Pépinière de mathématiques décembre 2010 – Corrigés

Thème 1 : fonctions et équations

1. Puisque le produit est de degré 3 en *x*, *y*, *z*, on est porté à manipuler les 3 équations pour produire des termes de degré 3. Cubant la première équation, on trouve :
   $x^3+y^3+z^3+3x^2y+3y^2x+3y^2z+3z^2y+3x^2z+3z^2x+6xyz=27$ (A)
   En multipliant la première par la deuxième équation, on obtient :
   $x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+x^2z+z^2x=21$ (B)
   Laissons la troisième équation inchangée :
   $x^3+y^3+z^3=15$. (C)
   En calculant (A) – 3(B) on obtient : $-2\left(x^3+y^3+z^3\right)+6xyz=-36$
   D'où $xyz=-1$.

2. Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=4\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$.
   F est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.
   $f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2-1}\geqslant\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}$
   En élevant au carré (des nombres positifs), on obtient $14x^2-16\geqslant 2x\sqrt{x^2-1}$ soit $7x^2-8\geqslant x\sqrt{x^2-1}$.
   En élevant de nouveau au carré (on se place sur $]1;+\infty[$), on obtient : $48x^4-111x^2+64\geqslant 0$ et $7x^2-8\geqslant 0$. Les solutions de l'équation $48x^4-111x^2+64=0$ (toutes les deux positives) sont $-\sqrt{\dfrac{111+\sqrt{33}}{96}}$, $-\sqrt{\dfrac{111-\sqrt{33}}{96}}$, $\sqrt{\dfrac{111-\sqrt{33}}{96}}$ et $\sqrt{\dfrac{111+\sqrt{33}}{96}}$.
   Un tableau de signes et l'étude de la position de des solutions par rapport à 1 conduit à un minimum en $\sqrt{\dfrac{111+\sqrt{33}}{96}}$.

3. L'équation s'écrit $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{\left(yz+4(y+1)\right)}{2(z+2)(y+2)}$ soit $z(4-xy)=4(xy+x+y)$
   Si où *x*, *y* et *z* sont des entiers strictement positifs tels que $x\geqslant 4$, le membre de droite est toujours supérieur ou égal à 12.
   Si $x\geqslant 4$ alors $xy\geqslant 4$ et le membre de gauche est inférieur ou égal à 0 et il ne peut y avoir égalité. Donc il n'y a pas de triplet solution telle que $x\geqslant 4$ et vu le rôle équivalent joué par *x* et *y*, il n'y a pas de solution telle que $y\geqslant 4$.
   Les triplets solution sont donc à chercher parmi ceux tels que $x<4$ et $y<4$. On doit même avoir aussi $xy<4$ (d'après la relation ci-dessus).
   Pour $x=1$, on ne peut envisager que $y=1$ ou $y=2$ ou $y=3$, lesquels conduisent respectivement à *z* = 4, *z* = 10, *z* = 28.
   Pour $x=2$ on ne peut envisager que *y* = 1 qui donne *z* = 10
   Pour *x* = 3 on ne peut envisager que *y* = 1 qui donne *z* = 28.

   Il y a donc 5 triplets solution : (1,1,4) (1,2,10) (1,3,28) (2,1,10) (3,1,28). On peut vérifier que si on échange *x* et y dans l'un de ces triplets on retrouve un de ces triplets.

4. On peut vérifier que $P(x)$ ne peut être un polynôme du premier degré, c'est-à-dire l'un des polynômes *x*, *x* + 1, *x* – 1, – *x*, *x* + 1, – *x* – 1.
Si $P(x)$ est de degré 2, on peut trouver deux réels *a* et *b* appartenant à {0, 1, – 1} tels que $P(x)=x^2+ax+b$. De plus $b\neq 0$ car le coefficient constant de x^8-x+1 .
En essayant de diviser x^8-x+1 avec différentes valeurs de *a* et de *b*, on constate que, pour avoir un reste non nul, on doit prendre $a=-1$ et $b=1$.
On trouve alors $x^8-x+1=\left(x^2-x+1\right)\left(x^6+x^5-x^3-x^2+1\right)$.

5. Comme $Q(x)$ est un polynôme de degré 4, $P(x)$ doit être un polynôme de degré 2.
On cherche α,β,γ réels tels que $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.
Alors $Q(x)=\alpha^2x^4+2\alpha^2\beta x^3+\left(\alpha\beta^2+2\alpha^2\gamma+\alpha\beta\right)x^2+\left(2\alpha\beta\gamma+\beta^2\right)x+\alpha\gamma^2+\beta\gamma+\gamma$.
Donc $\alpha^2=1$ et $\alpha=1$ ou $\alpha=-1$. On obtient donc :
$\gamma+\beta\gamma+\gamma=13$ et $\alpha=1$ ou $-\gamma+\beta\gamma+\gamma=13$ et $\alpha=-1$.
L'ensemble des triplets solutions est donc :
S = $\left\{(1,11,1),(1,-13,-1),(1,-13,13),(1,11,13),(-1,13,-1),(-1,-15,-1),(-1,13,13),(-1,-15,-13)\right\}$.

6. On essaye de voir ce qui se passe progressivement :
Si on a 1 fraction, l'équation est $x=\dfrac{x+1}{x}$ soit $x^2-x-1=0$ (avec $x\neq 0$).
Si on a 2 fractions, l'équation est $x=\dfrac{2x+1}{x+1}$ soit $x^2-x-1=0$ (avec $x\neq 0$ et $x\neq -1$).
Si on a 3 fractions, l'équation est $x=\dfrac{3x+1}{2x+1}$ soit $x^2-x-1=0$ (avec $x\neq 0$, $x\neq -1$ et $x\neq -\dfrac{1}{2}$).
Notons u_n le second membre de l'équation lorsqu'il contient *n* fractions successives :
$u_1=\dfrac{x+1}{x}$, $u_2=\dfrac{2x+1}{x+1}$, $u_3=\dfrac{3x+2}{2x+1}$.
Posons $F_0=0$, $F_1=1$, $F_2=2$, $F_3=3$, $F_4=5$ c'est-à-dire tout terme de rang supérieur ou égal à 2 est la somme des 2 termes précédents : $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ pour $n\geqslant 2$ (cette suite est une suite de Fibonacci).
Un raisonnement par récurrence permet de généraliser ce qui est constaté sur les premiers rangs.
Donc l'équation proposée qui est $x=u_{29}$ est équivalente à $x=\dfrac{F_{29}x+F_{28}}{F_{28}x+F_{27}}$ et équivaut à
$F_{28}x^2+\left(F_{27}-F_{29}\right)x-F_{28}=0$
Or d'après la définition de la suite $\left(F_n\right)$ on a $F_{27}-F_{29}=-F_{28}$, ce qui permet de simplifier par F_{28} et on retrouve l'équation $x^2-x-1=0$ ……

7. Dans tout l'exercice on supposera $x\leqslant y\leqslant z$, les autres triplets (*x*, *y*, *z*) solutions s'obtenant par changement de l'ordre.

Partie A

Si *y* = 0 nécessairement *x* = 0 et en reportant dans l'équation on obtient *z* = 0 ; ce triplet $(x,y,z)=(0,0,0)$ convient effectivement
Si *y* = 1 alors soit *x* = 0 et 1 + *z* = 0 ce qui est impossible, soit *x* = 1 et 2 + *z* = *z* qui est aussi impossible.
Donc en dehors du triplet solution (0,0,0), on doit avoir $y\geqslant 2$

(et donc $x \geqslant 1$ car si $x = 0$ il faut $y + z = 0$ ce qui est impossible à réaliser).

On peut alors écrire, puisque $xy \geqslant 2$, $z = \dfrac{x+y}{xy-1}$; on vérifie (en dérivant par exemple) que la fonction f définie sur $\left]\dfrac{1}{y};+\infty\right[$ par $f(u) = \dfrac{u+y}{uy-1}$ est strictement décroissante sur $\left]\dfrac{1}{y};+\infty\right[$ et comme sur $1 > \dfrac{1}{y}$ on peut écrire :

pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant f(1)$. Or $f(1) = \dfrac{y+1}{y-1} = 3 - 2\dfrac{y-2}{y-1}$

Comme $y \geqslant 2$, nécessairement $z \leqslant 3$ (avec égalité si et seulement si $y = 2$) et comme par ailleurs $y \leqslant z$, il n'y a que 2 possibilités :

soit $z = 3$ ce qui exige $y = 2$ et l'équation initiale devient $x + 5 = 6$ soit $x = 1$, et le triplet (1,2,3) convient effectivement

soit $z = 2$ et on a encore $y = 2$ (car $2 \leqslant y \leqslant z$) ce qui donne $x + 4 = 4x$ soit $x = 4/3$ qui n'est pas un entier naturel

Finalement, à l'ordre près sur x, y, z , il n'y a que 2 triplets (x, y, z) solutions : (0,0,0) et (1,2,3).

Partie B

a. On va utiliser exactement la même méthode que pour la partie A.
Puisque $n \geqslant 1$, le triplet (0,0,0) n'est pas solution et un raisonnement analogue au précédent montre que nécessairement $y \geqslant 2$ et $x \geqslant 1$, donc $xy \geqslant 2$ et $z = \dfrac{x+y+n}{xy-1}$
On définit la fonction f sur $\left]\dfrac{1}{y};+\infty\right[$ par $f(u) = \dfrac{u+y+n}{uy-1}$. F est strictement décroissante sur $\left]\dfrac{1}{y};+\infty\right[$ donc pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant f(1)$. Or $f(1) = \dfrac{y+n+1}{y-1} = n+3-(n+2)\dfrac{y-2}{y-1}$
Comme $y \geqslant 2$ on a $z \leqslant n+3$ (avec égalité si et seulement si $y = 2$) soit $x \leqslant y \leqslant z \leqslant n+3$.

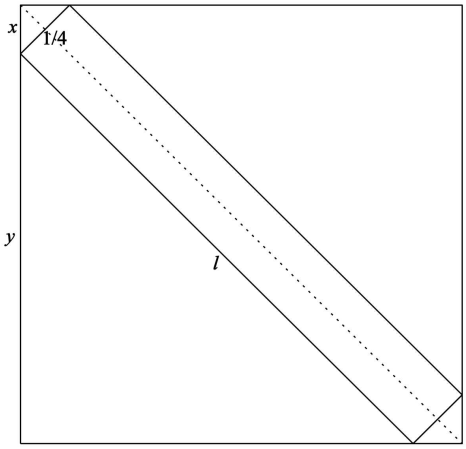
b. Imposer z = n + 3, c'est imposer que le plus grand des nombres x, y, z est z et cela exige (lorsque par ailleurs $x \leqslant y \leqslant z$) que $y = 2$.
L'équation devient $x+2+n+3+n = 2x(n+3)$ qui donne $x = 1$ si on impose $x \leqslant y$.
Si on n'impose plus $x \leqslant y$ (x et y sont cependant encore inférieurs ou égaux à $n + 3 = z$) on peut avoir aussi $y < x$ qui donnera évidemment $y = 1$ et $x = 2$, et donc il y a 2 triplets (x, y, z) solutions telles que $z = n + 3$: $(1, 2, n + 3)$ et $(2, 1, n + 3)$.

c. On essaye de voir ce qui se passe pour les plus petites valeurs de n :
Si $n = 1$, l'équation s'écrit $x + y + z + 1 = xyz$.
D'après la question a. on a $2 \leqslant y \leqslant z$ et on veut $z < n+3$. Or $n + 3 = 4$, donc $z \leqslant 3$ et
soit $y = 2$ qui donne $x + z + 3 = 2xz$; or $z = 2$ ou $z = 3$: dans les 2 cas cela conduit à une valeur non entière de x, donc c'est impossible
soit $y = 3$ et donc $z = 3$ ce qui donne $x + 7 = 9x$ qui conduit encore à une valeur non entière de x et donc c'est impossible :
ainsi pour $n = 1$ l'équation $x + y + z + n = xyz$ n'a pas de triplet solution (x, y, z) avec x, y, z entiers naturels strictement inférieurs à $n + 3$.
Si $n = 2$, l'équation s'écrit $x + y + z + 2 = xyz$ et, …...coup de chance, on voit que le triplet
(2, 2, 2) est solution. Or, dans ce cas $2 < n + 3$ et donc la plus petite valeur de n cherchée est $n = 2$.

Thème 2 : géométrie

1. **Le carré de la balançoire**

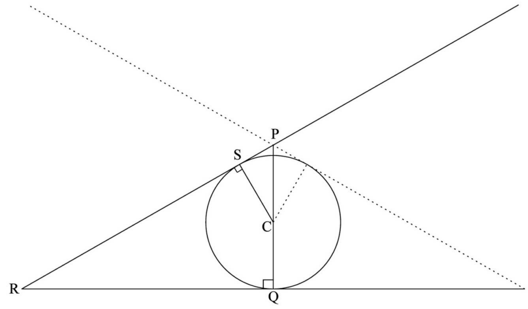
On commence par identifier la région à utiliser dans le carré. La plus grande longueur dans un carré étant selon sa diagonale, on aura la plus longue planche possible si on la centre le long de cette diagonale. Soit x le côté du triangle rectangle isocèle formé par la planche et le coin supérieur, y le côté du triangle rectangle isocèle formé par le coin inférieur et l la longueur maximale utilisable dans le carré.



Le théorème de Pythagore permet de trouver $x = \frac{1}{4\sqrt{2}}$.

Comme $x + y = \frac{9\sqrt{2}}{8}$, on trouve $y = \sqrt{2}$ puis $l = 2$.

Si on regarde maintenant la balançoire de côté, RQ est la demi-longueur au sol donc vaut 1. Le sol et la planche étant tangents au cercle, la longueur RS vaut également 1. La longueur maximale de la planche correspondra donc à la longueur au sol plus un arc de cercle allant du point S à l'autre point de tangence de la planche. On doit donc trouver l'angle au centre de cet arc de cercle.



En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve : $PR = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Cette valeur étant le double de la longueur PQ, on en déduit que l'angle $\widehat{PQR}$ mesure 30°.

Le triangle SCP étant « semblable » au triangle PRQ (angles de même mesure), on a :

- si r désigne le rayon du cercle, alors $\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{r}{\frac{1}{\sqrt{3}} - r}$, ce qui donne $r = 2 - \sqrt{3}$;
- l'angle $\widehat{PCS}$ mesure aussi 30°. L'angle au centre cherché est donc de 60° et l'arc de cercle correspond alors à 1/6 de la circonférence du cercle.

La longueur de l'arc de cercle est donc $\frac{1}{6} \times 2\pi r = \frac{\pi\left(2-\sqrt{3}\right)}{3}$.

La longueur de la planche étant celle au sol plus celle de l'arc de cercle, elle vaut donc $2 + \frac{\pi\left(2-\sqrt{3}\right)}{3}$ m.

2. **Un quart, un demi et un complet**

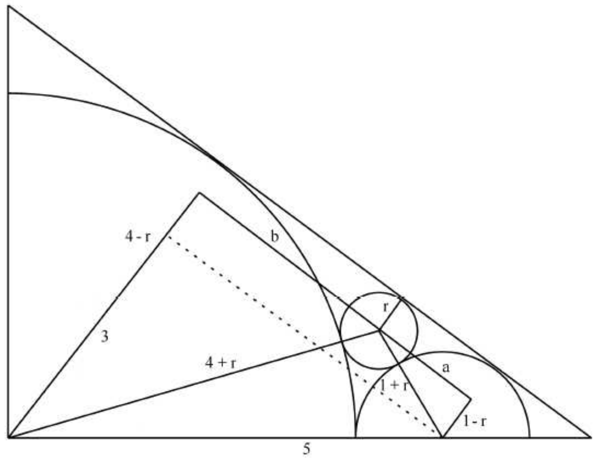
Les rayons étant perpendiculaires aux points de tangence, on peut placer deux rayons sur un même segment pour relier les centres de deux cercles. Soit r le rayon cherché du petit cercle. Le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$(1+r)^2 = a^2 + (1-r)^2$ d'où $a^2 = 4r$

$(4+r)^2 = b^2 + (4-r)^2$ d'où $b^2 = 16r$

$a+b=4$ (longueur du segment en pointillés dans le triangle rectangle « 3, 4, 5 »)

On en tire le système suivant :



$$\begin{cases} b = 2a \\ a+b=4 \end{cases} \text{ puis } a = \frac{4}{3} \text{ et } b = \frac{8}{3} \text{ d'où } r = \frac{4}{9}.$$

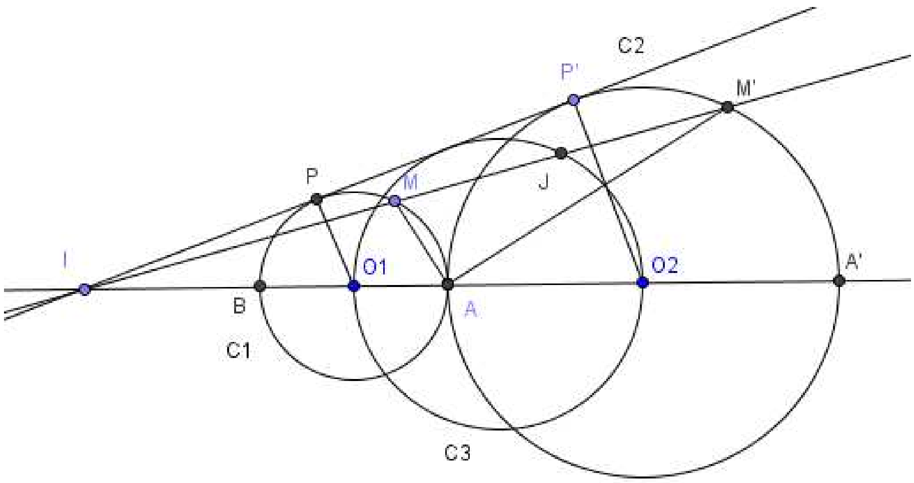
3. a. On note $\widehat{\mathrm{BAC}}$ la mesure de l'angle géométrique des demi-droites [AB) et [AC) et P, P' les points de contacts de C_2 et C_2 avec l'une de leur tangente commune extérieure, laquelle coupe (O_1O_2) en I.

Tout d'abord si M = P alors M' = P' : en effet, en se plaçant dans des triangles isocèles,

$\widehat{\mathrm{PAO_1}} = \frac{1}{2}\left(\pi - \widehat{\mathrm{PO_1A}}\right)$ et $\widehat{\mathrm{P'AO_2}} = \frac{1}{2}\left(\pi - \widehat{\mathrm{P'O_2A}}\right)$ et donc $\widehat{\mathrm{PAO_1}} + \widehat{\mathrm{P'AO_2}} = \pi - \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathrm{PO_1A}} + \widehat{\mathrm{P'O_2A}}\right)$.

Or $(PO_1)//(P'O_2)$ donc $\widehat{\mathrm{PO_1A}} + \widehat{\mathrm{P'O_2A}} = \pi$.

On en tire $\widehat{\mathrm{PAP'}} = \frac{\pi}{2}$.



Comme la droite (PP') (qui est une droite (MM') particulière) passe par le point I, intersection de (PP') et de (O_1O_2), on peut se demander si toutes les droites (MM') ne vont pas passer aussi par I.

L'outil mathématique assez naturel à introduire est alors l'homothétie (définition et image d'une droite, d'un cercle). On considère alors l'homothétie h de centre I et transformant O_1 en O_2. On montre alors que $h(C_1) = C_2$ et $h(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$.

Soit alors A' le point diamétralement opposé à A sur C_1. On montre que $h(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$. Alors, comme [AA'] est un diamètre de C_2, (A'M') est perpendiculaire à (AM') et comme (MA) est perpendiculaire à (AM’) on en déduit (A’M’) et (AM) sont parallèles ce qui permet d’établir que $h(\mathrm{M})=\mathrm{M}'$. On en déduit que I, M et M' sont alignés, c’est-à-dire (MM') passe par I.

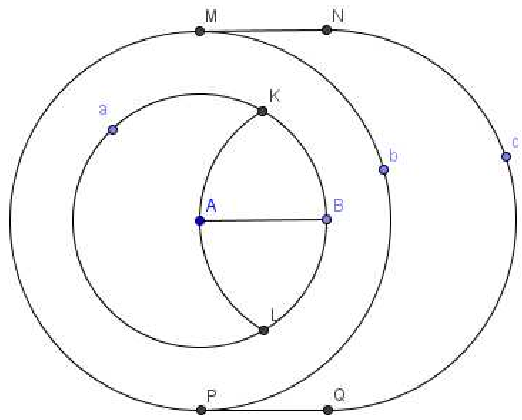
b. On montre que (BM)//(AM') et donc que BMM'A est un trapèze. Or O_1 et J sont les milieux des côtés non parallèles, donc (en utilisant par exemple la réciproque de Thalés) (O_1J)//(AM'). De même puisque (AM)//(A'M') donc AMM'A' est un trapèze avec O_2 et J milieux des 2 côtés non parallèles donc (O_2J)//(AM).
Soit g l'homothétie de centre I telle que $g(\mathrm{B})=\mathrm{O}_1$. Comme ($O_1$J)//(AM')//(BM), on a $g(\mathrm{M})=\mathrm{J}$ et, comme car (O_2J)//(AM), on a $g(\mathrm{A})=\mathrm{O}_2$.
Quand M décrit C_1-{A;B}, le lieu de J est $g(C_1$-{A;B}) soit $g(C_1)-\{g(\mathrm{A}); g(\mathrm{B})\}$ c’est-à-dire $g(C_1)-\{\mathrm{O}_1;\mathrm{O}_2\}$.
Or $g(C_1)$, image du cercle de diamètre [AB] est le cercle de diamètre $[g(\mathrm{A}); g(\mathrm{B})] = [\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2]$ et donc le lieu de J est effectivement le cercle C_3 de diamètre $[\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2]$ privé de O_1 et O_2.

c. L’aire du triangle MAM’ vaut $\dfrac{\mathrm{AM}\times\mathrm{AM}'}{2}$. mais $h(\mathrm{B})=\mathrm{A}$, $h(\mathrm{M})=\mathrm{M}'$ et $h(C_1)=C_2$ donc $\mathrm{AM}'=\dfrac{R_2}{R_1}\times\mathrm{BM}$ et l’aire du triangle MAM’ sera maximale si et seulement si $\mathrm{AM}\times\mathrm{BM}$ ou encore $\mathrm{AM}^2\times\mathrm{BM}^2$ est maximale (car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$) .

Comme $\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2=4R_1^2$, il s'agit de maximiser le produit de 2 nombres positifs dont la somme est constante : le maximum a lieu lorsque les 2 nombres sont égaux (on peut le retrouver en faisant un petit tableau de variation de la fonction $x\mapsto x\left(4R_1^2-x\right)$)

Donc le maximum de l'aire est obtenu lorsque $\mathrm{AM}^2=\mathrm{BM}^2=2R_1^2$, c'est-à-dire lorsque $\mathrm{AM}=R_1\sqrt{2}$ ce qui donne deux positions du point M : les 2 points d'intersection de C_1 et de la perpendiculaire à $(\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2)$ en O_1.

4. a. Si le point O est en A, d’après l'inégalité triangulaire on a $\mathrm{AJ}\leqslant\mathrm{AI}+\mathrm{IJ}$ donc $\mathrm{AJ}\leqslant 6$ et $\mathrm{AI}\leqslant\mathrm{AJ}+\mathrm{JI}$ donc $\mathrm{AJ}\geqslant\mathrm{AI}-\mathrm{IJ}$ d’où $\mathrm{AJ}\geqslant 4$.
J est dans la couronne circulaire délimitée par les cercles de centre A de rayon 4 et 6.
Réciproquement, tout point L situé dans cette couronne est effectivement une position possible d'un point J, celui correspondant à un point I tel que AI = 5 et LI = 1, c'est-à-dire à un point I situé à l'intersection des cercles de centre A, de rayon 5 et de centre L, de rayon 1. Donc l'ensemble D est la totalité de la couronne circulaire ci-dessus.



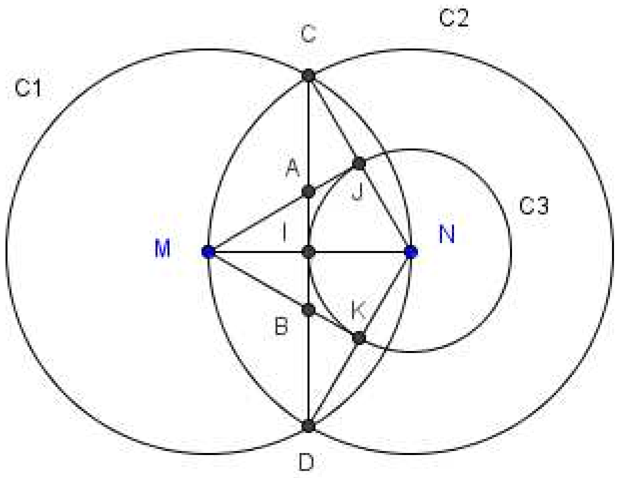
b. Lorsque O décrit le segment [AB], l'ensemble D se « translate » et l'ensemble E est constitué de la couronne déjà citée, de la portion de disque AKaL « en forme de croissant » et de la portion de plan délimitée par la courbe PQcNMb.
L’aire de cet ensemble E est donc celle d'un disque de rayon 6 + celle d'un rectangle de côtés 4 et 12 – celle de la zone délimitée par la courbe AKBL, soit :

$$A(\mathrm{E})=36\pi+48-2\left(2\times\frac{\pi\times4^2}{6}-A_{\mathrm{ABK}}\right)\quad\text{soit}\quad A(\mathrm{E})=36\pi+48-2\left(2\times\frac{\pi\times4^2}{6}-4\times\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)$$

C'est-à-dire $A(\mathrm{E})=\dfrac{76}{3}\pi+48+8\sqrt{3}$.

5. a. La fonction *f* définie par *f*(M) = 1/3 pour tout point M du plan vérifie évidemment la propriété P.

b. On trace deux cercles C_1 et C_2 de centres respectifs M et N et ayant le même rayon MN : ils se coupent en deux points Cet D et la droite (CD) est la médiatrice de [MN] et aussi les triangles CMN et DMN sont équilatéraux et isométriques.



Soit I le milieu de [MN], c'est-à-dire l'intersection des deux droites (MN) et (CD).
Le cercle C_3 de centre N et de rayon NI coupe les segments [NC] et [ND] en leurs milieux respectifs J et K.
Les droites (MJ) et (MK) sont donc les bissectrices des angles en M des triangles CMN et DMN et ainsi $\widehat{\mathrm{JMK}}=60°$ et $\mathrm{MJ}=\mathrm{MK}$.
On considère alors les points A et B comme les intersections respectives du segment [CD] avec les segments [MJ] et [MK].
$\mathrm{MA}=\dfrac{2}{3}\mathrm{MJ}$ et $\mathrm{MB}=\dfrac{2}{3}\mathrm{MK}$.

Le triangle MAB est donc isocèle et l'angle en M mesure 60° : il est donc équilatéral.
Comme NA = MA et NB = MB il en est de même pour le triangle NAB.

Si *f* vérifie la propriété (P), en considérant les 2 triangles équilatéraux mis en évidence dans la question précédente on peut écrire $f(\mathrm{M})+f(\mathrm{A})+f(\mathrm{B})=1$ et $f(\mathrm{N})+f(\mathrm{A})+f(\mathrm{B})=1$ et donc $f(\mathrm{M})=f(\mathrm{N})$.

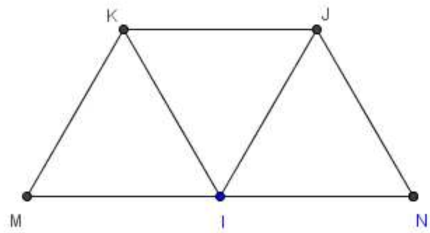
c. D'après la question b, si *f* vérifie la propriété (P) dès que M et N sont distincts on $f(\mathrm{M})=f(\mathrm{N})$, donc en prenant un point O particulier du plan, pour tout point M, on a $f(\mathrm{M})=f(\mathrm{O})$.

La fonction *f* est donc une fonction constante prenant la valeur $k=f(\mathrm{O})$ telle que $3k=1$.

Réciproquement il a été vu à la question a. que la fonction *f* constamment égale à 1/3 vérifie la propriété (P) : c'est donc la seule.

d. On utilise l'idée précédente : soit M et N deux points distincts : il est alors possible de construire deux losanges MIJK et NIKJ (la figure correspond à la moitié d'un hexagone régulier) :

Donc



$f(\mathrm{M})+f(\mathrm{I})+f(\mathrm{J})+f(\mathrm{K})=f(\mathrm{N})+f(\mathrm{I})+f(\mathrm{J})+f(\mathrm{K})=1$

et donc $f(\mathrm{M})=f(\mathrm{N})$.

La fonction f est donc une fonction constante sur le plan et constante ne peut être que 1/4.

Réciproquement la fonction *f* constamment égale à 1/4 vérifie évidemment la propriété (P) : c'est donc la seule.

Thème 3 : équations fonctionnelles et sommes

N.B. Quand on parle de fonctions, il y a des quantificateurs partout. Ils sont parfois omis dans ces éléments de solution, mais c'est une négligence coupable.

1. Pour commencer, f est <u>injective</u> (définition à donner) : si $f(n)=f(p)$, alors $f(f(n))=f(f(p))$, c'est-à-dire $n=p$. Et f est sans point fixe : si $f(n)=n$, alors $n+1=f\circ f(n)=n$. Enfin, pour tout entier *n*, on peut écrire $f(n+1)=f(f\circ f(n))=f\circ f(f(n))=f(n)+1$ (qui entraîne la croissance de *f*).

   On ne peut avoir $f(0)=0$, car f est sans point fixe. On ne peut avoir $f(0)=1$, car alors $f(1)=f(f(0))=1$, or f est sans point fixe. Enfin, $f(0)=k>1$ conduit à $f(k)=1$ et simultanément $f(k)=f(k-1)+1$, ce qui donne $f(k-1)=0$ et comme f est strictement croissante, on aboutit à une contradiction. Il n'existe pas de fonction satisfaisant la condition proposée.
2. Donnons-nous un réel y quelconque et son image $x=f(y)$. La propriété de f donne : $f(0)=1-f(y)-y$. Appliquant cette dernière relation à $y=0$, on obtient $f(0)=\frac{1}{2}$.

   Finalement, il reste à vérifier que la fonction *f* définie par $f(x)=\frac{1}{2}-x$ convient bien.
3. Il se passe quelque chose autour de 1 000. Calculons quelques images :
   $f(1002)=999$, $f(1001)=998$, $f(1000)=997$,
   $f(999)=f(f(1004))=f(1001)=998$, $f(998)=f(f(1003))=f(1000))=997$,
   $f(997)=f(f(1002))=f(999)=998$, $f(996)=f(f(1001))=f(998)=997$.
   Il n'y a plus qu'à établir que 998 et 997 sont en alternance les images des entiers inférieurs à 1 000.

4. On montre que les solutions sont des <u>bijections</u> (définition à donner) de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. En effet, si $f(a)=f(b)$, alors $af(1)=f(1f(a))=f(1f(b))=bf(1)$ et comme $f(1)>0$, $a=b$. Donc *f* est injective. Pour montrer qu'elle est <u>surjective</u>, on se donne un réel positif *y* et on lui cherche un antécédent. L'égalité $f\left(1f\left(\frac{y}{f(1)}\right)\right)=\frac{y}{f(1)}f(1)$ en fournit un. On note que l'antécédent de 1 est 1 (car $f(x)=1$ donne $f(1f(x))=xf(1)$, ou encore $f(1)=xf(1)$, d'où le résultat.

   On remarque que, pour tout $x>0$, $f(xf(x))=xf(x)$, égalité qui montre que tous les $xf(x)$ sont des points fixes de *f*. Si *x* est un point fixe de *f*, de $f(x)=x$ on tire $f(x^2)=f((xf(x))=xf(x)=x^2$ et on déduit que toutes les puissances naturelles de *x* sont des points fixes. La condition de limite est contradictoire avec $x>1$. Si $x<1$ est un point fixe de *f*, on montre que $\frac{1}{x}$ est également un point fixe, supérieur à 1, ce qui n'est pas possible. Le seul invariant est donc 1. Donc, pour tout *x*, le nombre $xf(x)$, qui est invariant, est égal à 1. Donc une seule fonction convient : l'inversion.

5. En prenant $x = f(y)$, on obtient $f(0) = f(x) + x^2 - 1$, ce qui permet de calculer l'image de tout réel *x* qui est lui-même une image. Ce n'est pas fini, on veut décrire l'image de tout réel…
On applique la propriété à $y = f(0) = \alpha$: $f(x-\alpha) = f(\alpha) + x\alpha + f(x) - 1$, ou encore $f(x-\alpha) - f(x) = x\alpha + f(\alpha) - 1$. Cette dernière écriture prouve que $f(x-\alpha) - f(\alpha)$ prend toutes les valeurs réelles, ou encore que pour tout réel *z* il existe un *x* tel que $z = f(x-\alpha) - f(\alpha)$.
Pour tout réel *z*, on peut à présent écrire :
$$f(z) = f\left(f(x-\alpha) - f(x)\right) = f\left(f(x)\right) + f(x-\alpha)\,f(x) + f\left(f(x-\alpha)\right) - 1$$
$$f(z) = \frac{\alpha + 1 - \left(f(x)\right)^2}{2} + f(x-\alpha)\,f(x) + \frac{\alpha + 1 - \left(f(x-\alpha)\right)^2}{2} - 1$$
$$f(z) = \alpha - \frac{\left(f(x-\alpha) - f(x)\right)^2}{2} = \alpha - \frac{z^2}{2}$$
On peut à présent utiliser le premier résultat pour calculer $f(0)$, puisque nous savons que 0 est une image. On trouve $f(0) = 1$ et la fonction solution est : $x \mapsto 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

6. On commence par trouver que $4\left(f(0)\right)^2 = 2f(0)$, qui donne $f(0) = 0$ ou $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Cette dernière hypothèse conduit à $f(x) = \dfrac{1}{2}$ pour tout *x*.
Nous cherchons donc les solutions telles que $f(0) = 0$.
Pour *z* et *t* nuls, on obtient $f(x)\,f(y) = f(xy)$, et pour $x = z$, $\left(f(x)\right)^2 = f(x^2)$, qui prouve que tout réel positif a une image positive par *f*. La propriété de *f* conduit aussi à $\left(f(x) + f(z)\right)\left(f(y) + f(t)\right) = \left(f(x) + f(z)\right)\left(f(y) + f(-t)\right)$
et donc à $\left(f(x) + f(z)\right)\left(f(t) - f(-t)\right) = 0$. On trouve donc que les solutions non identiquement nulles sont paires.
Si une fonction non identiquement nulle vérifie $f(x)\,f(y) = f(xy)$, on a $f(x)\,f(1) = f(x)$ et donc $f(1) = 1$
On essaie de trouver les images des entiers. On trouve : $(1+1)(1+1) = f(1+1) + f(1-1)$, d'où $f(2) = 4$. On établit <u>par récurrence</u> que pour tout entier *n*, $f(n) = n^2$.
Ce résultat s'étend facilement aux nombres rationnels, en utilisant $f\left(\dfrac{p}{q}\right) f(q) = f(p)$.
Il reste à étendre ces résultats à l'ensemble des nombres réels (positifs, ici, mais *f* est paire) en approchant les réels par des suites de rationnels, ce qui pourra se faire si on montre que *f* est monotone (croissante) sur $\mathbf{R}^+$.
Pour cela, on cherche à écrire des égalités de la forme $f(a) - f(b) = \ldots$
$\left(f(x) + f(z)\right)^2 = f(x^2 - z^2) + f(2xz)$ et $\left(f(x) + f(z)\right)^2 = f(x^2 + z^2)$, obtenues en faisant $x = y, z = t$, puis $x = y, z = -t$, fournissent $f(x^2 + z^2) - f(x^2 - z^2) = f(2xz)$. Nous sommes sur la bonne voie…

S 1. $S=\sum_{k=1}^{2010} k=\dfrac{2010\times 2011}{2}=2\ 021\ 055$.

$S'=\left(1^2-2^2\right)+\left(3^2-4^2\right)+\ldots+\left(2009^2-2010^2\right)$ donc $S'=\sum_{j=1}^{1005}\left[(2j-1)^2-(2j)^2\right]$.

Or , pour tout entier j : $(2j-1)^2-(2j)^2=1-4j=-(2j-1)-(2j)$. Donc :

$S'=-\left[\sum_{j=1}^{1005}(2j-1)+\sum_{j=1}^{1005}2j\right]$.

Or $\sum_{j=1}^{1005}(2j-1)$ est la somme des entiers impairs de 1 à 2009 et $\sum_{j=1}^{1005}2j$ est la somme des entiers pairs de 2 à 2010.

Donc $\sum_{j=1}^{1005}(2j-1)+\sum_{j=1}^{1005}2j=S$ et $S'=-2\ 021\ 055$.

S 2. La somme des 50 numéros est égale à $\dfrac{50\times 51}{2}$=1 275.

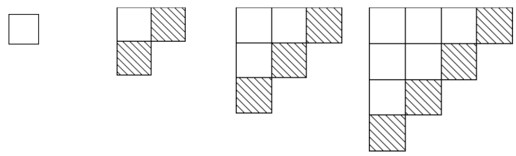
Si la somme des jetons de chaque paquet fait 75, il y a donc 17 paquets (17 × 75 = 1 275)
Une solution : 13 paquets de 2 jetons : {25,50}, {26,49},{27,48},…,{36,39},{37,38} et 4 paquets de 6 jetons : {1, 2,3, 22, 23, 24}, {4, 5, 6, 19, 20,21}, {7, 8, 9, 16, 17, 18}, {10, 11, 12, 13, 14, 15}.

S 3

On a représenté ci-contre, en vue de dessus, les cubes de la couche inférieure dans les constructions successives.
Soit a_n le nombre de cubes de la couche inférieure dans la construction à n étages. $a_1 = 1$; $a_2 = 1 + 2 = 3$; $a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$.
On peut remarquer que pour ajouter 1 étage à partir de la construction à 3 étages, il faut d'abord placer autant de cubes que dans la couche inférieure de cette dernière c'est à dire a_3 et rajouter 4 cubes en diagonale. On a donc $a_4 = a_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4$ et ainsi de suite….

$a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

n°1 n°2 n°3 n°4



1 cube 3 cubes 6 cubes 10 tubes

a) Le nombre de cubes de la construction à n étages est $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}a_k$ donc

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}k$$

Or $\sum_{k=1}^{k=n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{k=n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ donc $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\dfrac{n(n+1)}{4}$

$S_n=\dfrac{n(n+1)}{4}\left(\dfrac{2n+1}{3}+1\right)$ d'où : $S_n=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

b) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 100\,n \Leftrightarrow \dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6} = 100\,n$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 100\,n \Leftrightarrow n(n+1)(n+2) = 600n$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 100\, n \Leftrightarrow n[n^2 + 3n - 598] = 0$.

Comme n est un entier naturel non nul, les solutions du problème sont les entiers positifs de l'équation :

$n^2 + 3n - 597 = 0$.

Cette équation a deux solutions qui sont : $\dfrac{-3-49}{2} = 26$ et $\dfrac{-3+49}{2} = 23$

Vérification

Dans une construction à 23 étages, le nombre de cubes est $S_{23} = \dfrac{23 \times 24 \times 25}{6} = 2\,300$

et $2\,300 = 100 \times 23$.

La construction a donc 23 étages.

S 4. Le mois d'avril a 30 jours.

La somme versée au gagnant serait : $30 \times 300\,000$ soit 9 millions d'euros.

Mais le gagnant devrait verser à son tour une somme en euros égale à

$\dfrac{1}{100} + \dfrac{2}{100} + \dfrac{4}{100} + \ldots + \dfrac{2^{30}}{100} = \dfrac{1}{100}\left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{30}\right)$. Or $\dfrac{2^{29}-1}{100}$

$2^{31} = 2 \times \left(2^{10}\right)^3$ et $2^{10} = 1\,024$ donc $2^{10} > 10^3$ et $2^{31} > 2 \times 10^9$. D'où $\dfrac{2^{31}-1}{100} \geq 2 \times 10^7$.

La somme à reverser serait donc supérieure à 20 millions d'euros…

En revanche, le mois de février 2011 a 28 jours.

La somme versée au gagnant serait : $28 \times 300\,000$ soit 8,4 millions d'euros et ce dernier devrait reverser une somme en euros égale à $\dfrac{2^{29}-1}{100}$ soit un peu moins de 5,4 millions d'euros …

S5. Posons $S_n = 1 + \dfrac{4}{3} + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$.

$S_n = \dfrac{\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1} - 1}{\dfrac{4}{3} - 1} = 3\left[\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$. Comme $\dfrac{4}{3} > 1, \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

La somme $1 + \dfrac{4}{3} + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{4}{3}\right)^n + \ldots$ ne désigne donc pas un nombre (réel) alors que les égalités $\dfrac{4}{3}S = \dfrac{4}{3} + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1} + \ldots$ puis $\dfrac{4}{3}S = S - 1$ s'appliquent à des nombres. D'où le résultat absurde.

S5. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

1. Soit $2n + 1$ entiers naturels consécutifs $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$. Si m est le plus petit d'entre eux, ces $2n + 1$ entiers sont : $m, m + 1, m + 2, \ldots, m + n, m + n + 1, \ldots, m + 2n$.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{k=n}(m+k) = \sum_{k=0}^{k=n} m + \sum_{k=0}^{k=n} k = (n+1)m + \frac{n(n+1)}{2} \text{ soit } \sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{(n+1)(2m+n)}{2}$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k = \sum_{k=0}^{k=n}(m+n+k) = \sum_{k=1}^{k=n}(m+n) + \sum_{k=1}^{k=n} k = n(m+n) + \frac{n(n+1)}{2} \text{ soit } \sum_{k=n+1}^{2n} a_k = \frac{n(2m+3n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \Leftrightarrow (n+1)(2m+n) = n(2m+3n+1)$$

$(n+1)(2m+n) = n(2m+3n+1) \Leftrightarrow 2mn + n^2 + 2m + n = 2mn + 3n^2 + n$.

Donc $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \Leftrightarrow m = n^2$.

En conclusion : Il existe $2n + 1$ entiers naturels consécutifs a_0, a_1, …, a_{2n} tels que : $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$ si, et seulement si, a_0 est un carré parfait. Le nombre d'entiers consécutifs est alors $2\sqrt{a_0} + 1$.

2. Avec les notations de la question 1 :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^2 = \sum_{k=0}^{k=n} (m+k)^2 = \sum_{k=0}^{k=n} m^2 + \sum_{k=0}^{k=n} (2mk) + \sum_{k=0}^{k=n} k^2$$

et $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{k=n} (m+n+k)^2 = \sum_{k=1}^{k=n} (m+n)^2 + \sum_{k=1}^{k=n} 2(m+n)k + \sum_{k=1}^{k=n} k^2$

Or : $\sum_{k=0}^{k=n} m^2 = (n+1)m^2$, $\sum_{k=0}^{k=n} 2mk = 2m\sum_{k=0}^{k=n} k = mn(n+1)$ et $\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^2 = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k^2 \Leftrightarrow (m+n)(m-2n^2-n) = 0 \Leftrightarrow m = 2n^2 + n$$

S6. $S = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + ... + \dfrac{1}{998\times 999} + \dfrac{1}{999\times 1000}$

$S = \sum_{k=1}^{k=999} \dfrac{1}{k(k+1)}$. Or , pour tout entier k : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Donc : $S = \sum_{k=1}^{k=999} \dfrac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=999} \dfrac{1}{k+1}$.

Remplaçons $k + 1$ par k dans la dernière somme : $\sum_{k=1}^{k=999} \dfrac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{k=1000} \dfrac{1}{k}$.

Donc : $\boxed{S = 1 - \dfrac{1}{1000}}$

Thème 4 : probabilités, nombres, combinatoire

1. Pour la n-ième journée du mois, le nombre de minutes correspond à $\dfrac{2010}{(n+1)(n+2)}$.

   On doit donc calculer la somme $\dfrac{2010}{2\times3}+\dfrac{2010}{3\times4}+\dfrac{2010}{4\times5}+....+\dfrac{2010}{29\times30}$.
   (il y a 28 jours en février 2010... ce n'est pas une année bissextile !)
   En mettant 2010 en facteur on obtient $2010\left(\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\dfrac{1}{4\times5}+....+\dfrac{1}{29\times30}\right)$.

   Or, pour tout entier n non nul, $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{(n+2)-(n+1)}{(n+2)(n+1)}=\dfrac{1}{(n+2)(n+1)}$

   La somme vaut donc $2010\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{30}\right)$, ce qui donne 938 minutes.

2. Notons, pour $n\geqslant 0$:
   q_n le nombre de chemins de P à Q ayant n flèches,
   a_n le nombre de chemins de P à A ayant n flèches,
   b_n le nombre de chemins de P à B ayant n flèches,
   p_n le nombre de chemins de P à P ayant n flèches,.
   On a : $q_n=a_{n-1}+p_{n-1}$ (1), $a_n=p_{n-1}$ (2), $b_n=q_{n-1}$ (3) et $p_n=b_{n-1}+q_{n-1}$ (4)
   Grâce à (1) et (2) on trouve : $q_n=p_{n-2}+p_{n-1}$ (5)
   Grâce à (3) et (4) on trouve : $p_n=q_{n-1}+q_{n-2}$ (6)
   Grâce à (5) et (6) on trouve : $q_n=q_{n-2}+2q_{n-3}+q_{n-4}$, pour tout $n\geqslant4$ (7)
   Or $q_0=0$, $q_1=1$, $q_2=1$, $q_3=1$. En utilisant la relation (7), de proche en proche, on trouve $q_{12}=116$.

3. Si d divise $35n+7$ et $21n+4$, alors n divise $(35n+7)-(21n+4)$ c'est-à-dire $14n+3$.
   Si d divise $21n+4$ et $14n+3$, alors n divise $(21n+4)-(14n+3)$ c'est-à-dire $7n+2$.
   Si d divise $14n+3$ et $7n+2$, alors n divise $(14n+3)-(7n+2)$ c'est-à-dire $7n+1$.
   Si d divise $7n+2$ et $7n+1$, alors n divise $(7n+2)-(7n+1)$ c'est-à-dire 1.
   Le seul diviseur commun à $35n+7$ et $21n+4$ est donc 1 et la fraction $\dfrac{35n+7}{21n+4}$ est irréductible.

4. a. En posant $s=28a+30b+31c$ où a, b, c sont respectivement les nombres de mois de 28,29 ou 30 jours : on a immédiatement $28(a+b+c)\leqslant s\leqslant 31(a+b+c)$.
   D'où
   si $a+b+c\leqslant11$ alors $s\leqslant341<365$ et s ne peut être égal à 365
   si $a+b+c\geqslant14$ alors $s\geqslant392>365$ et s ne peut être égal à 365
   si $a+b+c=13$, la plus petite valeur de s est 28 × 13 = 364 (obtenue pour a = 13, b = c = 0) : pour obtenir s = 365, il faut augmenter cette plus petite valeur, donc diminuer a de au moins 1 et augmenter b + c de au moins 1 et s va augmenter de au moins 2 (dans le cas où un mois de 28 devient un mois de 30) et dépassera ainsi 365, et donc s ne peut être égal à 365.

   La seule possibilité pour avoir $s=365$ est donc $a+b+c=12$, qui effectivement peut donner $s=365$ avec par exemple a = 0, b = 7, c = 5.

b. Cherchons tous les triplets (*a, b, c*) tels que $a+b+c=12$ et $28a+30b+31c=365$ et *a, b, c* étant bien sûr des entiers naturels inférieurs ou égaux à 12.
On remarque que nécessairement $8a+c$ doit se terminer par 5 et donc si $a=0$, nécessairement $c=5$ et donc $b=7$, ce qui donne le triplet (0, 7, 5) qui convient effectivement comme on vient de le voir : c'est le seul triplet solution avec $a=0$.
Si (a,b,c) est un triplet solution $(a+u,b+v,c+w)$ en sera un autre si et seulement si $u+v+w=0$ et $28u+30v+31w=0$ (où $a+u$, $b+v$, $c+w$ sont des entiers naturels inférieurs ou égaux à 12), ce qui donne $v=-3u$ et $w=2u$.
Donc si ((a,b,c) est un triplet solution, le seul triplet solution commençant par $a+1$ est $(a+1,b-3,c+2)$, sous réserve qu'effectivement $a+1$, $b-3$, $c+2$ soient positifs ou nuls et inférieurs ou égaux à 12.
Comme (0,7,5) est le seul triplet solution tel que $a=0$, (1,4,7) est le seul triplet solution tel que $a=1$, (2,1,9) est le seul triplet solution tel que $a=2$ et c'est fini , puisque *b* ne peut être négatif.

Donc il n'y a que 3 sortes d'années "Mathématiciennes" : (0,7,5) ou (1,4,7) ou (2,1,9).

5. a. L'endroit à partir duquel la souris a le plus grand nombre de possibilités de déplacement (quatre) est le tiroir du milieu. Pour se donner les meilleures chances, Jacob doit donc, *lorsque possible*, choisir le tiroir du milieu. Ainsi, s'il se trompe, cela signifie que la souris n'était pas dans le tiroir du milieu, ce qui limite par la suite ses possibilités de mouvement.
b. En notant :
n_0 le nombre moyen d'essais requis dans la situation initiale
n_1 le nombre moyen d'essais requis si l'on vient de voir la souris dans un des tiroirs en coin
n_2 le nombre moyen d'essais requis si l'on vient de voir la souris dans un tiroir de côté
On a alors :
$$n_0=1+\frac{1}{9}\times 0+\frac{4}{9}\times n_1+\frac{4}{9}\times n_2=1+\frac{4}{9}n_1+\frac{4}{9}n_2$$
$$n_1=1+\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times n_2=1+\frac{1}{2}n_2$$
$$n_2=1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{2}{3}\times n_2=1+\frac{2}{3}n_2$$
Il ne reste qu'à résoudre $n_1=1+\frac{1}{2}n_2=1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{3}n_1\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}n_1$

On obtient donc : $n_1=\frac{9}{4}$, $n_2=\frac{5}{2}$, $n_0=\frac{28}{9}$. Le nombre moyen d'essais requis est donc $\frac{28}{9}$.

6. Soit $P(x)$ la probabilité que le programme génère un nombre plus petit que *x*. La probabilité que le programme génère un nombre plus supérieur ou égal à *x* est $1-P(x)$. Comme cette dernière probabilité est identique à celle que le nombre soit plus petit que $1-x$, on obtient donc que $P(x)+P(1-x)=1$.
De plus, on sait que $P(x)=3P\left(\frac{x}{4}\right)$. On peut alors établir les égalités suivantes :
$P\left(\frac{1}{21}\right)=1-P\left(\frac{20}{21}\right)$, $P\left(\frac{1}{21}\right)=1-3P\left(\frac{5}{21}\right)$, $P\left(\frac{1}{21}\right)=1-3\left(1-P\left(\frac{16}{21}\right)\right)$,
$P\left(\frac{1}{21}\right)=1-3\left(1-3P\left(\frac{4}{21}\right)\right)$, $P\left(\frac{1}{21}\right)=1-3\left(1-3\times 3P\left(\frac{1}{21}\right)\right)$, d'où $P\left(\frac{1}{21}\right)=\frac{1}{13}$

7. On dira qu'un polygone vérifie la propriété *P* si on peut relier les sommets de ce polygone par des traits tracés en continu ou en pointillés de telle sorte qu'aucun des triangles ayant ses 3 sommets parmi les sommets du polygone ne soit constitué de traits de même nature.
Vérifions l'énoncé : en mettant en trait continu les 4 côtés de ABCD et en pointillés ses 2 diagonales on voit toute suite que le quadrilatère ABCD vérifie la propriété *P* ; on peut aussi mettre 3 côtés en trait continu et le 4ième côté et les 2 diagonales en pointillés.
a. Si on prend au hasard 3 sommets d'un pentagone, il y en a toujours au moins 2 qui sont consécutifs ; d'où un triangle dont les 3 sommets sont trois de ceux du pentagone est, soit formé de deux côtés du pentagone et d'une diagonale du pentagone, soit formé d'un côté et de deux diagonales. Donc en mettant en continu tous les côtés du pentagone et en pointillés toutes ses diagonales aucun de ces (10) triangles n'est constitué de traits de même nature : tout pentagone vérifie la propriété *P*.
b. Soit ABCDEF un hexagone et considérons les 5 segments constitués des 2 côtés de sommet A et des 3 diagonales issues de A.
Comme il n'y a que 2 natures de traits possibles (continu ou pointillé) au moins 3 segments parmi ces 5 sont de même nature : notons les [AU], [AV], [AW] (évidemment U,V,W sont des sommets distincts et autres que A du pentagone) et supposons, par exemple, qu'ils soient en continu. Si on veut que l'hexagone vérifie la propriété *P* alors il faut que [UV] soit en pointillés (sinon les 3 côtés du triangle AUV sont en continu) ; de même [UW] et [VW] doivent être en pointillés : mais alors le triangle UVW a ses 3 côtés de même nature! Donc un hexagone ne peut vérifier la propriété *P*.

8. a. On envisage toutes les partitions possibles de {1; 2; 3; 4} en 2 groupes non vides :
soit un groupe est réduit à un nombre et l'autre en possède trois : on vérifie tout de suite que ce nombre ne peut être ni la somme, ni le produit des 3 nombres de l'autre groupe
soit les 2 groupes possèdent 2 nombres :
{1; 2} et {3; 4} : $1+2 \neq 3\times4$ et $1\times2 \neq 3+4$
{1; 3} et {2; 4} : ....
{1; 4} et {2; 3}: ....
Donc 4 n'est pas "académique", ainsi que ...... 3 et 2 d'ailleurs.

b. 5 est "académique" car $3 + 5 = 1\times2\times4$
6 est "académique" car $3 + 4 + 5 = 1\times2\times6$

c. Continuons à <u>observer</u> ce qui passe
7 est "académique" car $2 + 4 + 5 + 7 = 1\times3\times6$ (cf énoncé)
8 est "académique" car $2 + 4 + 5 + 6 +7 = 1\times3\times8$
9 est "académique" car $2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 9 = 1\times4\times8$
Il semble donc que si *n* est pair on peut prendre $P=\left\{1,\frac{n}{2}-1,n\right\}$ (ces 3 éléments sont bien distincts 2 à 2 car pour $n\geqslant 5$ on n'aura pas $1=\frac{n}{2}-1$, égalité qui se produit pour $n=4$) et évidemment *S* contient les autres nombres ;
Vérifions le !

- le produit des éléments de *P* est $(n-2)\frac{n}{2}$.
- la somme des éléments de *S* est $1+2+...+n-\left(1+\left(\frac{n}{2}-1\right)+n\right)=n\frac{(n+1)}{2}-\frac{n}{2}-n=\frac{n(n-2)}{2}$

donc si *n* est pair et $n\geqslant 5$, il est "académique".
Il semble que si *n* est impair (donc $n-1$ est pair) on peut prendre $P=\left\{1,\frac{n-1}{2},n-1\right\}$

(ces 3 éléments sont bien distincts car pour $n \geqslant 5$, on n'aura pas $1 = \frac{n-1}{2}$, égalité qui se produit pour $n = 3$)
Vérifions le :

- le produit des éléments de P est $\frac{(n-1)^2}{2}$
- la somme des éléments de S est

$$1+2+...+n-\left(1+\left(\frac{n}{2}-1\right)+n-1\right)=n\frac{(n+1)}{2}-\frac{3n-1}{2}=\frac{(n-1)^2}{2}\ .$$

donc si n est impair et $n \geqslant 5$, il est "académique".
Finalement tout entier supérieur ou égal à 5 est académique (et ce sont les seuls : voir question 1).

9. Chaque fois que les deux bestioles B_1 et B_2 sont (simultanément) lancées, il y a quatre résultats possibles. Le tableau qui suit indique les probabilités de ces quatre cas :

	B_2 tombe debout	B_2 tombe couchée	
B_1 tombe debout	1/12	3/12	1/3
B_1 tombe couchée	2/12	6/12	2/3
	1/4	3/4	

L'état courant du «combat» est caractérisé par le couple (i, j), où i et j désignent respectivement les nombres de fois que B_1 et B_2 sont tombés debout. En début de partie, on est dans l'état (0,0).
L'état (2,0) correspond à une victoire de B_1. L'état (0,2) correspond à une victoire de B_2. Les états (1,1), (2,1) et (1,2) correspondent à un match nul. Les autres états, (0,0), (0,1), (1,0) sont des états transitoires : le gagnant n'a pas encore été décidé.
Quand deux bestioles tombent couchées, il n'y a pas de progrès dans le déroulement du combat : on reste dans l'état (i, j) où on était auparavant. Il y aura progrès (vers l'un des états (i + 1, j), (i, j + 1) ou (i + 1, j + 1)) seulement si au moins une des deux bestioles tombe debout. Sous la condition qu'au moins une des deux bestioles tombe debout, il y a trois résultats possibles (plutôt que quatre) et les probabilités conditionnelles de ces cas sont celles du nouveau tableau suivant :

	B_2 tombe debout	B_2 tombe couchée
B_1 tombe debout	1/6	3/6
B_1 tombe couchée	2/6	

Chaque fois qu'il y aura progrès dans le déroulement du combat, l'état qui succédera à l'état (i, j) sera donc l'un ou l'autre des états (i + 1, j), (i, j + 1) ou (i + 1, j + 1) avec, respectivement, des probabilités égales à $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ et $\frac{1}{6}$.
Notons $p(i, j)$ le triplet dont les trois composantes désignent les probabilités, partant de l'état (i, j), que le combat se termine par une victoire de B_1, une victoire de B_2 ou un match nul respectivement.
On a $p(2,0) = (1, 0, 0)$, $p(0,2) = (0, 1, 0)$, $p(2, 1) = (0, 0, 1)$, $p(1, 2) = (0, 0, 1)$, $p(1, 1) = (0, 0, 1)$.
Et :

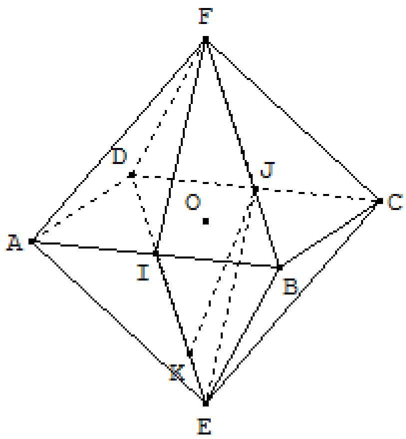
$$p(1,0)=\frac{3}{6}p(2,0)+\frac{2}{6}p(1,1)+\frac{1}{6}p(2,1)=\frac{3}{6}(0,0,1)+\frac{2}{6}(0,0,1)+\frac{1}{6}(0,0,1)=\left(\frac{3}{6},0,\frac{3}{6}\right)$$

$$p(0,1)=\frac{3}{6}p(1,1)+\frac{2}{6}p(0,2)+\frac{1}{6}p(1,2)=\frac{3}{6}(0,0,1)+\frac{2}{6}(0,1,0)+\frac{1}{6}(0,0,1)=\left(0,\frac{2}{6},\frac{4}{6}\right)$$

$$p(0,0)=\frac{3}{6}p(1,0)+\frac{2}{6}p(0,1)+\frac{1}{6}p(1,1)=\frac{3}{6}\left(\frac{3}{6},0,\frac{3}{6}\right)+\frac{2}{6}\left(0,\frac{2}{6},\frac{4}{6}\right)+\frac{1}{6}(0,0,1)=\left(\frac{9}{36},\frac{4}{36},\frac{23}{36}\right)$$

Donc $P(B_1\ \text{gagne})=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$, $P(B_2\ \text{gagne})=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$, $P(\text{match nul})=\frac{23}{36}$.

Thème 5 : Aires et espace



1. a) Parallélisme des faces ABE et CDF :
Démontrons que les quadrilatères AECF et DEBF sont des losanges :
AE = EC = CF = FA = 1 et les points A, E, C, F sont coplanaires. En effet :
Soit O le centre du carré ABCD. Le triangle AEC est isocèle en E et, comme O est le milieu de [AC], la médiane [EO] est aussi hauteur de ce triangle.
Donc : (EO) $\perp$ (AC). On établit de même que: (EO) $\perp$ (BD). La droite (EO) est orthogonale à deux droites sécantes de la face ABCD. Elle est donc orthogonale au plan (ABC). De même : la droite (FO) est orthogonale au plan (ABC).
Les points O, E et F sont donc alignés et, puisque la droite (EO), contenue dans le plan (AEC), passe par F, les points A, E, C, F sont coplanaires.
Le quadrilatère **AECF est donc un losange**. On démontre de même que **DEBF est un losange**.
On en déduit que les droites (EA) et (FC) d'une part, et les droites (EB) et (FD) d'autre part, sont parallèles.
Le plan (ABE), qui contient deux droites sécantes (EA) et (EB) respectivement parallèles à (FD) et (FC), **est donc parallèle au plan (CDF)**.

b) Distance entre les faces ABE et CDF :
Soit I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD] et K le projeté orthogonal de J sur [IE].

- Montrons que la distance entre les plans (ABE) et (CDF) est égale à JK :

(EF) et (IJ) sont orthogonales (car (EF) est orthogonale à la face ABCD) et O est le milieu de [EF] (car DEBF est un losange) et de [IJ]. Donc les points F, I, E, J sont coplanaires. Le quadrilatère FIEJ est donc un losange.
(AB) $\perp$ (EI) car (EI) est une hauteur du triangle ABE isocèle en E. De même : (AB) $\perp$ (FI), d'où (AB) $\perp$ (EIF). D'où (AB) $\perp$ (JK) (car (JK) est incluse dans (EIF)).

(AB) et (EI) sont deux droites sécantes de la face ABE qui sont toutes deux orthogonales à(JK). On en déduit que (JK) est orthogonale au plan (ABE). Et, comme les plans (ABE) et (CDF) sont parallèles, (JK) est orthogonale au plan (CDF). **La distance entre les plans (ABE) et (CDF° est donc égale à JK.**

- Calcul de JK :

$\text{Aire (FIEB)} = \frac{1}{2}\text{IJ}\times\text{EF}$.

IJ = AD = 1 et EF = 2 EO avec $\text{EO}=\sqrt{\text{EI}^2-\text{OI}^2}$.

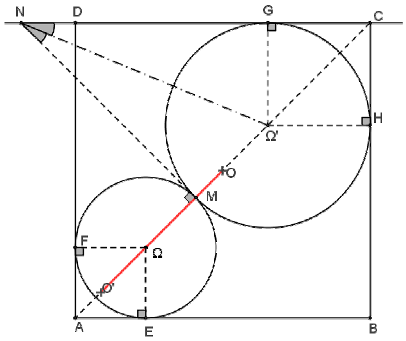
$\text{EI}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1) et $\text{OI}=\frac{1}{2}$.D'où :

$\text{EO}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $\text{Aire (FIEB)}=\sqrt{\frac{1}{2}}$. D'autre part : $\text{Aire (FIEB)}=\text{JK}\times\text{EI}=\text{JK}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où : $\text{JK}=\sqrt{\frac{1}{2}}\times\frac{2}{\sqrt{3}}$ soit $\boxed{\text{JK}=\sqrt{\frac{2}{3}}}$.

2. Soit r et r' les rayons respectifs des cercles Γ et Γ'.
Comme Γ est tangent aux côtés [AB] et [AD], son centre est sur la diagonale [AC]. Comme Γ' est tangent aux côtés [CD] et [CD], et tangent extérieurement à Γ, son centre est sur [ΩC].
$AC = A\Omega + \Omega M + M\Omega' + \Omega' C$ donc
$a\sqrt{2} = r\left(\sqrt{2}+1\right) + r'\left(\sqrt{2}+1\right)$.

D'où : $\boxed{r + r' = a\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \left(2-\sqrt{2}\right)a}$ **(1)**



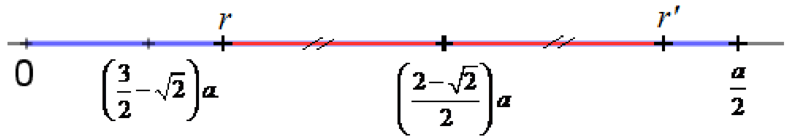
ABCD carré de côté a.
Ω centre de C, Ω' centre de C'.
M est le point d'intersection de C et [AC] non situé sur [ΩA].

Γ et Γ, centrés sur [AC], sont intérieurs au carré ABCD

si, et seulement si $0 < r < \dfrac{a}{2}$ et $0 < \underbrace{\left(2-\sqrt{2}\right)a - r}_{r'} < \dfrac{a}{2}$

si, et seulement si $r \in \left[\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)a, \dfrac{a}{2}\right]$

Comme $r + r' = \left(2-\sqrt{2}\right)a$, les points images de r et r' sur une droite graduée sont symétriques par rapport au point d'abscisse $\dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}a$, qui est le centre de l'intervalle I= $\left[\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)a, \dfrac{a}{2}\right]$



Calcul de la somme S de l'aire des deux disques :

$S = \pi r^2 + \pi r'^2$ d'où $S = \dfrac{\pi}{2}\left[\left(r+r'\right)^2 + \left(r-r'\right)^2\right] = \dfrac{\pi}{2}\left[\left(2-\sqrt{2}\right)^2 a^2 + \left(r-r'\right)^2\right]$.

S est **minimum** si, et seulement si $\left(r-r'\right)^2$ (qui est positif ou nul) est minimum

si, et seulement si $r = r' = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}a$.

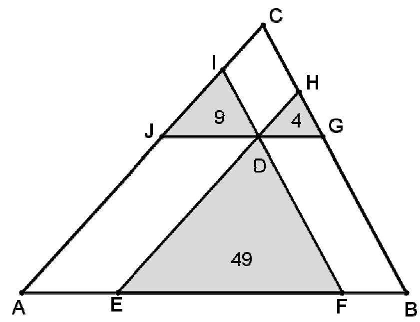
$$\boxed{\text{La valeur minimale de S est donc } \frac{\pi}{2}\left[\left(2-\sqrt{2}\right)^2 a^2\right] = \left(3-2\sqrt{2}\right)\pi a^2}.$$

S est **maximum** si, et seulement si $\left(r-r'\right)^2$ est maximum.
si, et seulement si la distance entre les réels r et r' est maximum.

Comme r et r' parcourent l'intervalle $\left[\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)a, \dfrac{a}{2}\right]$, la distance entre r et r' est maximum lorsque $r = \left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)a$, car on a alors $r' = \dfrac{a}{2}$ (On obtient le même résultat en échangeant r et r').

La valeur maximale de S est donc : $\boxed{\dfrac{\pi}{2}\left[\left(2-\sqrt{2}\right)^2 a^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)^2 a^2\right] = \dfrac{3\pi}{2}\left(3-2\sqrt{2}\right)a^2}$.

3. a) Le triangle DIJ est donc un agrandissement du triangle DHG, en effet :



$\frac{DJ}{DG}=\frac{JG-DG}{DG}=\frac{JG}{DG}-1$. Or $\frac{JG}{DG}=\frac{CG}{HG}=\frac{JC}{DH}$ (théorème de Thalès appliqué au triangle CGJ où (DH) //(JC)).

Par conséquent : $\frac{DJ}{DG}=\frac{CG}{HG}-1=\frac{JC}{DH}-1$ d'où

$\frac{DJ}{DG}=\frac{CG-HG}{HG}=\frac{JC-DH}{DH}$.

Or $CG-HG=CH$, CH = ID (DICH est un parallélogramme) et

$JC-DH=JC-IC=JI$. Donc : $\frac{DJ}{DG}=\frac{ID}{HG}=\frac{JI}{DH}$

Soit k le facteur d'agrandissement. Alors : aire(DIJ) = $k^2 \times$ aire (DHG) d'où $k^2=\frac{9}{4}$. Donc $k=\frac{3}{2}$ ($k > 0$).

On établit de même que :

- le triangle DEF est un agrandissement du triangle DGH (le facteur d'agrandissement est $k'=\frac{3}{2}$).
- le triangle ABC est un agrandissement du triangle DGH.
  Soit k'' le facteur d'agrandissement. On a donc AB = k'' DG.

<u>Calcul de k''</u>

Posons x = DG. Alors AE = JD = $\frac{3}{2}x$, EF = $\frac{7}{2}x$ et FB = x.

D'où : AB = AE + EF + FB = $\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{2}+1\right)x$ soit AB = $6x$. Donc $\boxed{k''=6}$.

<u>Calcul de l'aire du triangle ABC</u>

Le triangle ABC étant un agrandissement du triangle DGH (facteur d'agrandissement : 6), on en déduit que :
aire (ABC) = 6^2 aire (DGH). Donc $\boxed{\textbf{aire (ABC) = 144}}$.

b) Cas Général

On a : x = DG $k=\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}, k'=\sqrt{\frac{S_3}{S_1}}$, AE = JD = $k\,x$, EF = $k'x$ et FB = x.

D'où AB = $\underbrace{(k+k'+1)}_{k''}x$. Donc $k''=\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}+\sqrt{\frac{S_3}{S_1}}+1=\frac{\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}+\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}}$. Or S = $k''^2 S_1$. Par suite :

S = $\boxed{\left(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}+\sqrt{S_1}\right)^2}$

$S=S_1+S_2+S_3+2\left(\sqrt{S_1S_2}+\sqrt{S_1S_3}+\sqrt{S_2S_3}\right)$.

Or , pour tous réels positifs a et b : $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ (en effet : $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ qui est positif).

On a donc: $\sqrt{S_1S_2}+\sqrt{S_1S_3}+\sqrt{S_2S_3}\le\frac{S_1+S_2}{2}+\frac{S_1+S_3}{2}+\frac{S_2+S_3}{2}$

qui équivaut à $\sqrt{S_1S_2}+\sqrt{S_1S_3}+\sqrt{S_2S_3}\le S_1+S_2+S_3$

d'où : $\boxed{S\le 3\left(S_1+S_2+S_3\right)}$.

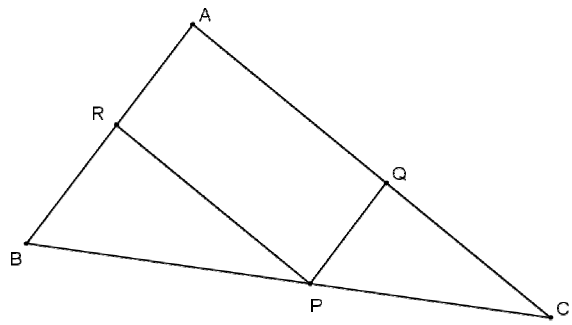
4. aire (ABC) = aire (ARPQ) + aire (BPR) + aire (PQC).

aire (ARPQ) = 2 aire (ARQ) (car la diagonale [RP] du parallélogramme ARPQ partage ce quadrilatère en deux triangles de même aire)

On a donc :

aire (ABC) = 2 aire (ARQ) + aire (BPR) + aire (PQC).

Posons **S = aire (BPR)**



a) Exprimons en fonction de S les aires de ARQ, PCQ et ABC :

- Puisque (PQ) // (AB) et (PR) // ((AC) ; on a les égalités de rapports suivantes (corollaire du théorème de Thalès appliqué aux triangle ABC et PCQ d'une part, ABC et BPR d'autre part) :

  $\frac{PC}{PB}=\frac{QC}{QA}$ et $\frac{PC}{PB}=\frac{RA}{RB}$.

  Posons $\frac{PC}{PB}=\lambda$. Alors : $QC=\lambda QA$ et $RA=\lambda RB$.

  Soit h la distance entre les droites (PQ) et (AB). Alors :

  Aire (ARQ)=$\frac{1}{2}h\times AR$ et aire (BPR)= $\frac{1}{2}h\times BR$ Donc $\boxed{\text{aire (ARQ)} = \lambda\ S}$.

- Les triangles BPR et PCQ ayant des côtés proportionnels (leurs côtés sont deux à deux parallèles. L'un est donc un agrandissement de l'autre) et comme $PC=\lambda PB$, on en déduit que : $\boxed{\text{aire (PCQ)} = \lambda^2\ S}$.

  D'où : aire (ABC) = $\underbrace{2\lambda\ S}_{\text{2 aire(ARQ)}} + \underbrace{S}_{\text{aire (BPR)}} + \underbrace{\lambda^2 S}_{\text{aire (PQC)}}$ soit : $\boxed{\text{aire (ABC)} = (\lambda+1)^2\ S}$

b) Relation entre k et λ :

- D'une part : aire (BQC) = k^2S
- d'autre part : aire (BQC) = aire (BPQ) + aire (PCQ)

  Or aire (BPQ) = aire (PRQ) (car (PQ) // (AB)) et aire (PRQ) = aire (ARQ).

  D'où : $\underbrace{k^2S}_{\text{aire (BCQ)}} = \underbrace{\lambda S}_{\text{aire (ARQ)}} + \underbrace{\lambda^2 S}_{\text{aire (PCQ)}}$.

  k et λ vérifient donc la relation : $\boxed{k^2=\lambda^2+\lambda}$

  On en déduit que $\lambda=\frac{-1+\sqrt{1+4k^2}}{2}$ (unique solution positive de l'équation $x^2+x-k^2=0$).

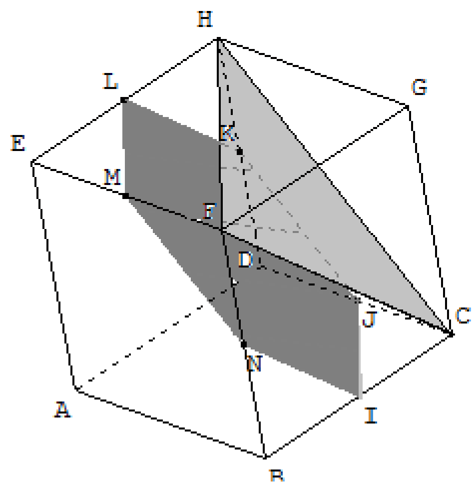
  D'où $(\lambda+1)^2=\left(\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}\right)^2=\frac{1+2k^2+\sqrt{1+4k^2}}{2}$ et $\boxed{\text{aire (ABC)} = \frac{1+2k^2+\sqrt{1+4k^2}}{2}S}$

5. Les points I, J, K, L, M, N sont les milieux de 6 arêtes du cube.

Montrons tout d'abord que ces points sont coplanaires.

$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ car [IJ] joint les milieux des côtés [BC] et [CD] du triangle BCD.

De même : $\overrightarrow{ML}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FH}$ car M et L sont les milieux respectifs de [FE] et [EH]. Or $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{FH}$ (en effet : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FG}$ puisque BCGF est un carré et $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{GH}$ puisque FGH est un carré.



Donc : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FH}$).

Donc : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FH}$

On en déduit que (ML) //(IJ) // (FH) et $IJ = ML = \frac{1}{2}FH$

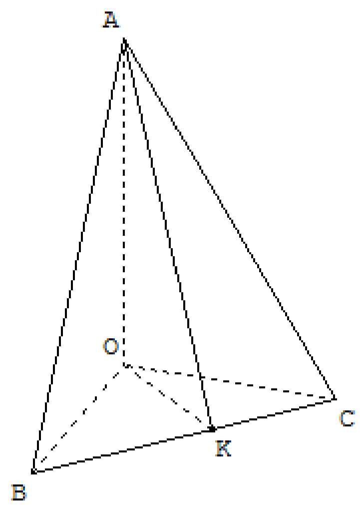
On établit de façon analogue que :

(JK) // (NM) // (CH) avec $JK = NM = \frac{1}{2}CH$ et (KL) // (IN) // (CF) avec $KL = IN = \frac{1}{2}CF$

Les plans JIN, INM, NML, MLK et LKJ contiennent chacun deux droites sécantes, respectivement parallèles à deux droites sécantes du plan DCH. Ils sont donc parallèles au plan DCH.
On en déduit successivement que les plans JIN et INM, puis INM et NML, NML et MLK et enfin MLK et LKJ sont confondus. **Les points I, J, K, L, M, N sont donc coplanaires**.
Comme BD = FH = CF (diagonales de deux faces du cube), on en déduit que : IJ = JK = KL = LM = MN = NI.

IJKLMN est donc un hexagone régulier.

6. La droite (OA) est orthogonale à (OB) et (OC). Elle est donc orthogonale à toute droite contenue dans le plan (OBC). En particulier : (OA) ⊥ (BC).



Soit K le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

$\text{aire (ABC)} = \frac{1}{2}AK \times BC$.

(BC) ⊥ (AK) et (BC) ⊥(OA). La droite (BC) est donc orthogonale à toute droite contenue dans le plan OAK. D'où : (BC) ⊥ (OK).

Donc : $\text{aire (OBC)} = \frac{1}{2}OK \times BC$.

Soit Σ la somme des carrés des aires des trois faces OAB, OAC et OBC.

$$\Sigma = \frac{1}{4}\left(OA^2 \times OB^2 + OA^2 \times OC^2 + OK^2 \times BC^2\right)$$

$$\Sigma = \frac{1}{4}\left(OA^2 \times \left(OB^2 + OC^2\right) + OK^2 \times BC^2\right)$$

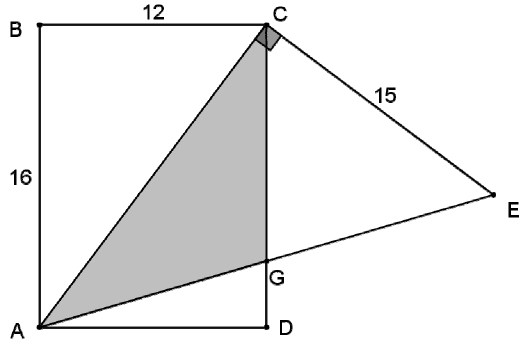
Or $OB^2 + OC^2 = BC^2$ d'où : $\Sigma = \frac{1}{4}\left(OA^2 \times BC^2 + OK^2 \times BC^2\right)$.

Donc : $\Sigma = \frac{1}{4}\left(OA^2 + OK^2\right) \times BC^2$

Le triangle OAK étant rectangle en O (puisque la droite (OA) est orthogonale à toute droite du plan (OBC)), on a : $OA^2 + OK^2 = AK^2$. D'où : $\Sigma = \frac{1}{4}AK^2 \times BC^2$ et, finalement :

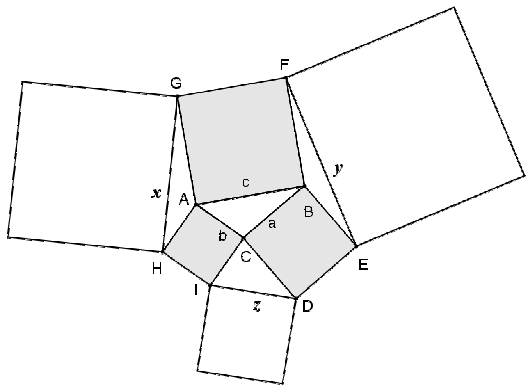
$$\boxed{\left(\text{aire (OAB)}\right)^2 + \left(\text{aire (OAC)}\right)^2 + \left(\text{aire (OBC)}\right)^2 = \left(\text{aire (ABC)}\right)^2}$$

7. Calcul des longueurs AC et CE :
En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles ABC et ACE, rectangles respectivement en B et C, on obtient :
AC = 20 et AE = 25.



Démontrons que G est le milieu de [AE] :
Dans le triangle ABC, rectangle en B :
$\tan\widehat{BAC} = \frac{12}{16}$ d'où $\tan\widehat{BAC} = \frac{3}{4}$.
Dans le triangle EAC, rectangle en C :
$\tan\widehat{CAE} = \frac{15}{20}$ d'où $\tan\widehat{CAE} = \frac{3}{4}$
Les angles aigus $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAE}$ sont tels que $\tan\widehat{BAC} = \tan\widehat{CAE}$. On en déduit que : $\widehat{BAC}$ =t $\widehat{CAE}$.
D'autre part, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACD}$ sont alternes-internes (un côté commun [AC] et [AB] //[CD) avec [AB) et [CD) de part et d'autre de (AC)). Donc $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$.
$\left.\begin{array}{l}\widehat{BAC} = \widehat{CAE} \\ \widehat{BAC} = \widehat{ACD}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{ACD}$. Or G est un point de [AE] et [CD]. Donc $\widehat{CAG} = \widehat{ACG}$
On en déduit que le triangle AGC est isocèle en G. D'où AG = GC.
G est donc le point d'intersection de la médiatrice de [AC] et de [AE].
Soit G' le milieu de [AE]. [CG'] est donc la médiane relative à l'hypoténuse du triangle ACE. D'où :
G'C = G'A. G' est donc l'intersection de la médiatrice de [AC] et de [AE].
En conséquence : G = G'.
L'aire du triangle AGC est donc égale à la moitié de l'aire du triangle ACE.
Donc : aire (AGC) = $\frac{1}{2}\times 15\times 20 = 75$.

8. La somme des aires des trois carrés grisés est égale à $a^2 + b^2 + c^2$.
La somme des aires des trois carrés extérieurs est égale à $x^2 + y^2 + z^2$.
Selon le théorème d'Al Kashi appliqué au triangle ABC :



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{CAB} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{ABC} \\ c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\widehat{ACB} \end{cases}$$

Par addition membre à membre, on obtient :

$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2\left(bc\times\cos\widehat{CAB} + ac\times\cos\widehat{ABC} + ab\times\cos\widehat{ACB}\right)} \textbf{ (1)}$$

En appliquant ce théorème d'Al Kashi successivement aux triangles AGH, BFE et CDI :
On obtient $\begin{cases} x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\times\cos\widehat{GAH} \\ y^2 = a^2 + c^2 - 2ac\times\cos\widehat{FBE} \\ z^2 = b^2 + a^2 - 2ab\times\cos\widehat{ICD} \end{cases}$ Par addition membre à membre, on en déduit que :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2\left(bc\cos\widehat{GAH} + ac\cos\widehat{FBE} + ab\cos\widehat{ICD}\right)$$

Or $\widehat{GAH}$ et $\widehat{CAB}$ sont supplémentaires (en effet $\widehat{GAH} + \widehat{CAB} + \underbrace{\widehat{BAG}}_{90°} + \underbrace{\widehat{HAC}}_{90°} = 360°$, d'où

$\widehat{GAH} = 180° - \widehat{CAB}$.

On en déduit que $\cos\widehat{GAH} = -\cos\widehat{CAB}$. On établit de même que : $\cos\widehat{FBE} = -\cos\widehat{ABC}$ et $\cos\widehat{ICD} = -\cos\widehat{ACB}$.

D'où $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2\left(bc \times \cos\widehat{CAB} + ac \times \cos\widehat{ABC} + ab \times \cos\widehat{ACB}\right)}$ **(2).**

En ajoutant membre à membre les termes des égalités (1) et (2) :

$\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + (a^2 + b^2 + c^2) = 4(a^2 + b^2 + c^2)$ d'où $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)}$