ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 **Stage « filé »**

Classe de seconde **Fiche numéro 3**

Parution vendredi 11 février **Retour attendu pour le lundi 16 mars**

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

- Le milieu I d'un segment $[\mathrm{AB}]$ est caractérisé par l'une des égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}}$ ou, pour un point M du plan, $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$.

- La colinéarité de deux vecteurs non nuls traduit le parallélisme de deux droites ou l'alignement de trois points.
- L'égalité de deux vecteurs se traduit par une configuration de parallélogramme.
- La relation de Chasles facilite les calculs.

Exercice 1

Soit ABCD un quadrilatère. On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

a. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$.

On suppose désormais que le quadrilatère ABCD est un trapèze de bases [BC] et [AD]. On note K et L les milieux respectifs des segments [AC] et [BD].

b. Justifier l'existence d'un réel x tel que $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \mathrm{x}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

c. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IL}}$, $\overrightarrow{\mathrm{KJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

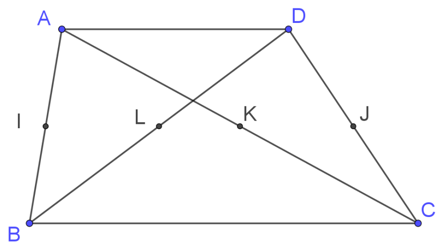
d. En déduire la valeur de x pour laquelle on a $\overrightarrow{\mathrm{IL}} = \overrightarrow{\mathrm{LK}} = \overrightarrow{\mathrm{KJ}}$.

a. I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD]. On a donc $\overrightarrow{\mathrm{IA}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DJ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$.

La relation de Chasles permet alors d'écrire $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DJ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ soit, en introduisant les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ en fonction desquels on veut exprimer $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$:

$\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) + \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})$.

b. ABCD est un trapèze de bases [BC] et [AD]. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ sont colinéaires ce qui signifie qu'il existe un réel x tel que $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = x\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.



c. $\overrightarrow{\mathrm{IL}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{BL}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ car I et L sont les milieux respectifs de [AB] et [BD] soit $\overrightarrow{\mathrm{IL}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

On démontre de même que $\overrightarrow{\mathrm{KJ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{LK}} = \overrightarrow{\mathrm{LI}} + \overrightarrow{\mathrm{IJ}} + \overrightarrow{\mathrm{JK}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

Soit, puisque $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = x\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{LK}} = \frac{1}{2}(-1 + x + 1 - 1)\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{x-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

d. $\overrightarrow{\mathrm{IL}} = \overrightarrow{\mathrm{LK}} = \overrightarrow{\mathrm{KJ}}$ si et seulement si $\frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}$ soit $x = 2$.

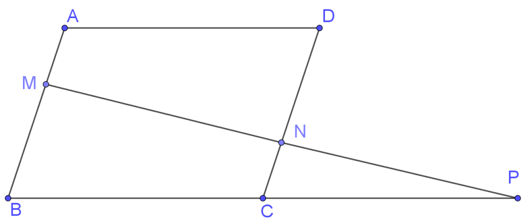
Exercice 2

Soit ABCD un parallélogramme et soit M et N les points définis par $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$. On note P le symétrique du point B par rapport à C.

a. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

b. Que représente le point N pour le segment [MP] ?

a. La relation de Chasles permet d'écrire :
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$
Soit $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. Or ABCD est un parallélogramme soit $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ d'où $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
P est le symétrique de B par rapport à C s'écrit $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CP}$
d'où $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



b. Il en résulte que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP}$. On en déduit que N est le milieu de [MP].

Exercice 3

Un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé lorsque les points I et J définis par les vecteurs $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ sont tels que OI = OJ et les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.
Définition : on dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.
Théorème : dans le plan muni d'un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.
Définition : dans le plan muni d'un repère orthonormé, le déterminant du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de coordonnées respectives $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$ est le nombre $dét(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.
L'introduction d'un repère dans un exercice de géométrie permet de démontrer des alignements en s'appuyant sur la condition de colinéarité de deux vecteurs par le déterminant.

1. Démonstration du théorème
   a. Démontrer que si les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires alors $xy' - x'y = 0$.
   b. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont tels que $xy' - x'y = 0$ alors ils sont colinéaires.
   (on pourra traiter à part le cas où l'un au moins des vecteurs est nul)
2. Application

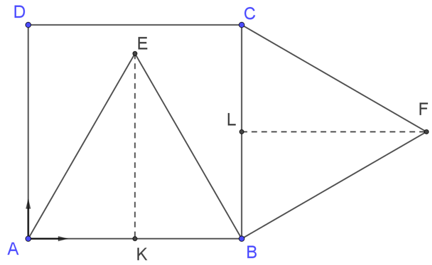
Soit ABCD un carré de côté $a > 0$. On construit à l'intérieur du carré ABCD le triangle équilatéral ABE et à l'extérieur du carré ABCD le triangle équilatéral CBF. On veut montrer que les points D, E et F sont alignés.

a. Justifier que si on pose $\vec{\imath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$ alors $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormal.
b. Déterminer les coordonnées des points D, E et F dans ce repère.
c. Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

1. a. Si $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires, alors il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$. Si $\vec{u} = k\vec{v}$ alors $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$ d'où $xy' - x'y = kx'y' - x'ky' = 0$. Par symétrie, si $\vec{v} = k\vec{u}$ alors $xy' - x'y = xky - kxy = 0$.
   b. Si $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont tels que $xy' - x'y = 0$ alors :
   - Soit l'un des vecteurs est nul : si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $0\vec{v} = \vec{u}$ et si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $0\vec{u} = \vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (*on retrouve que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur, propriété découlant directement de la définition*)
   - Soit aucun des vecteurs n'est nul. Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, on a $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Si $x \neq 0$, comme $xy' = x'y$, si on pose $k = \frac{x'}{x}$ alors $y' = ky$ et $\vec{v} = k\vec{u}$. Sinon, $y \neq 0$ et en posant $k = \frac{y'}{y}$, l'égalité $xy' = x'y$ donne $x' = kx$ et on retrouve $\vec{v} = k\vec{u}$.

   Dans les deux cas, on en déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. a. Comme ABCD est un carré de côté a, les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont à la fois orthogonaux et de norme 1 donc $(\mathrm{A}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormal.



   b. Dans ce repère, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = a\vec{\jmath}$. On a donc $D(0, a)$.
   ABE est un triangle équilatéral et situé à l'intérieur du carré ABCD donc l'ordonnée de E est positive et vaut EK où K est le milieu de [AB] et son abscisse est celle de K c'est-à-dire $\frac{a}{2}$.
   La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a vaut $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (se retrouve en appliquant le théorème de Pythagore au triangle AKE rectangle en K). On a donc $E\left(\frac{a}{2}, a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
   Le triangle CBF est équilatéral et situé à l'extérieur du carré ABCD donc, en utilisant le calcul précédent de la hauteur d'un triangle équilatéral, on a $F\left(a + a\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

   c. Dans le repère orthonormal $(\mathrm{A}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les points D, E et F sont alignés si et seulement si le déterminant du couple de vecteurs $\left(\overrightarrow{\mathrm{DE}}, \overrightarrow{\mathrm{DF}}\right)$ est nul.
   Or on a $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ a\frac{\sqrt{3}}{2} - a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DF}}\begin{pmatrix} a + a\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{a}{2} - a \end{pmatrix}$. Donc $d\acute{e}t\left(\overrightarrow{\mathrm{DE}}, \overrightarrow{\mathrm{DF}}\right) = \frac{a}{2} \times \left(\frac{a}{2} - a\right) - \left(a\frac{\sqrt{3}}{2} - a\right)\left(a + a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
   Soit $d\acute{e}t\left(\overrightarrow{\mathrm{DE}}, \overrightarrow{\mathrm{DF}}\right) = a^2\left(-\frac{1}{4} - \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1\right)\right) = a^2\left(-\frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4} - 1\right)\right) = a^2\left(-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = 0$
   Les points D, E et F sont donc bien alignés.

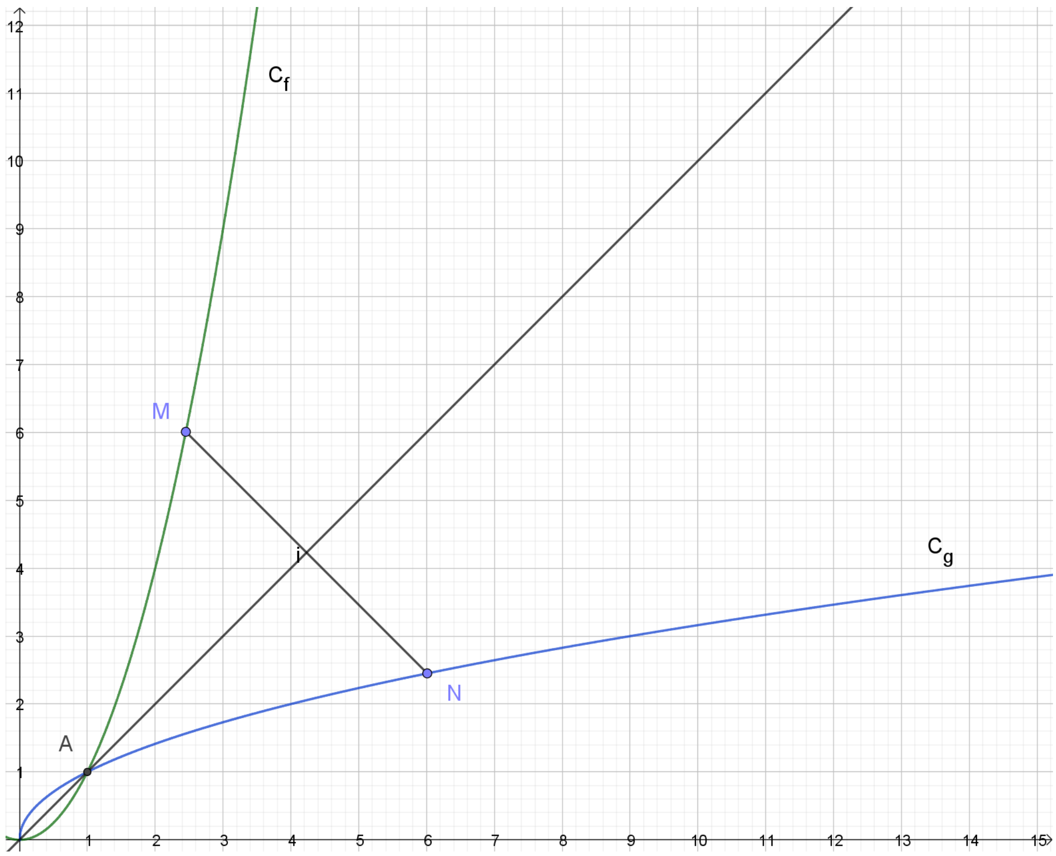
Exercice 4

Définition : un point M' est le symétrique d'un point M par rapport à une droite $\mathcal{D}$ lorsqu'il est sur cette droite ou lorsque la droite $\mathcal{D}$ est la médiatrice du segment [MM'].
Définition : la courbe représentative C_f d'une fonction f est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, f(x))$ où x prend toutes les valeurs pour lesquelles $f(x)$ existe (ensemble de définition de la fonction)

Soit f et g les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$. On note C_f et C_g les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

a. Tracer C_f et C_g et déterminer leurs points d'intersection. On notera A celui d'abscisse strictement positive.
b. Soit x un réel positif ou nul, M le point de C_f d'abscisse x et N le point de C_g d'abscisse x^2. Montrer que les points M et N sont symétriques par rapport à la droite (OA).
c. Que peut-on en déduire pour les courbes C_f et C_g ?

a. L'abscisse du point d'intersection A des deux courbes représentatives C_f et C_g , s'il existe, est solution de l'équation
$x^2 = \sqrt{x}$ soit ($x \geq 0$ et $x^4 = x$) soit $x(x^3 - 1) = 0$ (car l'égalité $x^4 = x$ entraine $x \geq 0$) soit $x = 0$ ou $x = 1$.
Il n'y a donc que deux points d'intersection : l'origine O du repère et le point A(1,1).



b. Soit x un réel positif. M est le point de C_f d'abscisse x et N est le point de C_g d'abscisse x^2. On a donc $\mathrm{M}(x, x^2)$ et $\mathrm{N}(x^2, x)$ (car si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x^2} = x$).
Si M est sur la droite (OA) alors M = O ou M = A et dans les deux cas N = M car alors $x = x^2 = \sqrt{x}$.
Si M n'est pas situé sur la droite (OA), alors montrons que cette droite est la médiatrice de [MN] en montrant que les points O et A sont tous les deux équidistants de M et N.
On a $\mathrm{O}(0{,}0), \mathrm{A}(1{,}1), \mathrm{M}(x, x^2)$ et $\mathrm{N}(x^2, x)$ donc $\mathrm{OM} = \sqrt{x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 + x^2} = \mathrm{ON}$
et $\mathrm{AM} = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-1)^2} = \sqrt{(x^2-1)^2 + (x-1)^2} = \mathrm{AN}$.
La droite (OA) est donc bien la médiatrice de [MN].

c. C_f est l'ensemble des points M lorsque x prend toutes les valeurs positives ou nulles. Le symétrique N du point M par rapport à, la droite (OA) est alors un point de C_g. Réciproquement, pour tout point $Q(a, b)$ de C_g tel que $b = \sqrt{a}$ et si on pose $y = a$ alors $a = b^2$ et Q est le symétrique du point $P(b, b^2)$ de C_f.
On peut donc affirmer que les courbes C_f et $C_g$sont symétriques par rapport à la droite (OA).

Exercice 5

Définition : on dit qu'une fonction f admet un minimum (respectivement un maximum) en a sur un ensemble D lorsque pour tout réel x de D, $f(x) \geq f(a)$ (respectivement $f(x) \leq f(a)$). Le nombre $f(a)$ est alors le minimum (respectivement maximum) de f sur D.

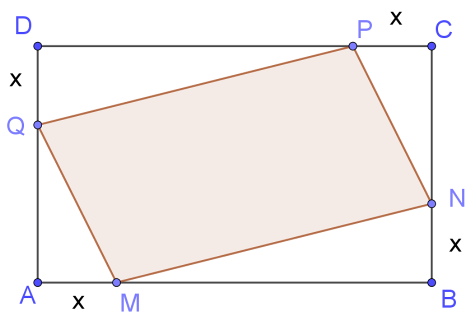
Définition : une fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un **intervalle I** lorsque pour tous réels a et b de I, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (respectivement $f(a) \geq f(b)$).

On rappelle que pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de la différence de ces deux nombres.

On considère un rectangle ABCD tel que $\mathrm{AB} = 10$ et $BC = 6$. On place les points M, N, P et Q respectivement sur les segments [AB], [BC], [CD] et [DA] de telle façon que $\mathrm{AM} = \mathrm{BN} = \mathrm{CP} = \mathrm{DQ}$.
On pose $\mathrm{AM} = x$ et $\mathcal{A}(x)$ l'aire du quadrilatère MNPQ.

a. Préciser l'intervalle dans lequel x varie et exprimer $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout x, montrer que $\mathcal{A}(x) = 2(x-a)^2 + b$.
c. Déterminer pour quelle valeur de x cette aire est minimale et la valeur de ce minimum.
d. Déterminer les variations de la fonction $x \longmapsto \mathcal{A}(x)$ sur l'intervalle déterminé au a.



a. Les points M, N, P et Q seront bien respectivement sur les segments [AB], [BC],[CD] et [DA] si et seulement si $0 \leq x \leq 6$ et $0 \leq x \leq 10$ c'est-à-dire $x \in [0,6]$.
L'aire $\mathcal{A}(x)$ du quadrilatère MNPQ est celle du rectangle ABCD à laquelle on retranche la somme des aires des triangles rectangles MBN, NCP, PDQ et QAM
Soit $\mathcal{A}(x) = 6 \times 10 - 2 \times \frac{x(6-x)}{2} - 2 \times \frac{x(10-x)}{2}$
Soit $\mathcal{A}(x) = 60 - x(6-x) - x(10-x) = 2x^2 - 16x + 60$.

b. On peut aussi écrire $\mathcal{A}(x) = 2(x^2 - 8x) + 60 = 2((x-4)^2 - 16) + 60 = 2(x-4)^2 + 28$.

c. Pour tout réel $x \in [0,6]$, $(x-4)^2 \geq 0$ donc en multipliant par 2>0, $\mathcal{A}(x) - 28 \geq 0$ et $\mathcal{A}(4) = 28$ ce qui signifie que 28 est le minimum de la fonction $\mathcal{A}$ sur [0,6] et que ce minimum est atteint en 4.

d. La question précédente donne l'idée de conjecturer que la fonction $\mathcal{A}$ est décroissante sur [0,4] et croissante sur [4,6].
Pour tous réels a et b de [0,6] tels que $a \leq b$.
Alors $\mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a) = 2(b-4)^2 + 28 - (2(a-4)^2 + 28) = 2((b-4)^2 - (a-4)^2)$
Soit $\mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a) = 2(b-4+a-4)(b-4-a+4) = 2(a+b-8)(b-a)$.
Comme $a \leq b$, $\mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a)$ a le signe de $a+b-8$.
Si a et b deux réels de $[0,4]$, alors $a \leq 4$ et $b \leq 4$ donc $a+b-8 \leq 0$ et $\mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a) \leq 0$.
Si a et b deux réels de $[4,6]$, alors $a \geq 4$ et $b \geq 4$ donc $a+b-8 \geq 0$ et $\mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a) \geq 0$.
On en déduit que la fonction $\mathcal{A}$ est décroissante sur [0,4] et croissante sur [4,6].

Exercice 6

Pour montrer que deux nombres A et B sont égaux, on peut montrer que $A - B = 0$.
Pour tous nombres réels a, b, c et d tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$.

On considère quatre nombres réels tels que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Démontrer que : (i) $\frac{ad+bc}{2ab} = \frac{2cd}{ad+bc}$ (ii) $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$

(On se place dans la situation où tous ces quotients sont bien définis.)

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$.

(i) Montrons que $\frac{ad+bc}{2ab} = \frac{2cd}{ad+bc}$, ce qui équivaut à $(ad+bc)(ad+bc) = 4abcd$

Posons $R = (ad+bc)(ad+bc) - 4abcd$ soit, puisque $ad = bc$, $R = 2ad \times 2bc - 4abcd = 4adbc - 4abcd = 0$.

On a donc bien $\frac{ad+bc}{2ab} = \frac{2cd}{ad+bc}$.

(ii) Montrons maintenant que $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$, ce qui équivaut à $ab(c+d)^2 = cd(a+b)^2$.

Posons $S = ab(c+d)^2 - cd(a+b)^2 = ab(c^2 + 2cd + d^2) - cd(a^2 + 2ab + b^2)$
Soit $S = abc^2 + 2abcd + abd^2 - cda^2 - 2cdab - cdb^2 = abc^2 + abd^2 - cda^2 - cdb^2$
Soit, comme $ad = bc$, $S = bc(ac - db) + ad(bd - ac) = (ac - bd)(bc - ad) = 0$

On a donc bien $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$.