ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2025-2026 **Stage « filé »**

Classe de seconde **Fiche numéro 3**

Parution lundi 9 mars **Retour attendu pour le lundi 30 mars**

Exercice 1 – Calcul littéral et inégalités

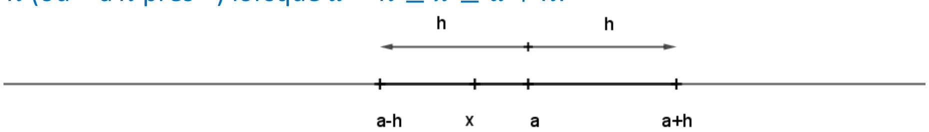
Le calcul littéral s'appuie sur plusieurs propriétés algébriques, notamment :
- les identités remarquables ;
- les propriétés opératoires sur les nombres rationnels.

Pour montrer que deux nombres A et B sont égaux, on peut :
- montrer que $A - B = 0$.

ou
- montrer que $A = C$ et $B = C$.

Des valeurs particulières peuvent aboutir à une conjecture qui ne devient une propriété qu'à l'issue d'une démonstration dans le cas général, c'est-à-dire pour des **nombres quelconques**.

Définition : soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif. On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a - h \leq x \leq a + h$.



On obtient un encadrement de x de longueur $2h$.

1. **a.** Montrer que pour tout entier naturel non nul k, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

b. En déduire, sans calculatrice, la valeur de la somme $S = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{9\times10}$.

c. Déterminer, en fonction de l'entier naturel non nul n, la somme $S_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $S_n < 1$.

e. Déterminer un entier n à partir duquel 1 est une valeur approchée de S_n à 10^{-2} près.

2. On suppose que, en cm, le rayon r et la hauteur h d'un cylindre sont tels que :
$4{,}9 \leq r \leq 5{,}1$ et $14{,}9 \leq h \leq 15{,}1$. On sait que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.
Déterminer un encadrement du volume V de ce cylindre et en déduire une valeur approchée à 60 près.

Exercice 2 – Fonctions, équations, inéquations

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.
Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

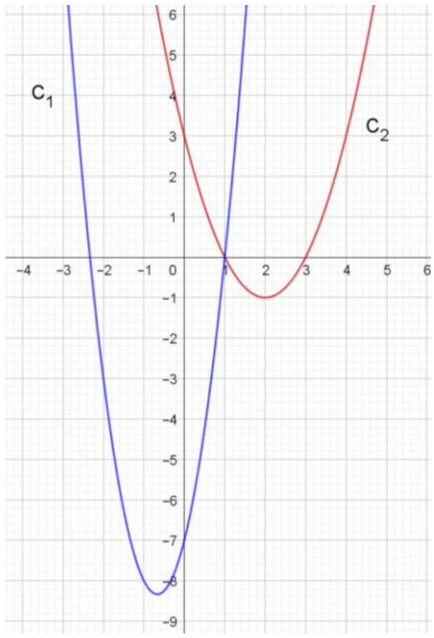
Définition : on dit qu'une fonction f admet un minimum (respectivement un maximum) en a sur un ensemble D lorsque pour tout réel x de D, $f(x) \geq f(a)$ (respectivement $f(x) \leq f(a)$). Le nombre $f(a)$ est alors le minimum (respectivement maximum) de f sur D.

Soit f et g deux fonctions définies sur le même ensemble et soit C_f et C_g leurs courbes représentatives respectives dans un repère du plan.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite d'équation $y = k$.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la courbe C_g.

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par :

$f(x) = (x-1)(x-3)$ et $g(x) = (2x+3)^2 - (x+4)^2$.

On considère, dans un repère du plan, les courbes ci-contre C_1 et C_2.



1. **a.** Associer chaque courbe de la figure ci-contre à l'une des fonctions f et g en argumentant sa réponse.
   b. Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ et $f(x) = g(x)$.
   c. Résoudre algébriquement les équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ et $f(x) = g(x)$. (on pourra commencer par factoriser $g(x)$).
2. **a.** Lire graphiquement le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x.
   b. Démontrer algébriquement le résultat précédent.
3. **a.** Quel semble être le minimum de la fonction f ?
   b. Démontrer algébriquement que la fonction f admet un minimum sur $\mathbf{R}$.
4. Déterminer algébriquement les valeurs de x pour lesquelles $f(x) \leq g(x)$.

Exercice 3 – Problèmes d'alignement et de parallélisme

Propriété : soit A et B deux points distincts du plan. Pour tout point O du plan, il existe un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

C'est cette propriété qui permet de placer des points à partir d'égalités vectorielles.

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

- La colinéarité de deux vecteurs non nuls traduit le parallélisme de deux droites ou l'alignement de trois points.
- L'égalité de deux vecteurs se traduit par une configuration de parallélogramme.
- La relation de Chasles facilite les calculs.

1. Soit ABCD un parallélogramme. On considère les points E et F tels que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.

Montrer que les points C, E et F sont alignés.

2. Soit ABC un triangle. On considère le point M symétrique de A par rapport au point C, le point N symétrique de B par rapport au point A et le point P symétrique de C par rapport au point B.
   a. Faire une figure et y placer le point D défini par $\overrightarrow{ND} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NP}$.
   b. Montrer que $\overrightarrow{NP} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
   c. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   d. En déduire que les points M, C, A et D sont alignés.

Exercice 4 – Colinéarité en géométrie analytique

Un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé lorsque les points I et J définis par les vecteurs $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ sont tels que $OI = OJ$ et les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

Définition : on dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Théorème : dans le plan muni d'un repère, les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Définition : dans le plan muni d'un repère, le déterminant du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de coordonnées respectives $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$ est le nombre $dét(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

L'introduction d'un repère dans un exercice de géométrie permet de démontrer des alignements en s'appuyant sur la condition de colinéarité de deux vecteurs par le déterminant.

1. Démonstration du théorème
   a. Démontrer que si les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires alors $xy' - x'y = 0$.
   b. Démontrer que si les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont tels que $xy' - x'y = 0$ alors ils sont colinéaires.
   (on pourra traiter à part le cas où l'un au moins des vecteurs est nul)
2. Application
   Soit ABCD un parallélogramme de centre O. On considère les points $\mathrm{M, N, P, Q}$ définis par :
   $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DA}}$.
   a. Expliquer pourquoi $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$ est un repère du plan et déterminer les coordonnées des points C et O dans ce repère.
   b. Déterminer les coordonnées des points $\mathrm{M, N, P, Q}$ dans ce repère.
   c. En déduire que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme dont on donnera le centre.

Exercice 5 – Un peu d'arithmétique

Définition : un entier naturel a est un multiple d'un entier naturel b lorsqu'il existe un entier k tel que $a = bk$.
On dit alors que b est un diviseur de a.
Définition : on appelle PGDC (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels a et b, le plus grand des diviseurs de a et b.
Théorème - Division euclidienne dans $\mathbf{N}$: Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul. Alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. Les nombres q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

1. On considère un coffre dont les dimensions en cm sont $L = 60, l = 42, h = 30$. On veut remplir exactement (sans laisser d'espace vide) ce coffre avec des cubes tous identiques et dont les dimensions en centimètres sont des entiers.
   a. Quelle est, en centimètre, la plus grande valeur possible pour la longueur des arêtes des cubes ? Combien en faut-il alors ?
   b. Montrer qu'il est impossible de remplir ce coffre avec 700 cubes identiques.
2. On veut démontrer que pour tous entiers naturels a et b, le nombres $ab(a + b)(a - b)$ est un multiple de 3.
   a. Montrer que si a et b ne sont pas des multiples de 3 alors il existe un entier k tel que $a = 3k + 1$ ou $a = 3k + 2$ et il existe un entier k' tel que $b = 3k' + 1$ ou $b = 3k' + 2$.
   b. En déduire que dans tous les cas l'un des nombres $a, b, a - b, a + b$ est un multiple de 3.
   c. Conclure.