}{3} - \frac{3}{14} = \frac{5}{42}$.

Exercice 3 Concurrence entre triangles

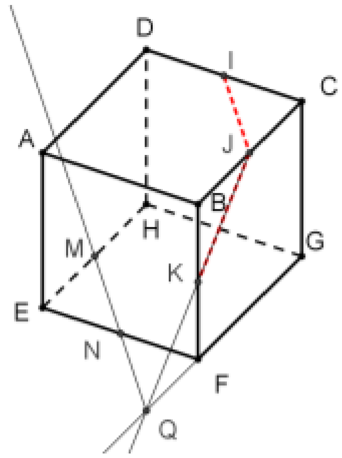


La question consiste d'abord à savoir si cette situation peut se produire, et à combien d'exemplaires. On se donne un cercle et un triangle rectangle inscrit dans ce cercle. Le centre O est le milieu de l'hypoténuse [AB]. Il appartient donc à une tangente au cercle inscrit (de centre I). Ou bien le diamètre [AB] est tangent en O au cercle inscrit (le triangle ABC est alors rectangle isocèle et confondu avec le triangle $A_1B_1C_1$), ou bien une seule autre droite issue de O est tangente au cercle inscrit. L'hypoténuse $[A_1B_1]$ du triangle concurrent est unique. La bissectrice de l'angle $\widehat{AOA_1}$ passe par I. Les angles $\widehat{OAI}$ et $\widehat{OA_1I}$ ont même mesure. On en déduit finalement qu'il n'y a qu'un triangle concurrent possible, superposable à ABC.

Dans l'hypothèse où les côtés du triangle ABC mesurent 3, 4 et 5, le rayon du cercle inscrit est 1 (on écrit de deux façons l'aire du triangle : demi produit des cathètes ou demi-produit du périmètre par le rayon du cercle inscrit). La perpendiculaire abaissée de O sur [BC] coupe ce segment en son milieu ; elle est parallèle à (AC) et la distance entre ces deux droites est 2. On a donc trouvé la deuxième tangente au cercle inscrit passant par O et l'hypoténuse du triangle $A_1B_1C_1$. La perpendiculaire à (AB) passant par B_1 coupe le cercle circonscrit en C_1. L'aire cherchée résulte de la déduction à l'aire de ABC des aires des triangles OMB, ANP et CQR. Ces triangles ont tous les mêmes angles que le triangle ABC. Ils en sont des réductions (on parle de triangles semblables). Leurs aires sont respectivement 1,5 (car MB = 2), $\frac{2}{3}$, et $\frac{1}{6}$· Leur total est $\frac{7}{3}$, dont le complément à 6 est $\frac{11}{3}$·

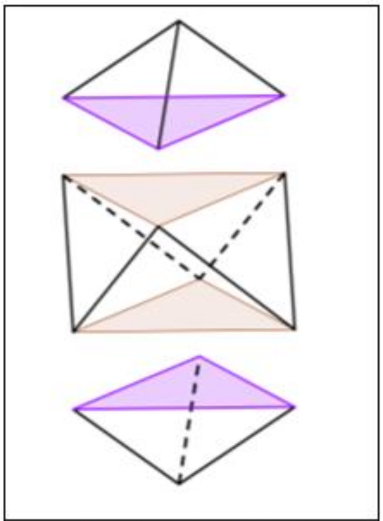
Exercice 4   Ébénisterie

On doit d'abord vérifier qu'il y a bien un plan passant par les milieux de six arêtes (les six autres étant celles aboutissant à deux sommets diagonalement opposés) d'un cube.
Pour cela, considérons par exemple le plan défini par les milieux I, J et K. Ce plan coupe le plan (EFG) selon une droite parallèle à (IJ), passant par N, c'est-à-dire nécessairement (NM), etc. On voit ainsi que le plan (IJK) contient tous les autres milieux, définissant un hexagone dont tous les côtés ont la même longueur… ce qui ne suffit pas pour qu'il soit régulier. Heureusement, tous ses sommets sont à la même distance du centre O du cube, qui est aussi un point du plan (IJK).
La sphère inscrite, centrée en O, coupe le plan (IJK), passant par O, selon un de ses grands cercles. Reste à déduire l'aire du disque, π, de l'aire de l'hexagone, $3\sqrt{3}$ (c'est six fois l'aire d'un triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$).



Exercice 5   Jerrycan academy

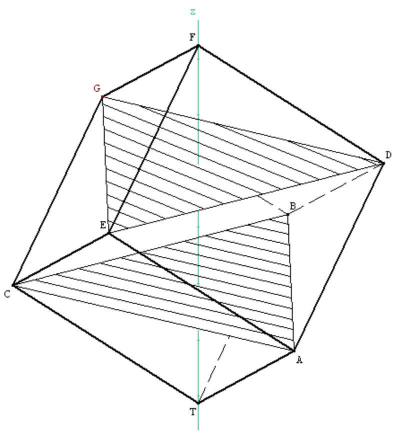
Le cube posé sur un sommet peut être décomposé en trois solides : deux pyramides à base triangulaire (les côtés de la base sont des diagonales de trois faces du cube ayant un sommet en commun, leur longueur est $\sqrt{2}$, et les arêtes sont les trois arêtes du cube ayant de sommet en commun, leur longueur est 1), et un antiprisme dont les bases sont des triangles équilatéraux (celles des pyramides) et les faces des triangles rectangles isocèles de base $\sqrt{2}$ et de côté 1 (les arêtes restantes du cube) .



Le cube décomposé

Les pyramides ont pour volume $\frac{1}{6}$(si on considère qu'elles ont pour base un triangle rectangle isocèle de côté 1 et une hauteur égale à 1). On en déduit que leur hauteur (perpendiculaire au triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$) est $\frac{1}{\sqrt{3}}$·

Une pyramide de même sommet de hauteur h est une réduction de la pyramide pour volume $V(h)=\left(h\sqrt{3}\right)^3\times\frac{1}{6}$, soit $V(h)=h^3\frac{\sqrt{3}}{2}$·



Une fois parvenu à hauteur de la première base, le liquide commence à remplir l'antiprisme.

Les sections de l'antiprisme par des plans parallèles à ses bases sont des hexagones (non réguliers, sauf pour la section exactement à mi-hauteur) dont les côtés ont pour longueur, en alternance, x et $\sqrt{2}-x$ $(0 \le x \le \sqrt{2})$ et sont deux à deux parallèles.
On montre que l'aire de cet hexagone est $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+x\sqrt{2}-x^2\right)$, et que, si z est la hauteur correspondante dans l'antiprisme, alors $= z\sqrt{6}$.
On en déduit l'aire de la section à la cote z (dans l'antiprisme), c'est-à-dire l'aire de

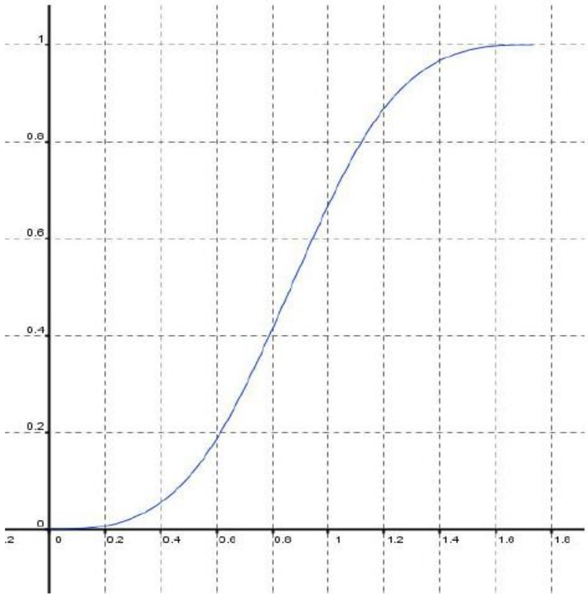
la surface du liquide : $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+2\sqrt{3}z-6z^2\right)$.

Puis un peu de calcul intégral permet d'établir que, si h est la hauteur de liquide dans l'antiprisme, alors le volume de liquide dans l'antiprisme est $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(h+\sqrt{3}h^2-2h^3\right)$.
Enfin, la deuxième pyramide se remplit comme la première, à ceci près qu'au lieu que le volume occupé pour une hauteur h de liquide dans la pyramide soit $h^3\frac{\sqrt{3}}{2}$, il est $\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-h\right)^3\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Finalement , si h est la hauteur totale de liquide dans le cube dont une diagonale est verticale et $V(h)$ le volume de liquide :

- si $0 \leq h \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, alors $V(h)=\frac{h^3\sqrt{3}}{2}$
- si $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq h \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$, alors $V(h)=\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}h+\frac{9}{2}h^2-\sqrt{3}h^3$
- si $\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq h \leq \sqrt{3}$, alors $V(h)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-h\right)^3$

Ci-contre, la courbe.

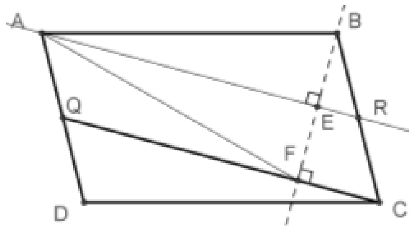


Pour répondre à la question posée, il n'y a qu'à passer des unités au cube aux unités. Il n'y a aucun nouveau calcul à faire.

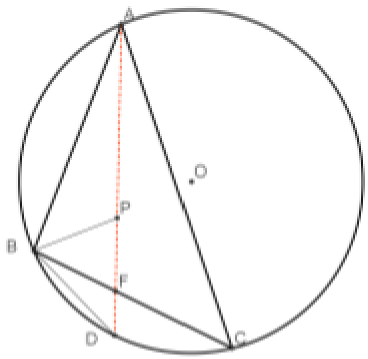
Thème : Angles et distances

Exercice 1

La droite parallèle à (QC) passant par A coupe [BF] en E et le côté [BC] en son milieu R (car ARCQ est un parallélogramme). Dans le triangle BCF, (RE) est parallèle à (CF) et passe par le milieu de [BC]. E est donc le milieu de [BF], et (RE) est perpendiculaire à (BF).
La droite (AE) est donc la médiatrice de [BF] et le triangle ABF est isocèle de sommet principal A



Exercice 2



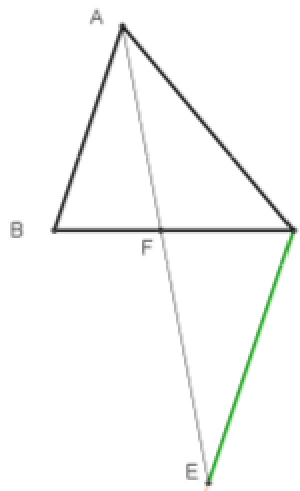
On considère que l'arc BC de l'énoncé est celui qui ne contient pas A. On appelle F le point d'intersection de (AD) avec [BC].
Les angles $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CBD}$ d'une part, $\widehat{BDA}$ et $\widehat{BCA}$ d'autre part interceptent les mêmes arcs et ont donc mêmes mesures. Le fait que le triangle DBP soit isocèle fournit une expression de la mesure de l'angle $\widehat{PBD}$:
$\widehat{PBD} = \frac{180-\widehat{PDB}}{2}$. Donc :

$$\widehat{PBF} = \widehat{PBD} - \widehat{FBD} = \frac{180 - \widehat{BCA}}{2} - \frac{\widehat{CAB}}{2}.$$

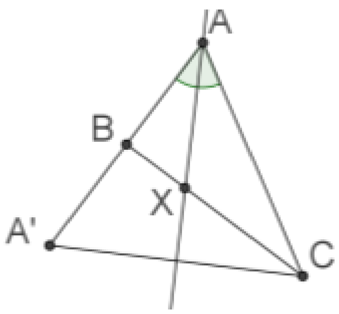
Ce qui permet de conclure que P appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.

Cet exercice fournit une construction du centre du cercle inscrit quand le centre du cercle circonscrit est connu.

Exercice 3



Rappel : la bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle coupe le côté opposé dans le rapport des côtés adjacents.
C'est ce que rappelle la figure ci-contre, qui fournit aussi une construction de la bissectrice ((CE) est parallèle à (AB) et
CF = AC ; l'angle $\widehat{CEF}$ est d'une part en situation d'angles alternes-internes, d'autre part d'angles à la base d'un triangle isocèle avec les deux angles de sommet A).



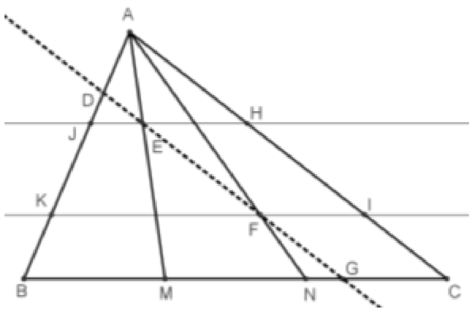
Le côté [AB] a donc une longueur moitié de celle du côté [AC]. Si on considère le point A', symétrique de A par rapport à B, le triangle AA'C a deux côtés de même longueur et un angle de 60° : il est équilatéral.
La bissectrice [AX] est hauteur, etc. tout comme [CB]. Le point X est le centre du cercle circonscrit au triangle, et donc XA = XC et le triangle XAC est isocèle de sommet principal X.

Exercice 4

1. Les segments [IJ] et [DF] ont le même milieu (le centre du cube) et donc IFJD est un parallélogramme (le plan est celui formé par les diagonales, sécantes). C'est même un losange, ses côtés ayant tous la même longueur $\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot$ Ses diagonales mesurent $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ (diagonale d'un carré identique à une face du cube et diagonale du cube). Les demi-angles au sommet ont donc pour tangentes, l'un $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, l'autre son inverse $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot$ puisqu'ils sont complémentaires. Ils ont pour arrondis au centième de degré 39,23 et 50,77. Leurs doubles ont pour arrondis au degré 78 et 101 (oui, ça ne fait pas 180, il ne fallait pas demander des arrondis au degré…)

2. Classiquement, la médiane [BK] du parallélogramme ABCD (qui est un carré, mais c'est sans importance ici), coupe la diagonale [AC] en un point situé au tiers de cette dernière. Il en va de même pour la position du point N. Si on regarde la figure dans le rectangle ACGE (ci-contre), [MN] est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les cathètes mesurent 1 et $\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot$ Elle a donc pour longueur $\frac{\sqrt{11}}{3}\cdot$

Exercice 5



On trace les parallèles à (BC) passant par E et F. On exploite quelques situations de Thalès :

1. HGF et HCA donnent $\frac{GC}{NC} = \frac{FA}{NA}$

2. AKF et ABN donnent $\frac{KF}{BN} = \frac{FA}{NA}$

Mais, comme BN = 2 NC, on obtient KF = 2 GC.

3. AJE et ABM donnent $\frac{AE}{AM} = \frac{JE}{BM}$

4. MEG et MAC donnent $\frac{AE}{AM} = \frac{GC}{MC}$. Mais, comme MC = 2 MB, on obtient GC = 2 JE.

Les deux résultats conduisent à KF = 4 JE ;

5. DJE et DKF donnent $\frac{DE}{DF} = \frac{JE}{KF}$. D'où le résultat.

Thème : Logique, dénombrement

Exercice 1

D’une distribution ‘autour de la table) à une autre, seul un nombre pair de chevaliers ont pu changer de place. En effet, si un chevalier a pris la place de son voisin de gauche, par exemple, ce dernier ne peut qu’échanger avec lui ou prendre à son tour la place de son voisin de gauche. On dénombre donc :

1. Les échanges entre deux voisins (il y en a 10)
2. Les cumuls d’échanges entre voisins séparés par un ou plusieurs chevaliers immobiles.
3. Deux cycles : chacun a pris la place de son voisin (de droite ou de gauche)

Exercice 2

Lorsqu’on tire 100 balles parmi les 111, les quatre couleurs sont représentées. Les 11 balles restantes sont donc de couleurs représentées parmi les balles tirées. Il y a donc au moins 12 balles de chaque couleur (à partir des 11 balles non tirées, on pourrait faire des échanges pour rendre les balles tirées toutes de la même couleur ; si on n’y parvient pas, c’est que l’une des quatre couleurs est épuisée avant qu’on en ait rassemblé 100, contrairement à l’énoncé).

Si trois couleurs sont représentées par 12 balles (l’autre en comptant 75), alors trois couleurs sont nécessairement représentées dans un tirage de 88 boules (75 + 12 + 1).

Exercice 3

Supposons que les cases de l’échiquier soient alternativement noires et blanches. Deux cases voisines portent des nombres de haricots distincts de une unité. On en déduit que toutes les cases noires portent un nombre pair de haricots et les blanches un nombre impair (ce choix est évidemment arbitraire). Si n est pair, il y a autant de cases noires que de cases blanches ($\frac{n^2}{2}$, qui est un nombre entier et même pair, puisque n est pair). Le nombre total de haricots est lui aussi pair comme somme de nombres pairs. Mais le total est 2 013. Donc n est impair. Dans ce cas, l’une des couleurs est plus représentée que l’autre : Il y a $\frac{n^2+1}{2}$ cases d’une sorte, $\frac{n^2-1}{2}$ de l’autre. Les cases qui contiennent un nombre impair de haricots en contiennent chacune au moins 1, de sorte que $\frac{n^2-1}{2} \leqslant 2013$. Cette inégalité conduit à $n \leqslant 63$.

Sur un échiquier de 3 969 cases, si 1 985 cases noires sont occupées chacune par un haricot, il reste 28 haricots à distribuer. Un coin de l’échiquier peut être rempli comme ci-contre.

1	2	1	2
2	1	2	1
1	2	1	2
2	1	2	1
1	2	1	2
2	1	2	1
1	2	1	2

Exercice 4

On peut supposer que les lettres utilisées sont 0 et 1 et, sans changer la généralité du problème, qu’un des mots de la langue est

1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Un autre mot de la langue fait donc apparaître au moins trois 0.

Nous nous intéressons aux mots s’écrivant avec trois 0 et quatre 1. Il y en a a priori 35. Nous les classons en plaçant les 0 en position 1, 2, 3 puis 1, 2, 4, etc. jusqu’à 5, 6, 7. Le mot figurant à la première ligne du tableau ci-contre est un mot nouveau, et les huit suivant n’ont avec lui qu’au maximum deux différences. Le mot figurant à la dernière ligne fait apparaître 4 différences avec celui écrit sur la première ligne, dont il est donc distinct selon la définition donnée. Mais il ne présente que deux différences avec le mot de la deuxième ligne, dont il doit donc être considéré comme identique.

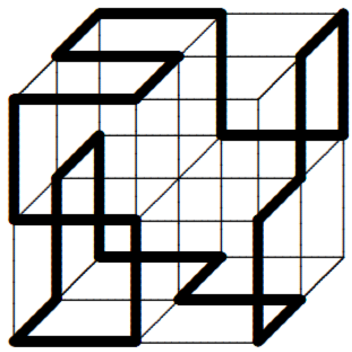
Il y a donc une contradiction : la définition donnée n’est pas intrinsèque.

0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1

Exercice 5

Le réseau à parcourir comporte 52 tiges et 27 nœuds. Le nœud d'arrivée et celui de départ étant un seul et même, le parcours peut être vu comme un circuit fermé passant par au maximum les 27 nœuds, donc empruntant au maximum 27 tiges.

Le cube a 12 arêtes, dont chacune ne peut être parcourue qu'à moitié (sauf peut-être une si le point de départ et d'arrivée se trouve au milieu d'une arête). 13 demi-arêtes sont donc parcourues, au maximum. Si tous les sommets du cube étaient rencontrés dans le parcours, c'est 16 demi-arêtes qui seraient parcourues (les sommets du cube ne sont atteint que par les arêtes). Un parcours passe donc au maximum par 6 des 8 sommets du cube. Le maximum de la longueur tombe donc à 25.



Prenant le point de départ comme origine d'un repère, nous pouvons caractériser les déplacements de l'automate selon trois directions : vers le haut, vers le bas, vers la droite, vers la gauche, vers l'avant, vers l'arrière, pour un bilan nul, puisque le point de départ et celui d'arrivée sont identiques. Le nombre de déplacements est donc pair. Ce qui ramène le maximum possible à 24. La figure ci-contre fournit un exemple de chemin passant par 24 nœuds et 24 tiges.

Exercice 6

Les deux cartes portant le numéro 2 014 ont entre elles un espace pouvant contenir 2 013 cartes. Sur l'espace total des 4 028 places, il en reste donc 2 013 en dehors de l'intervalle limité par les deux « 2 014 ». Si on veut placer les deux cartes « 2 013 », séparées par un espace de 2 012 places, on ne peut ni les mettre toutes les deux dans l'intervalle limité par les deux « 2 014 » (il manque une place), ni les mettre en dehors de cet intervalle (si le domaine restant est en deux parties, les cartes seront trop éloignées, s'il est en un seul morceau de longueur 2 013, c'est insuffisant. On est donc contraint de placer les deux cartes « 2 013 » l'une dans l'intervalle limité par les deux cartes « 2 014 », l'autre à l'extérieur. Ces deux espaces se trouvent ainsi réduit d'au moins une unité, et on peut continuer le raisonnement… jusqu'au moment de placer les deux cartes « 1 » qui devraient être séparées au moins par une carte « 2 014 », ce qui est exclu.