Correction ou éléments de correction (1)

Nombres

N 1 Notons entiers a, b, c, d, e, f, g, h, les huit entiers de la série, rangés par ordre croissant.

Par hypothèse : $h = a+8$ (l'étendue est 8) $\dfrac{d+e}{2} = 8$ (la médiane est 8) $\dfrac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8} = 8$ (la moyenne est 8).

On en déduit que $\dfrac{a+b+c+16+f+g+a+8}{8} = 8$ d'où $2a+b+c+f+g = 40$.

Comme $a \le b \le c \le d \le e \le f \le g \le h$, on a $6a \le \underbrace{2a+b+c+f+g}_{40}$ d'où $a \le \dfrac{40}{6}$ soit $a \le 6$ (a est entier) d'où $h \le 14$.

N 2 En remplaçant n par 1 dans la relation (1), on obtient: $a_{m+1} = a_m + a_1 + m$.
Donc, pour tout entier positif m : $a_{m+1} - a_m = m + 1$. En particulier : $a_{12} - a_{11} = 12$, $a_{11} - a_{10} = 11$, …, $a_2 - a_1 = 2$.
On en déduit que $a_{12} - a_1 = (a_{12} - a_{11}) + (a_{11} - a_{10}) +\ldots+ (a_2 - a_1) = 12 + 11 + \ldots + 2$.
Donc $a_{12} = 12 + 11 + \ldots + 2 + 1 = 78$.

N 3 Par définition de α et β, on a pour tout entier n compris entre 1 et 2011 : $\alpha \le \dfrac{a_n}{b_n}$ et $\dfrac{a_n}{b_n} \le \beta$.

On en déduit que pour tout entier n compris entre 1 et 2011 $\alpha b_n \le a_n$ (car $b_n > 0$).

En remplaçant n successivement par 1, 2, 3, …, 2011 dans l'inégalité $\alpha b_n \le a_n$, on obtient : $\begin{cases} \alpha b_1 \le a_1 \\ \alpha b_2 \le a_2 \\ \ldots \\ \alpha b_{2011} \le a_{2011} \end{cases}$

D'où, par addition membre à membre : $\alpha b_1 + \alpha b_2 + \ldots + \alpha b_{2011} \le a_1 + a_2 + \ldots + a_{2011}$.
En factorisant le premier membre par α et en divisant les deux membres par $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{2011}$ (strictement positif), on obtient : $\alpha \le \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2011}}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{2011}}$.

De même, avec $\dfrac{a_n}{b_n} \le \beta$, on a, pour tout $n \in \{1,2,3,\ldots,2011\}$: $a_n \le \beta b_n$ (car $b_n > 0$).

On en déduit de façon analogue que, $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2011} \le \beta b_1 + \beta b_2 + \beta b_3 + \ldots + \beta b_{2011}$ d'où $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2011}}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{2011}} \le \beta$

En conclusion : $\alpha \le \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2011}}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{2011}} \le \beta$.

N 4 Soit x, y, z trois réels strictement positifs.

1. $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - 2 = \dfrac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy} = \dfrac{(x-y)^2}{xy}$. $\dfrac{(x-y)^2}{xy}$ est positif (quotient de deux nombres positifs) donc $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \ge 2$

2. Si $x+y+z \le 3$, alors $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) \le 3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$ (car $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} > 0$).

Or $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) = 3 + \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right) + \left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right) + \left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)$. D'après la question 1, on a $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \ge 2, \dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x} \ge 2, \dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y} \ge 2$.

D'où $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) \ge 9$. Donc $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \ge \dfrac{9}{x+y+z}$. Comme $\dfrac{1}{x+y+z} \ge 3$, on en déduit que $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \ge 3$

3. Réponse : Non. Contre - exemple : avec $x = 1$, $y = 2$ et $z = \dfrac{1}{2}$, on a : $x+y+z = 3{,}5$ et $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = 3{,}5$.

N 5 *Remarque préliminaire* : $\sqrt{\dfrac{25}{2}+\sqrt{\dfrac{625}{4}-n}} + \sqrt{\dfrac{25}{2}-\sqrt{\dfrac{625}{4}-n}}$ est défini pour $n \le \dfrac{625}{4}$:

$\sqrt{\frac{625}{4}-n}$ existe si et seulement si $n\leq\frac{625}{4}$.

Pour $n\leq\frac{625}{4}$, $\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}$ existe et est positif (somme de deux nombres positifs) et $\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}$ existe et est positif ($\frac{25}{2}=\sqrt{\frac{625}{4}}$ et $\sqrt{\frac{625}{4}}>\sqrt{\frac{625}{4}-n}$).

Posons $X=\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$

$$X^2=\left(\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}\right)^2+2\sqrt{\left(\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}\right)\left(\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}\right)}$$

$X^2=\frac{25}{2}+\cancel{\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\frac{25}{2}-\cancel{\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+2\sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2-\left(\frac{625}{4}-n\right)}$ soit $\boxed{X^2=25+2\sqrt{n}}$ d'où $X=\sqrt{25+2\sqrt{n}}$

Comme $n\leq\frac{625}{4}$, on a $\sqrt{25+2\sqrt{n}}\leq\sqrt{50}$ et comme $25+2\sqrt{n}\geq 25$, on a $\sqrt{25+2\sqrt{n}}\geq 5$.

X est donc un entier compris entre 5 et 7.

Si $X = 5$, l'égalité $\sqrt{25+2\sqrt{n}}=5$ donne pour solution $n = 0$.

Si $X = 6$, l'égalité $\sqrt{25+2\sqrt{n}}=6$ implique $25+2\sqrt{n}=36$ d'où $n=\frac{81}{4}$ qui n'est pas entier.

Si $X = 7$, l'égalité $\sqrt{25+2\sqrt{n}}=7$ implique $25+2\sqrt{n}=49$ d'où $n=144$.

Il y a donc deux solutions qui sont 0 et 144.

N 6 **Éléments de solution** : Une décomposition de 2005 comporte nécessairement un et un seul 1.

Elle s'écrit donc comme une décomposition « sans 1 » de 2004 plus 1.
Une décomposition de 2004 « sans 1 » s'écrit comme le produit par 2 d'une décomposition de 1002.
On a donc :d (2005) = d (1002)
Les décompositions de 1002 sont de deux sortes : celles qui comportent deux 1 et celles qui n'en comportent pas.
Celles qui comportent deux 1 sont sommes de 1 et de décompositions de 1001 (il y en a donc autant que de décompositions de 1001) ; celles qui ne comportent pas de 1 sont des produits par 2 de décompositions de 501 (il y en a donc autant que de décompositions de 501) …

N 7 Posons $a=0{,}946\ 053\ 946\ 053\ ...$ Alors $10^6a=946\ 053+a$ d'où $a=\frac{946\ 053}{10^6-1}$ soit $a=\frac{947\times37\times3^3}{37\times13\times11\times7\times3^3}$, $a=\frac{947}{13\times11\times7}$

L'équation (E) : $\frac{x}{7}+\frac{y}{11}+\frac{z}{13}=0{,}946\ 053\ 946\ 053\ ...$ équivaut à $\frac{x}{7}+\frac{y}{11}+\frac{z}{13}=\frac{947}{7\times11\times13}$. En multipliant les deux membres par $7\times11\times13$, on obtient : $143x+91y+77z=947$ (E').

Supposons que $(0,y,z)$ soit solution de (E'). Alors $91y+77z=947$.

Puisque 91 et 77 sont divisibles par 7, $91y+77z$ est divisible par 7, ce qui est impossible car 947 n'est pas divisible par 7.

Donc $x\geq1$. Par un raisonnement analogue, on établit que *y* et *z* sont supérieurs ou égaux à 1.

On en déduit que $\underbrace{143x+91y+77z}_{947}\geq143x+91+77$. D'où $x\leq\frac{947-91-77}{143}$ d'où $x\leq5$. $\boxed{x \text{ est donc un entier compris entre 1 et 5}}$.

On établit de même que $\boxed{1\leq y\leq7}$ et $\boxed{1\leq z\leq9}$.

(E') équivaut à : $91y+77z=947-143x$. Comme $91y+77z$ est divisible par 7, $947-143x$ est également divisible par 7.

x	1	2	3	4	5
$947-143x$	804	661	518	375	232

La seule valeur qui convienne est $x = 3$ ($518 = 74 \times 7$).

On a alors $91y+77z=518$ qui équivaut à $13y+11z=74$. Donc $11z=74-13y$. Comme $11z$ est divisible par 11, $74-13y$ est également divisible par 11. On vérifie que le seul entier *y* compris entre 1 et 7 qui convient est $y = 4$. D'où $z = 2$.

Vérification : Si $x = 3$, $y = 4$ et $z = 2$, alors $\frac{x}{7}+\frac{y}{11}+\frac{z}{13}=\frac{3}{7}+\frac{4}{11}+\frac{2}{13}=\frac{3\times11\times13+4\times7\times13+2\times7\times11}{7\times11\times13}=\frac{947}{1001}$

Conclusion : L'équation (E) admet un unique triplet (x,y,z) d'entiers naturels solution, le triplet (3, 4, 2).

N 8 Trois nombres dont le produit vaut 1 sont tels que leur somme est égale à la somme de leurs inverses.

a. Le triplet $\left(a,\frac{1}{a},1\right)$ où $a\notin\{0,-1,1\}$ vérifie ces conditions. En effet si $a\notin\{0,-1,1\}$, les trois nombres $a,\frac{1}{a}$ et 1 existent et sont tous différents, leur produit est égal à 1 et $a+\frac{1}{a}+1=\frac{1}{a}+a+1$.

b. Soit a, b, c trois nombres non nuls tels que $\begin{cases} abc=1 \\ a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \end{cases}$.

$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ équivaut à $a+b+c=\frac{bc+ac+ab}{abc}$

équivaut à $a+b+c=bc+ac+ab$ (car $abc=1$).

équivaut à $bc+ac+ab-(a+b+c)=0$

Pour $abc = 1$, $bc+ab+ac-(a+b+c)=(1-a)(1-b)(1-c)$.

Donc $bc+ac+ab-(a+b+c)=0$ équivaut à $(1-a)(1-b)(1-c)=0$

équivaut à $a=1$ ou $b=1$ ou $c=1$.

Les triplets solutions sont donc $\left(1,b,\frac{1}{b}\right)$, $\left(a,1,\frac{1}{a}\right)$ $\left(a,\frac{1}{a},1\right)$, où a et b sont deux réels non nuls.

N 9 Pour tout entier naturel n, $n^4-80n^2+100=\left(n^2+10\right)^2-20n^2-80n^2$

$$=\left(n^2+10\right)^2-100n^2$$

$$=\left(n^2+10-10n\right)\left(n^2+10+10n\right).$$

On en déduit que : $\left|n^4-80n^2+100\right|=\left|\left(n^2+10-10n\right)\left(n^2+10+10n\right)\right|=\left|n^2+10-10n\right|\times\left|n^2+10+10n\right|$

Si n est un entier positif, $n^2+10+10n\geq 10>0$. Donc $\left|n^4-80n^2+100\right|=\left|n^2+10-10n\right|\times\left(n^2+10+10n\right)$.

Pour que $\left|n^4-80n^2+100\right|$ soit premier, il est nécessaire que $\left|n^2+10-10n\right|=1$ (car $n^2+10+10n\geq 10$).

$\left(\left|n^2+10-10n\right|=1\right)$ équivaut à $\left(n^2+10-10n=-1 \text{ ou } n^2+10-10n=1\right)$.

Premier cas : $n^2+10-10n=-1$ si, et seulement si $n^2-10n+11=0$

si, et seulement si $n=5-\sqrt{14}$ ou $n=5+\sqrt{14}$ (discriminant : $10^2-44=56$, racines : $\frac{10-\sqrt{56}}{2}$ et $\frac{10+\sqrt{56}}{2}$)

Les solutions $5-\sqrt{14}$ et $5+\sqrt{14}$ sont à écarter car elles ne sont pas entières.

Deuxième cas : $n^2+10-10n=1$ si, et seulement si $n^2-10n+9=0$

si, et seulement si $n=1$ ou $n=9$ (discriminant : $10^2-36=64$, racines : $\frac{10-\sqrt{64}}{2}$ et $\frac{10+\sqrt{64}}{2}$).

Si $n=1$, $n^2+10+10n=21$ et 21 n'est pas premier.

Si $n=9$, $n^2+10+10n=181$ et 181 est premier.

Conclusion : $|f(n)|$ est premier si et seulement si $n = 9$ ($|f(9)|=|181|=181$ et 181 est premier).

Équations, fonctions

FE 1 Montrons tout d'abord que $\overline{\text{CARCAR}}$ est divisible par 13.

$\overline{\text{CARCAR}}$ =100 000C + 10 000A + 1000R + 100C + 10A + R, $\overline{\text{CARCAR}}$ =100 100C + 10 010A + 1001R. Cette somme est divisible par 1001 car chaque terme est divisible par 1001. Or 1001 est divisible par 13 (1001 = 77 × 13).

Donc $\overline{\text{CARCAR}}$ est divisible par 13. D'autre part, $\overline{\text{CARCAR}}$ - $\overline{\text{CARMEN}}$ = $\overline{\text{CAR}}-\overline{\text{MEN}}$.

Comme $\overline{\text{CARMEN}}$ et $\overline{\text{CARCAR}}$ sont tous deux divisibles par 13, $\overline{\text{CAR}}-\overline{\text{MEN}}$ est divisible par 13.

FE 2 Par hypothèse, $\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{5}$ donc $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=5$. D'autre part $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=a-2+\frac{1}{a}$. Donc : $a+\frac{1}{a}=7$.

$\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=a+2+\frac{1}{a}=9$ d'où $\boxed{\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}=3}$.

Par conséquent : $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=3\sqrt{5}$ soit $\boxed{a-\frac{1}{a}=3\sqrt{5}}$

FE 3 Dans sa caverne, Ali a trouvé un sac de *n* pépites d'or qui pèsent 1 gramme, 2 grammes, 3 grammes, 4 grammes, ..., *n* grammes. Sa femme veut exactement la moitié du poids total de l'or. Sans couper aucune pépite, Ali doit donc effectuer un partage en deux parts de même poids.

(a) Ce partage est possible si $n = 12$.
Exemple : Ali : {1, 3, 5, 8, 10, 12} somme 39, sa femme : {2 , 4, 6, 7, 9, 11} somme 39 (les nombres représentent le nombre de grammes des pépites d'or).

(b) Ce partage est impossible si $n = 5$ car la somme des nombres de grammes des pépites fait 15 (impair), qu'on ne peut partager en 2 sans couper aucune pépite.

(c) Ce partage est possible si $n = 11$. Exemple : Ali : $\{1, 5, 7, 9, 11\}$, sa femme : $\{2, 3, 4, 6, 8, 10\}$.

(d) Montrons que le partage est-il possible si, et seulement si *n* est un multiple de 4 ou un multiple de 4 plus 3.

Soit *n* un entier supérieur à 2. La somme des masses des n pépites est $1 + 2 +\ldots+ n = \frac{n(n+1)}{2}$. Ce nombre doit être pair, donc $n(n + 1)$ doit être un multiple de 4.

Soit *q* et *r* le quotient et le reste de la division de *n* par 4 et. Alors $n = 4q + r$ avec $r \in \{0,1,2,3\}$.

Si $n = 4q$, alors $n (n + 1) = 4q (4q + 1)$ qui est un multiple de 4.

Si $n = 4q + 1$, alors $n (n + 1) = (4q + 1) (4q + 2) = 2(4q + 1) (2q + 1)$ qui est le double d'un nombre impair donc non multiple de 4.

Si $n = 4q + 2$, alors $n (n + 1) = (4q + 2) (4q + 3) = 2(2q + 1) (4q + 3)$ qui est le double d'un nombre impair donc non multiple de 4.

Si $n = 4q + 3$, alors $n (n + 1) = (4q + 3) (4q + 4) = 4(4q + 1) (q + 1)$ qui est un multiple de 4.

Une condition nécessaire pour que le partage soit possible est donc que $n = 4q$ ou $n = 4q + 3$.

Premier cas : $n = 4q$. Exemple de partage possible :

Ali : $\left\{\underbrace{1,3,\ldots,2q-1}_{q \text{ premiers nombres impairs}},\underbrace{2q+2,2q+4,\ldots,4q}_{q \text{ derniers nombres pairs}}\right\}$, sa femme : $\left\{\underbrace{2,4,\ldots,2q}_{q \text{ premiers nombres pairs}},\underbrace{2q+1,2q+3,\ldots,4q-1}_{q \text{ derniers nombres impairs}}\right\}$

Vérification : Il suffit de vérifier que Ali reçoit la moitié des $\frac{n(n+1)}{2}$ grammes, soit $\frac{n(n+1)}{4}=\frac{4q(4q+1)}{4}=q(4q+1)$

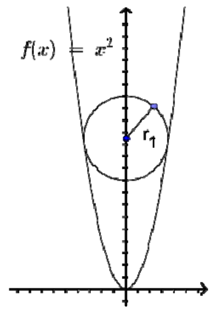
$$(1+3+\ldots+2q-1)+\big((2q+2)+(2q+4)+\ldots+4q\big)=\frac{1+(2q-1)}{2}\times q+\frac{2q+2+4q}{2}q=q^2+(3q+1)q=(4q+1)q.$$

Deuxième cas $n = 4q + 3$. Exemple de partage possible :
Si *q* est pair Ali : tous les nombres impairs de grammes auxquels on enlève la pièce de $q + 1$ grammes, et sa femme :tous les nombres pairs de grammes auxquels on ajoute la pièce de (q + 1) grammes.
Si q est impair. tous les nombres impairs de grammes auxquels on enlève la pièce de 1 g et celle de *q* grammes, et sa femme :tous les nombres pairs de grammes auxquels on ajoute les pièces de 1 et *q* grammes.
Vérification :

$$1+3+5+\ldots+(4q+3)-(q+1)=\frac{1+4q+3}{2}\times(2q+2)-(q+1)=(2q+2)^2-(q+1)=4(q+1)^2-(q+1)=(4q+3)(q+1)$$

Et la moitié des $\frac{n(n+1)}{2}$ grammes est $\frac{n(n+1)}{4}=\frac{(4q+3)(4q+4)}{4}=(4q+3)(q+1)$.

FE 4 **Une bonne colle pour le grand Merlin**



On se place dans le plan en considérant la parabole d'équation $y = x^2$, les boules étant représentées par des cercles.
Soit r_1 le rayon du plus grand cercle C_1. Les coordonnées du centre de C_1 sont $(0, 16 - r_1)$.
On cherche r_1 pour que le cercle soit tangent à la parabole. Les coordonnées des points d'intersections des deux courbes sont les solutions du système $\begin{cases} x^2 + (y - 16 + r_1)^2 = r_1^2 \\ y = x^2 \end{cases}$.

On en déduit que y doit être solution de l'équation $y + y^2 + 256 + r_1^2 - 32y + 2yr_1 = r_1^2$ qui s'écrit aussi $y^2 + y(2r_1 - 31) + (256 - 32r_1^2) = 0$.
Le cercle ne pourra être tangent à la parabole que si cette équation n'admet qu'une seule solution, c'est-à-dire son discriminant est nul. r_1 doit être solution de l'équation $4r_1^2 + 4r_1 - 63 = 0$. La seule solution positive de cette équation est $\frac{7}{2}$. Le cercle C_1 a donc pour diamètre 7.
On recommence avec le cercle C_2 de rayon r_2 et de centre de coordonnées $(0, 9 - r_2)$.
On cherche r_2 pour que le cercle soit tangent à la parabole. Les coordonnées des points d'intersections des deux courbes sont les solutions du système $\begin{cases} x^2 + (y - 9 + r_2)^2 = r_2^2 \\ y = x^2 \end{cases}$.

On aboutit de même à une équation devant être vérifiée par r_2 qui est $4r_2^2 + 4r_2 - 35 = 0$ et dont la seule solution positive est $\frac{5}{2}$.
On recommence avec deux cercles C_3 et C_4 dont les rayons vérifient respectivement les équations $4r_3^2 + 4r_3 - 15 = 0$ et $4r_4^2 + 4r_4 - 3 = 0$ ce qui donne $r_3 = \frac{3}{2}$ et $r_4 = \frac{1}{2}$.
Les diamètres des quatre cercles sont donc 7, 5, 3 et 1. Le dernier cercle est donc tangent au sommet de la parabole et on ne peut donc mettre plus de quatre boules.

Équations fonctionnelles

FE 6 On cherche à déterminer toutes les fonctions *f* définies sur R qui vérifient :
Pour tous réels *x* et *y*, $f\left((x-y)^2\right) = x^2 - 2yf(x) + (f(y))^2$ **(1)**

1. a) pour $x = y = 0$, (1) devient : $f(0) = [f(0)]^2$ (2)
   b) pour $x = 0$, (1) devient : $f(y^2) = -2yf(0) + [f(y)]^2$ (3)
   c) pour $y = 0$, (1) devient : $f(x^2) = x^2 + [f(0)]^2$ (4)
   d) Pour $x = y$, (1) devient : $f(0) = x^2 - 2xf(x) + [f(x)]^2 = [x - f(x)]^2$ (5)
2. L'égalité (2) équivaut à $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$
   a) Premier cas : $\boxed{f(0) = 0}$
   L'égalité (5) devient $0 = [x - f(x)]^2$, donc, pour tout *x*, $f(x) = x$.
   Réciproquement :
   Si, pour tout *x*, $f(x) = x$, alors, pour tous réels *x* et *y*, $f\left((x-y)^2\right) = (x-y)^2$ et $x^2 - 2yf(x) + (f(y))^2 = x^2 - 2yx + y^2 = (x-y)^2$.
   b) Deuxième cas : $\boxed{f(0) = 1}$
   L'égalité (5) devient $1 = [x - f(x)]^2$ donc, pour tout *x*, $f(x) = x - 1$ ou $f(x) = x + 1$.
   Supposons qu'il existe un réel *a* tel que $f(a) = a - 1$. Alors, en remplaçant *y* par *a* dans (3), on obtient :
   $f(a^2) = -2af(0) + [f(a)]^2$ soit $f(a^2) = -2a + (a-1)^2$ soit $f(a^2) = a^2 + 1 - 4a$.
   Or, d'après (4), $f(a^2) = a^2 + 1$.
   En comparant cette égalités avec $f(a^2) = a^2 + 1 - 4a$, on obtient : $a^2 + 1 = a^2 + 1 - 4a$. D'où *a* = 0. Ce qui est impossible car

$f(0)=1$ et l'égalité $f(a)=a-1$ donne $f(0)=-1$ pour $a=0$.

On en déduit que pour tout x, $f(x)=x+1$.

Il y a donc deux fonctions solutions de (1) : $x\mapsto x$ et $x\mapsto x+1$.

FE 7 Déterminer les fonctions f définies sur R telles que, pour tout x réel : $x^2 f(x)+f(1-x)=2x-x^4$.

Solution : En remplaçant x par $1-x$, on obtient $(1-x)^2\cdot f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$

On a donc , pour tout x réel: $\begin{cases} f(1-x)=2x-x^4-x^2\cdot f(x) \\ (1-x)^2\left(2x-x^4-x^2\cdot f(x)\right)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4 \end{cases}$

On en déduit que $(1-x)^2\left(2x-x^4\right)-x^2(1-x)^2 f(x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$ d'où :

$f(x)\left[1-x^2(1-x)^2\right]=2(1-x)-(1-x)^4-(1-x)^2\left(2x-x^4\right)$.

On vérifie que $2(1-x)-(1-x)^4-(1-x)^2\left(2x-x^4\right)=(1-x)(-x^5+x^4+x^3-x^2+x+1)$

$-x^5+x^4+x^3-x^2+x+1=x^3\left(-x^2+x+1\right)+\left(-x^2+x+1\right)=\left(-x^2+x+1\right)\left(x^3+1\right)$

D'autre part : $1-x^2(1-x)^2=(1-x(1-x))(1+x(1-x))=\left(1-x+x^2\right)\left(1+x-x^2\right)$.

D'où : $f(x)\left(1-x+x^2\right)\left(1+x-x^2\right)=(1-x)\left(-x^2+x+1\right)\left(x^3+1\right)$

Pour tout x tel que $1-x+x^2\neq 0$ et $1+x-x^2\neq 0$, $f(x)=\dfrac{(1-x)\cancel{\left(-x^2+x+1\right)}\left(x^3+1\right)}{\left(1-x+x^2\right)\cancel{\left(1+x-x^2\right)}}=\dfrac{(1-x)\left(x^3+1\right)}{1-x+x^2}$.

Or, pour tout x, $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$.

Donc, pour tout x tel que $1-x+x^2\neq 0$ et $1+x-x^2\neq 0$, $f(x)=(1-x)(x+1)$ soit $f(x)=1-x^2$.

Il reste à examiner les cas particuliers $1-x+x^2=0$ et $1+x-x^2=0$. La première équation n'a pas de solution (discriminant négatif).

La deuxième équation admet deux solutions réelles. Soit α l'une d'entre elles. Elle est telle que : $\alpha^2=1+\alpha$.

Montrons que l'égalité $x^2 f(x)+f(1-x)=2x-x^4$ reste vérifiée pour $f(\alpha)=1-\alpha^2$.

$\alpha^2 f(\alpha)+f(1-\alpha)=\alpha^2(1-\alpha^2)+(1-(1-\alpha)^2)$. En remplaçant α^2 par $1+\alpha$, on obtient :

$\alpha^2 f(\alpha)+f(1-\alpha)=(1+\alpha)(1-1-\alpha)+(1-1+2\alpha-\underbrace{(1+\alpha)}_{\alpha^2})$

$\alpha^2 f(\alpha)+f(1-\alpha)=-\alpha-\alpha^2+2\alpha-1-\alpha=-\alpha^2-1$ et $2\alpha-\alpha^4=2\alpha-(1+\alpha)^2=-1-\alpha^2$.

Conclusion : Pour tout x réel, $\boxed{f(x)=1-x^2}$.

FE 8 Soit f une fonction de **N** dans **N** telle que pour tout entier n, $f(n+1)>f(n)$ et $f(f(n))=3n$.

Que vaut $f(2011)$?

Solution : Commençons par déterminer les premières valeurs prises par f. Comme $f(f(0))=0$ et que la fonction f est strictement croissante et positive, $f(0)=0$. Puisque $f(1)\geqslant 1$ et $f(1)\leqslant f(f(1))$, $f(1)\leqslant 3$ et donc $f(1)$ vaut 1, 2 ou 3. La propriété $f(f(1))=3$ écarte la première alternative (1 n'est pas un point fixe de f) et si $f(1)=3$, alors $f(3)=3$, ce qui contredit la stricte croissance de f. Ainsi $f(1)=2$. Alors $f(2)=f(f(1))=3$.

On montr ensuite par récurrence que, pour tout entier naturel n, $f(3^n)=2\times 3^n$ et $f(2\times 3^n)=3^{n+1}$.

La propriété est claire pour $n=0$ puisque $f(1)=2$ et $f(2)=3$

Si, pour un entier n, on a $f(3^n)=2\times 3^n$ et $f(2\times 3^n)=3^{n+1}$, alors $f(3^{n+1})=f(f(2\times 3^n))=2\times 3^{n+1}$ et

$f(2\times 3^{n+1})=f(f(3^{n+1}))=3^{n+2}$, ce qui permet d'achever le raisonnement par récurrence.

Remarquons à présent que $2\times 3^n=f(3^n)<f(3^n+1)<....<f(3^n+3^n-1)<f(2\times 3^n)=3^{n+1}$

Il y a 3^n-1 termes distincts à déterminer, à savoir $f\left(2\times 3^n+r\right)$ avec exactement $3^{n+1}-2\times 3^n-1=3^n-1$ entiers naturels dans l'intervalle $\left]2\times 3^n,3^{n+1}\right[$. Ainsi par monotonie, nous avons, pour tous entiers naturels n et r tels que $0\leqslant r\leqslant 3^n$,
$f\left(3^n+r\right)=2\times 3^n+r$

Et en prenant l'image par *f* de chaque terme, on déduit encore que $f\left(2\times 3^n+r\right)=3\times\left(3^n+r\right)$
pour les mêmes valeurs de *r* et *n*. Ces deux dernières conditions (avec $f\left(0\right)=0$) déterminent *f* de manière unique.
Réciproquement, il est évident que cette fonction *f* vérifie les critères de l'énoncé.
Observons finalement que $2011=2\times 3^6+553$ et $553<3^6$, donc $f\left(2011\right)=3\times\left(3^6+553\right)=3846$.

FE 9 Prouver qu'il n'existe pas de fonction $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ telle que pour tous réels *x* et *y*, $f\left(x+f\left(y^3\right)\right)=y+f\left(x^3\right)$.

Solution : Pour $y=0$, l'égalité s'écrit, pour tout *x*, $f\left(x^3\right)=f\left(x+f\left(0\right)\right)$,
d'où $f\left(\left(x-f\left(0\right)\right)^3\right)=f\left(x\right)$ (1)

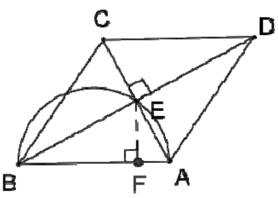
Pour $x=0$, l'égalité s'écrit, pour tout *y*, $f\left(f\left(y^3\right)\right)=y+f\left(0\right)$ (2)

De (2) on déduit que $f\left(f\left(x-f\left(0\right)\right)^3\right)=x-f\left(0\right)+f\left(0\right)=x$ et en utilisant (1), $f\left(f\left(x-f\left(0\right)\right)^3\right)=f\left(f\left(x\right)\right)$, d'où $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ et $f\left(f\left(x^3\right)\right)=x^3$

Or, d'après (2), $f\left(f\left(x^3\right)\right)=x+f\left(0\right)$, donc, pour tout réel *x*, $f\left(0\right)=x^3-x$

Ce qui est impossible.
Il n y a donc pas de fonction qui remplit l'équation de l'énoncé.

GP 1 On considère un losange L de côté *a* fixé et on appelle *D* et *d* les longueurs des deux diagonales
On pose : $S_1=D+d$, $S_2=D^2+d^2$ et $P=Dd$.



Dans le triangle BEA rectangle en E : $\mathrm{BE}^2+\mathrm{EA}^2=a^2$ d'où : $\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2=a^2$ qui équivaut à $D^2+d^2=4a^2$.

Or $D^2+d^2=\left(D+d\right)^2-2Dd$, donc $\left(D+d\right)^2=4a^2+2Dd$

D'où la relation : $S_2=S_1^2-2P$

$\left(D+d\right)^2=4a^2+2Dd$ équivaut à $S_1^2=4a^2+2P$

S_1 est maximal si, et seulement si S_1^2 est maximal, si, et seulement si *P* est maximal.

L'aire du triangle BED est égale à $\frac{1}{2}\times\frac{D}{2}\times\frac{d}{2}=\frac{P}{8}$. Donc *P* est maximal, si et seulement si l'aire du triangle BDE est maximale.

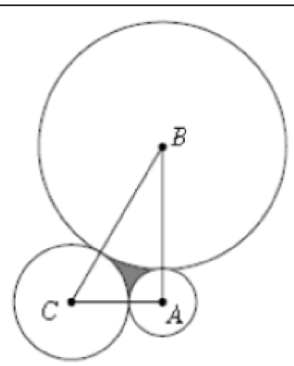
Cette aire est égale à $\frac{1}{2}a\times\mathrm{EF}$. Elle est maximale si, et seulement si EF est maximal.

Comme F est un point de (BA) et que E décrit un demi-cercle de diamètre [BA], la valeur maximale de EF est atteinte lorsque EF est égal au rayon. Dans ce cas, on a EF = FB = FA. Le triangle BEA est donc isocèle rectangle et le quadrilatère ABCD est alors un carré.

En résumé : $S_1=D+d$ et *P* sont maximaux si, et seulement si ABCD est un carré de côté a.

On a alors $D=d=a\frac{\sqrt{2}}{2}$, $S_1=a\sqrt{2}$, $P=\frac{a^2}{2}$. S_2 est constant et égal à $4a^2$.

GP 2 On considère un triangle ABC rectangle en A tel que
BC = 12 et AC = 6.
Trois cercles de centres A, B et C , et sont tangents deux à deux sur les côtés du triangle ABC comme indiqué sur la figure ci-contre.



1. AB = $\sqrt{\mathrm{BC}^2-\mathrm{AC}^2}=6\sqrt{3}$. On en déduit que : $\sin\widehat{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}$ d'où $\widehat{\mathrm{B}}=30°$ et, par conséquent $\widehat{\mathrm{C}}=60°$.

2. Notons $r_\mathrm{A},r_\mathrm{B},r_\mathrm{C}$ les rayons respectifs des cercles de centre A, B et C.

$\begin{cases} r_A + r_B = 6\sqrt{3} \\ r_A + r_C = 6 \\ r_B + r_C = 12 \end{cases}$ .Remplaçons r_C par $6 - r_A$ dans la troisième équation. On obtient le système

équivalent suivant : $\begin{cases} r_C = 6 - r_A \\ r_A + r_B = 6\sqrt{3} \\ r_B + 6 - r_A = 12 \end{cases}$. On obtient $\begin{cases} r_A = 3\left(\sqrt{3}-1\right) \\ r_B = 3\left(\sqrt{3}+1\right) \\ r_C = 3\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right) \end{cases}$.

3. L'aire de la partie délimitée par les trois cercles est égale à la différence entre l'aire du triangle ABC et la solmme des aires des secteurs angulaires de centres A, B, C limités par les côtés de ce triangle.

aire (ABC) = $\dfrac{AC \times AB}{2} = 18\sqrt{3}$.

L'aire du quart de disque de centre A et de rayon r_A est égale à $\dfrac{1}{4} \times \pi r_A^2$ soit $\dfrac{9\pi\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4} = \dfrac{9\pi\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}$.

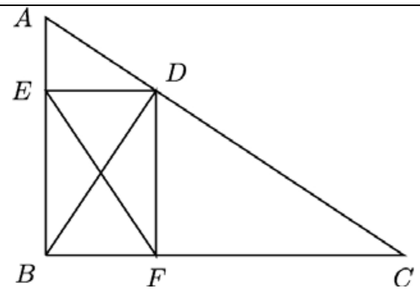
$\widehat{B} = 30$ donc le secteur angulaire de centre B et de rayon r_B, limité par les côtés [BA] et [BC] est le douzième du disque de centre B et de rayon r_B. Son aire est donc égale à $\dfrac{1}{12} \times \pi r_B^2$ soit $\dfrac{9\pi\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{12} = \dfrac{3\pi\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$

$\widehat{C} = 60°$ donc le secteur angulaire de centre C et de rayon r_C, limité par les côtés [CA] et [CB] est le sixième du disque de centre C et de rayon r_C. Son aire est donc égale à $\dfrac{1}{6} \times \pi r_C^2$ soit $\dfrac{27\pi\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{6} = 9\pi\left(2-\sqrt{3}\right)$

L'aire grisée est donc égale à : $18\sqrt{3} - \left[\dfrac{9\pi\left(2-\sqrt{3}\right)}{2} + \dfrac{3\pi\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} + 9\pi\left(2-\sqrt{3}\right)\right]$ soit

$18\sqrt{3} - \dfrac{3\pi}{2}\left[3\left(2-\sqrt{3}\right) + \left(2+\sqrt{3}\right) + 6\left(2-\sqrt{3}\right)\right] = 18\sqrt{3} - 6\pi\left(5-2\sqrt{3}\right)$.

GP3 Les droites (ED) et (BF) sont parallèles.



$\widehat{BAD} = \widehat{DBC} = \alpha$

Les triangles ABD et BCD sont *semblables* et $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{BD}{DC}$

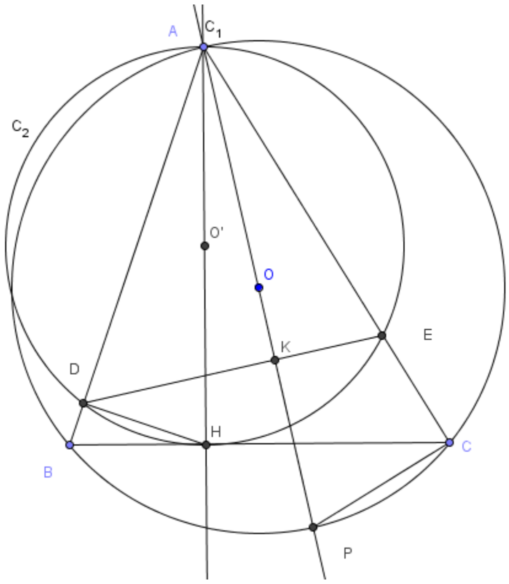
c'est-à-dire $AD \times DC = BD^2 = EF^2$

D'après l'indication,

$$r_1 = \frac{AE + ED - DA}{2} = \frac{AD\cos\alpha + AD\sin\alpha - AD}{2} = \frac{AD}{2}\left(\cos\alpha + \sin\alpha - 1\right).$$
$$r_2 = \frac{ED + DF - EF}{2} = \frac{EF\cos\alpha + EF\sin\alpha - EF}{2} = \frac{EF}{2}\left(\cos\alpha + \sin\alpha - 1\right)$$
$$r_3 = \frac{DF + FC - CD}{2} = \frac{DC\cos\alpha + DC\sin\alpha - DC}{2} = \frac{DC}{2}\left(\cos\alpha + \sin\alpha - 1\right)$$

d'où : $r_1 \times r_3 = \dfrac{AD}{2} \times \dfrac{DC}{2}\left(\cos\alpha + \sin\alpha - 1\right)^2 = \dfrac{AD\cos\alpha + AD\sin\alpha - AD}{2} = \left(\dfrac{BD}{2}\right)^2\left(\cos\alpha + \sin\alpha - 1\right)^2 = r_2^2$.

GP4 Soit O le centre du cercle C_1 circonscrit au triangle ABC et soit P le deuxième point d'intersection de la droite (AO) coupe le cercle C1. Montrons que les droites (DE) et (EO) sont perpendiculaires en un point qu'on, notera K.



(1) $\widehat{APC} = \widehat{ABC}$ car ce sont des angles inscrits interceptant le même arc dans le cercle C_1.

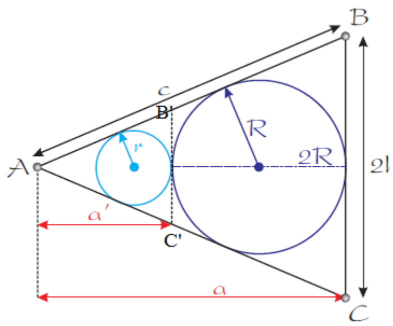
On en déduit que $\widehat{BAH} = \widehat{PAC}$ car les triangles AH et APC sont rectangles, l'un car (AH) est une hauteur, l'autre car inscrit dans un demi-cercle.

(2) $\widehat{DHA} = \widehat{DEA}$ car ce sont des angles inscrits interceptant le même arc dans le cercle C_2.

(3) $\widehat{BAH} + \widehat{DHA} = 90°$ car le triangle ADH est rectangle puisque inscrit dans un demi-cercle. On en déduit que $\widehat{PAC} + \widehat{DEA} = 90°$.
Le triangle AKE est donc rectangle en K.

GP5 Sur la figure ci-contre, les demi-cercles de rayons r et R sont tangents entre eux et tangents à l'hypoténuse du triangle rectangle ABC, le demi-cercle de rayon R est également tangent à (BC). On pose h = BC.

Démontrer que : $\frac{R}{h} = \sqrt{\frac{r}{R}}$



Complétons la figure par symétrie orthogonale d'axe (AC).
Le cercle de centre R tangent aux trois côtés du triangle. C'est donc le cercle inscrit dans le triangle ABC.

Soit a la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Avec les notations de la figure, on a : aire (ABC) = ah.
Notons I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. L'aire de ABC est aussi la somme des aires des triangles IAB, IBC et ICA. Donc $ah = \frac{1}{2}\left(Rc + Rc + 2Rh\right)$ donc $R = \frac{ah}{c+h}$.

On en déduit que $a' = a - 2R = a - 2\frac{ah}{h+c} = a\frac{c-h}{c+h}$

Le triangle AB'C' est une réduction de rapport $\frac{a'}{a}$ du triangle ABC. Le cercle inscrit dans ce triangle est donc une réduction de rapport $\frac{a'}{a}$ du cercle de rayon R. D'où : $r = \frac{a'}{a}R$ donc $\boxed{\frac{r}{R} = \frac{a'}{a} = \frac{c-h}{c+h}}$. On a vu que $R = \frac{ah}{c+h}$ donc $\boxed{\frac{R}{h} = \frac{a}{c+h}}$ (1)

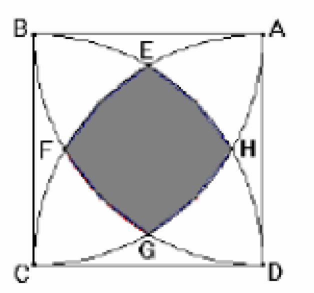
Donc $\frac{R}{h} = \frac{a(c-h)}{(c+h)(c-h)} = \frac{a(c-h)}{c^2-h^2}$. Comme $c^2 - h^2 = a^2$ (théorème de Pythagore), on a :

$\frac{R}{h} = \frac{a(c-h)}{a^2} = \frac{c-h}{a}$ d'où $\boxed{\frac{R}{h} = \frac{c-h}{a}}$ (2).

Multiplions les égalités (1) et (2) membre à membre : $\left(\frac{R}{h}\right)^2 = \frac{\cancel{a}}{c+h} \times \frac{c-h}{\cancel{a}} = \frac{c-h}{c+h}$ donc $\boxed{\left(\frac{R}{h}\right)^2 = \frac{r}{R}}$.

Aires et espace

AE 1 Soit x l'aire du quadrilatère curviligne EFGH. Les symétries permettent d'affirmer que les triangles curvilignes AEH, BFE, CGF et DH ont une même aire y ; de même, les triangles curvilignes ABE, BCF, CDG et DAH ont une même aire z.



L'aire du carré ABCD est a^2 d'où $x + 4y + 4z = a^2$.

L'aire du quart de disque ABD centré en A est $\frac{\pi}{4}a^2$ d'où $x + 3y + 2z = \frac{\pi}{4}a^2$, l'aire du triangle équilatéral CDE est $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, l'aire du secteur circulaire CDE est $\frac{\pi}{6}a^2$.

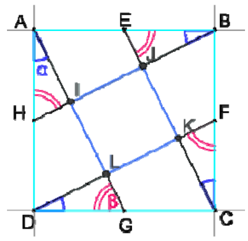
L'aire du triangle curviligne CDE est $x + 2y + z = 2\left(\frac{\pi}{6}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, soit $\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2$.

x, y et z sont donc solutions du système : $\begin{cases} x+4y+4z=a^2 \\ x+3y+2z=\frac{\pi}{4}a^2 \\ x+2y+z=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} z=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2-(x+2y) \\ x+4y+4\left[\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2-(x+2y)\right]=a^2 \\ x+3y+2\left[\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2-(x+2y)\right]=\frac{\pi}{4}a^2 \end{cases}$

La résolution du système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} x+4y+4\left[\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2-(x+2y)\right]=a^2 \\ x+3y+2\left[\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2-(x+2y)\right]=\frac{\pi}{4}a^2 \end{cases}$ conduit à

$$\boxed{x=\left(1+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)a^2}.$$

AE 2 ABCD est un carré de côté 1.



1. Le triangle GDA est rectangle en D. Posons $\alpha=\widehat{GAD}$ et $\gamma=\widehat{DGA}$. Alors $\alpha+\gamma=\frac{\pi}{2}$. D'autre part, les quatre triangles rectangles GDA HAB, EBC et FCD sont superposables (les côtés de l'angle droit de chacun d'eux ont pour mesure 1 et $\frac{1}{2}$ et leur hypoténuse $\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$). On a donc :

$\alpha=\widehat{ABH}=\widehat{BCE}=\widehat{CDF}$ et $\beta=\widehat{BHA}=\widehat{CEB}=\widehat{DFC}$.

On en déduit que dans le triangle AIH, $\widehat{AIH}=\pi-(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{2}$. Les droites (GA) et (HB) sont donc perpendiculaires.

On établit de même que : (HB) $\perp$ (EC) et (EC) $\perp$ (FD). Le quadrilatère IJKL est donc un rectangle (trois angles droits).

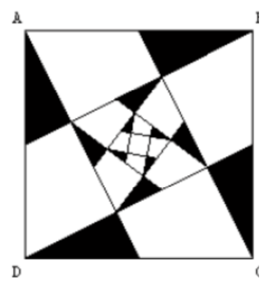
Dans le triangle AHI rectangle en I, on a : $\text{HI}=\text{AH}\times\sin\alpha$ et $\text{AI}=\text{AH}\times\cos\alpha$

Or, dans le triangle ADG rectangle en G : $\sin\alpha=\frac{\text{DG}}{\text{AG}}=\frac{1}{2}\div\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ et $\cos\alpha=\frac{\text{AD}}{\text{AG}}=1\div\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D'où $\text{HI}=\frac{\sqrt{5}}{10}$ et $\text{AI}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. On établit de même que $\text{EJ}=\frac{\sqrt{5}}{10}=\text{HI}$ et $\text{JB}=\text{KC}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\text{AI}$

D'où IJ = BH – (HI + JB) = EC – (EJ + KC) = JK. Donc IJ = JK $=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\boxed{\text{IJKK est un carré de côté } \frac{\sqrt{5}}{5}}.$$

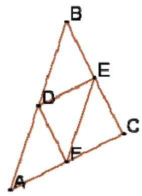


2. A l'étape 1, l'aire des 4 triangles colorés est égale à $4\times\frac{AI\times HI}{2}=\frac{1}{5}$.

A l'étape suivante on colorie quatre petits triangles dans un carré d'aire $\frac{1}{5}$. On a donc dans ce deuxième carré, une aire coloriée égale à $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{5}$ soit $\frac{1}{5^2}$. A la n-ième étape, la surface totale coloriée a pour aire :

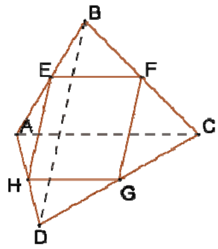
$\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^n}=\frac{1}{5}\left(\frac{1-\frac{1}{5^n}}{1-\frac{1}{5}}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right)=0$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\right)=\frac{1}{4}$.

AE 3 On considère un polygone P_1 non croisé à n côtés ($n \geq 3$).
Soit P_2 le polygone non croisé dont les sommets sont les milieux des côtés de P_1.
On appelle A_1 l'aire du polygone P_1 et A_2 celle de P_2.



1. **Cas *n* = 3** : P_1 est un triangle ABC. Le polygone P_2.est le triangle DEF où D, E, F sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CA]. D'après le théorème de la droite des milieux :
DE = $\frac{1}{2}$AC, EF = $\frac{1}{2}$AB, DF = $\frac{1}{2}$ BC. P_2 est une réduction de rapport $\frac{1}{2}$ de P_1.

Donc $\frac{A_2}{A_1}=\frac{1}{4}$ qui ne dépend pas du polygone P_1.



2. a. **Cas *n* = 4**
Soit E, F, G, H les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD], [DA] du quadrilatère ABCD (P1).
D'après le théorème de la droite des milieux :EF = $\frac{1}{2}$AC = GH, FG = $\frac{1}{2}$BD = EH.

A_1 = aire (ABCD) et A_2 = aire (EFGH) = A_1 – (aire (AEH) + aire (BFE) + aire (CGF) + aire (DHG)).

.Les triangles AEH, BFE, CGF et DHG sont des réductions de rapport $\frac{1}{2}$ des triangles ABD, BCA, CDB et DAC (respectivement).

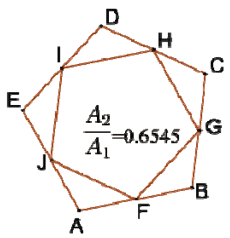
Donc : aire (AEH) = $\frac{1}{4}$ aire(ABD), aire (BFE) = $\frac{1}{4}$aire (ABC), aire (CGF) = $\frac{1}{4}$aire (CDB) et aire (DHG) = $\frac{1}{4}$ aire (DAC).

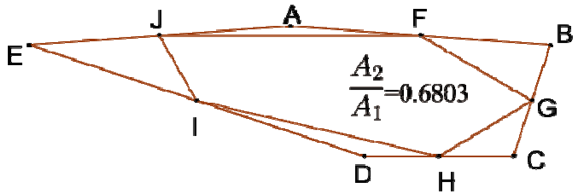
On en déduit que :

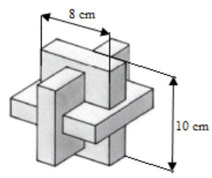
aire (AEH) + aire (BFE) + aire (CGF) + aire (DHG) = $\frac{1}{4}$ (aire(ABD) + aire (CDB) + aire (ABC) + aire (DAC)) = $\frac{1}{2}$ A_1

A2 = A_1 – $\frac{1}{2}$ A_1 d'où $\frac{A_2}{A_1}=\frac{1}{2}$ qui ne dépend pas du polygone P_1.

b. **Cas *n* = 5**. Le rapport $\frac{A_2}{A_1}$ dépend du polygone P_1.

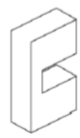




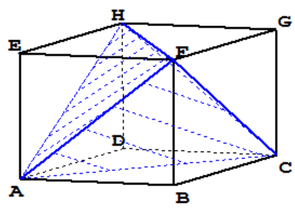


AE 4 On imbrique 3 pavés droits pour obtenir le solide représenté ci-contre.
Les 3 pavés ont les mêmes dimensions : 2 cm × 8 cm × 10 cm.

Volume de ce solide :
Le pavé « horizontal », a pour volume 2 × 8 × 10 = 180 (en cm^3).
Les deux parties du pavé vertical de 10 cm de haut qui dépassent ont pour volume total : 2 × (2 × 4 × 8) = 128 (en cm^3).
On ajoute ensuite les deux morceaux du pavé vertical de 8 cm de haut (voir schéma ci-contre) :



2 morceaux de 2 × 4 × 8 auxquels il manque un morceau de 2 × 3 × 2, soit 2 fois (64 – 12) soit 104 cm^3.
Le volume total du solide en cm^3est donc 160 + 128 + 104 = **392**.

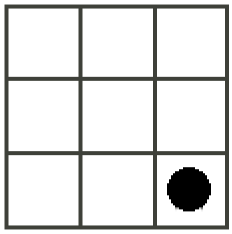


AE 5 Un pavé droit ABCDEFGH a un volume de 72 cm^3.
Le volume du tétraèdre ACFH est égal au tiers du volume du pavé droit soit **24 cm³**.
En effet :
vol(ACFH)=vol(ABCD) – (vol (AEFH) + vol(ABCF) + vol(FHGC) + vol (HDAC)).

Or vol (AEFH) = $\frac{1}{3}\left(\frac{\text{EH}\times\text{EA}}{2}\times\text{EF}\right)=\frac{1}{6}$ vol(ABCD) . De même vol(ABCF) = vol(FHGC) = vol (HDAC).= $\frac{1}{6}$ vol(ABCD) .

D'où Vol(ACFH)= vol(ABCD) – $\frac{4}{6}$ vol(ABCD) $=\frac{1}{3}$ vol(ABCD) .

Probabilités, combinatoire, stratégie



PCS 1 On arrête le jeu lorsque le jeton sort de la grille ou lorsqu'il atteint la case supérieure gauche.
Notons G pour un déplacement d'une case vers la gauche et H pour un déplacement d'une case vers le haut.
Dressons la liste de tous les chemins que le jeton peut prendre : GGG, GGHG, GGHH, GHGG, GHGH, GHHG, GHHH, HHH, HHGH, HHGG, HGHH, HGHG, HGGH, HGGG.
Six de ces chemins aboutissent à la case supérieure gauche : GGHH, GHGH, GHHG, HHGG, HGHG et HGGH.

Chaque déplacement du jeton (G ou H) a une probabilité de $\frac{1}{2}$. Donc chaque déplacement de longueur 3 a une probabilité de $\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ et chaque déplacement de longueur 4 a une probabilité de $\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$.
Puisque les chemins qui aboutissent au coin supérieur gauche sont au nombre de 6 et qu'ils ont tous pour longueur 4, la probabilité pour que le jeton se rende dans la case supérieure gauche de la grille est égale à $6\times\frac{1}{16}$.

PCS 2 **Faisons la liste des cas possibles :**

3ème lancer	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**5**	**5**	**5**	**5**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**
2ème lancer	**1**	**1**	**2**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1er lancer	**1**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**	**4**	**3**	**2**	**1**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

Ces 15 cas sont équiprobables. Parmi ces 15 cas, il y en a 8 avec au moins un 2 lors d'un lancer. La probabilité cherchée est donc $\frac{8}{15}$.

PCS 3 Dans la liste des sommes deux à deux, les nombres a, b, c, d, e interviennent chacun 4 fois chacun, d'où, en sommant : $4(a + b + c + d + e) = 17 + 20 + 28 + 14 + 42 + 36 + 28 + 39 + 25 + 31$ d'où $a+b+c+d+e=70$

La plus grande somme de la liste est 42 et la plus petite 14, donc $a + b = 42$ et $d + e = 14$, d'où $c = 70 - 42 - 14 = 14$.
La deuxième somme par ordre croissant est $a + c$ donc $a = 39 - 14 = 25$, et de même $e = 17 - 14 = 3$.
Mais alors $b = 42 - 25 = 17$ et $d = 14 - 3 = 11$.
Réciproquement, on vérifie facilement que ces nombres donnent bien les sommes annoncées.

PCS 4
1. Quelques remarques préliminaires :

- si l'on affecte un + à chaque entier entre 1 et 100 on obtient une somme égale à +5050
- si l'on modifie un signe + en un signe – sur un entier k , cela revient à retrancher $2k$ à la somme (et inversement si l'on modifie un signe – en un signe +, à ajouter $2k$)
- si l'on affecte un + à chaque entier inférieur ou égal à p et un – aux autres on obtient une somme : $s=2\frac{p(p+1)}{2}-5050=p^2+p-5050$ puisqu'il faut alors rajouter 2 fois chaque entier affecté au préalable d'un –.

Tout d'abord, encadrons 2011 par deux termes consécutifs de la suite $p^2 + p - 5050$. On a :
832 + 83 – 5050 = 1922 < 2011 < 842 + 84 – 5050 = 2090
Donc si l'on affecté un + aux 84 premiers et un – aux autres on se trouve à 2090 et il faudra retrancher 78=2×39 pour obtenir le résultat : il suffira donc de transformer le – devant le 39 en un +
d'où la somme 2012 = +1 + 2::: + :: + 42 **– 39** + 40::: + 83 + 84 – 85 – 86::: – 100

2. Il est clair que la plus grande somme possible est égale à 5050 (que des +) et la plus petite égale à –5050 (que des –).
Notons que le fait de changer un + en un moins consiste à retrancher à la somme un nombrepair , donc toute somme possible sera forcément paire.
Réciproquement, soit S un entier pair compris entre –5050 et 5050. Puisque la fonction
$p\mapsto p(p+1)-5050$ est croissante sur [0; 100], il existe un seul entier p compris entre 1 et100 tel que :

$$(p-1)^2 + (p-1) - 5050 < S \leq p^2 + p - 5050$$

Affectons un + aux entiers inférieurs ou égaux à p et un – aux autres : nous obtenons donc une somme égale à : $p^2 + p - 5050$.

La différence $D = (p^2 + p - 5050) - S$ est paire (en effet $2\frac{p(p+1)}{2} - 5050$ est pair) et

$D < (p^2 + p - 5050) - (p-1)^2 + (p-1) - 5050) = 2p + 2$ donc $\frac{D}{2} \leq p$: On en déduit que l'on peut obtenir S en affectant un + à tous les entiers k compris entre 1 et p sauf $\frac{D}{2}$ et un – aux autres.

Conclusion : Les entiers obtenus sont tous les entiers pairs compris entre –5050 et 5050.

PCS 5 a. $(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + ... + 2x_2x_3 + ... + 2x_{n-1}x_n$

b. Soit α le nombre de positifs x_i et $n - \alpha$ le nombre de x_i négatifs. Pour qu'un double produit soit négatif, il faut que les deux x_i pris en compte soient de signes contraires. Le nombre de doubles produits négatifs est donc $\alpha(n-\alpha)$, alors que le nombre de doubles produits au total est $\frac{n(n-1)}{2}$.

Afin d'avoir autant de doubles produits négatifs que positifs, il faut donc avoir :

$\alpha(n-\alpha) = \frac{n(n-1)}{4}$, ce qui peut s'écrire $n = (n-2\alpha)^2$

Si $n = 4$, l'équation devient $4 = (4-2\alpha)^2$, et a pour solution 1 et 3. Lorsque $n = 4$, on peut donc prendre trois x_i d'un certain signe et le dernier du signe opposé pour avoir autant de doubles produits positifs que négatifs.

Si $n = 2011$, l'équation devient $2011 = (2011-2\alpha)^2$, ce qui est impossible dans les entiers vu que 2011 n'est pas un carré parfait.

c. En général, on remarque que n doit toujours être un carré parfait. Posons alors $n = k^2$:

$k^2 = (k^2 - 2\alpha)^2$ équivaut à $\alpha = \frac{k(k-1)}{2}$ ou $\alpha = \frac{k(k+1)}{2}$ qui sont chacune des nombres entiers.

Pour tout entier n carré parfait, il existe donc deux valeurs de α telles qu'il y ait autant de doubles produits négatifs que positifs. Le fait que n soit un carré est donc une condition nécessaire et suffisante.

Le principe des tiroirs

PCS 6 Soit n un entier divisible ni par 2 ni par 5. n est donc supérieur ou égal à 3.

Considérons les n entiers 1, 11, 111, $\underbrace{11...1}_{n \text{ chiffres } 1}$. Supposons que dans cette liste, aucun ne soit divisible par n. Les restes dans la division par euclidienne par n de ces nombres sont donc 1, ou 2…ou $n-1$. Puisqu'il y a n nombres et $n-1$ restes, deux des restes sont nécessairement égaux (principe des tiroirs). Leur différence 11..10…0 est donc divisible par n. Comme n est premier avec 2 et 5, on peut éliminer les 0 et obtenir un nombre ne possédant que des 1 et divisible par n.

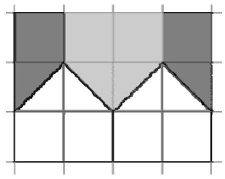
PCS 7 Dans un repère du plan, on choisit cinq points à coordonnées entières. Montrer qu'au moins un des segments joignant deux de ces points contient un point à coordonnées entières.

Considérons les parités des coordonnées de ces cinq points (pair « P » ou impair « I »). Il n'y a que quatre possibilités :

(P, P), (P, I), (I, P), et (I, I). Parmi les cinq points, il y en a donc deux dont les coordonnées ont les mêmes parités. Notons A(a, b) et B(c, d) ces deux points : a et c sont de même parité, b et d sont de même parité. Le milieu M de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$. Ce point appartient au segment [AB° et ses coordonnées sont entières puisque $a + c$ et $b + d$ sont des entier pairs.

PCS 8

Découpons le rectangle 3 × 5 en 5 parties comme indiqué ci-contre. Au moins l'une de ces parties contient deux des six points. Leur distance est inférieure à la plus grande distance (appelée diamètre) qui sépare deux points de cette partie. On vérifie que le diamètre de ces cinq parties est égal à $\sqrt{5}$ (démonstration laissée au lecteur).

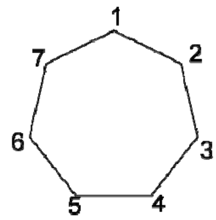


Donc deux des six points se trouvent à une distance inférieure ou égale à $\sqrt{5}$.

PCS 9

On colorie les sommets d'un heptagone régulier en blanc et noir.

Comme le nombre de sommets est impair, il y a nécessairement deux sommets voisins de la même couleur, noire par exemple. Numérotons les sommets de sorte que ces deux sommets aient les numéros 2 et 3. Si 1 ou 4 est aussi noir, on a alors un triangle isocèle dont les trois sommets sont de la même couleur. Sinon 1 et 4 sont blancs. IL y a alors deux possibilités : soit 1, 4 et 7 sont blancs, sinon 7 et noir et alors 2, 3 et 7 sont noirs



Pour un octogone régulier, il existe des coloriages sans triangle isocèle, ainsi que le montre l'exemple ci-contre (justification laissée au lecteur).