ACADÉMIE
DE VERSAILLES
*Liberté*
*Égalité*
*Fraternité*

**Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2024-2025** **Stage « filé »**

**Classe de seconde** **Fiche numéro 3**

**Parution lundi 10 mars** **Retour attendu pour le lundi 31 mars**

**Exercice 1 – Calcul littéral et inégalités**

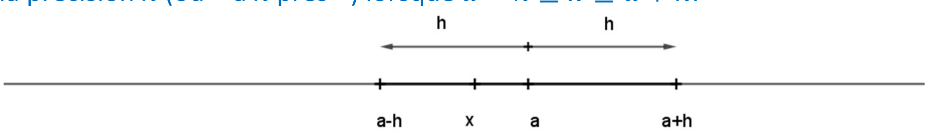
Le calcul littéral s'appuie sur plusieurs propriétés algébriques, notamment :
- les identités remarquables ;
- les propriétés opératoires sur les nombres rationnels.

Pour montrer que deux nombres $A$ et $B$ sont égaux, on peut :
- montrer que $A - B = 0$.

ou
- montrer que $A = C$ et $B = C$.

Des valeurs particulières peuvent aboutir à une conjecture qui ne devient une propriété qu'à l'issue d'une démonstration dans le cas général, c'est-à-dire pour des **nombres quelconques**.

Définition : soit $a$ et $x$ deux nombres réels et soit $h$ un réel strictement positif. On dit que $a$ est une valeur approchée de $x$ à la précision $h$ (ou « à $h$ près ») lorsque $a - h \leq x \leq a + h$.




On obtient un encadrement de $x$ de longueur $2h$.

**1.** **a.** Soit $a$ et $b$ deux nombres réels, compléter l'égalité $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \cdots$.

**b.** En déduire le signe de $a^2 + ab + b^2$ pour tous nombres réels $a$ et $b$.

**2.** **a.** Ecrire chacun des produits suivants comme quotient de deux entiers naturels $a$ et $b$, $b \neq 0$ :
$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)$, $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)$, $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)$.

**b.** Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$ , $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}$.

**c.** En déduire, que, pour tout entier naturel $n \geq 2$,
$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

**d.** Ecrire le produit $P = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{2025^2}\right)$ comme quotient de deux entiers naturels $a$ et $b$, $b \neq 0$. Quelle valeur la calculatrice affiche-t-elle pour $P$ ?

**e.** Déterminer à partir de quel entier naturel $n$, le nombre $\frac{1}{2}$ est une valeur approchée de $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ à $10^{-2}$près.

**1.** **a.** $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + 2a\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} = a^2 + ab + b^2 - 3\frac{b^2}{4}$ soit $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + 3\frac{b^2}{4}$

**b.** Un carré est toujours positif. On en déduit que, pour tous nombres réels $a$ et $b$, $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0$ et $\frac{b^2}{4} \geq 0$ d'où $a^2 + ab + b^2 \geq 0$.

**2.** **a.** $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{4-1}{4} \times \frac{9-1}{9} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$,
$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{4-1}{4} \times \frac{9-1}{9} \times \frac{16-1}{16} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} = \frac{5}{8}$.
$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) = \frac{4-1}{4} \times \frac{9-1}{9} \times \frac{16-1}{16} \times \frac{25-1}{25} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} \times \frac{24}{25} = \frac{3}{5}$

**b.** Pour tout entier naturel $n \geq 2$ ,$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}$.

**c.** Pour tout entier naturel $n \geq 2$, d'après la question précédente :
$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \ldots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n}{n-1} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}$

On peut constater que, sauf pour le premier et le dernier quotient, les quotients peuvent être regroupés par paires dont le produit vaut 1, donc $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}$.

**d.** D'après le **c.**, $P=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2025^2}\right)=\frac{2\,026}{4\,050}=\frac{1\,013}{2\,025}$.

**e.** On remarque déjà que, comme $\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2}=\frac{n+1-n}{2n}=\frac{1}{2n}$ qui est un nombre positif, pour tout entier naturel non nul $n$, $\frac{1}{2}<\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

De plus, $\frac{1}{2}$ est une valeur approchée à $10^{-2}$près de $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ si et seulement si $\frac{1}{2n}\leq 10^{-2}$ soit $2n\geq 100$ soit $n\geq 50$.

**Exercice 2 – Fonctions et inégalités**

Définition : on dit qu'un nombre $a$ est inférieur ou égal à un nombre $b$ lorsque $b-a\geq 0$.

Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

Propriétés :

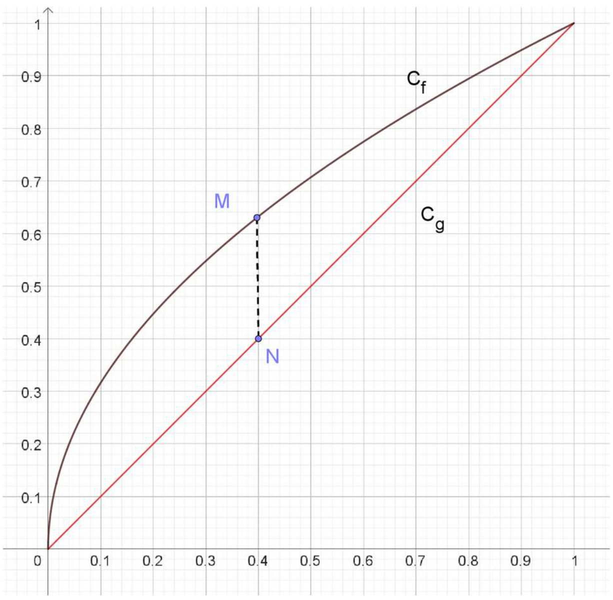
(1) Soit $a$ et $b$ deux réels positifs, $a\leq b$ si et seulement si $a^2\leq b^2$.

(2) Soit $a$ et $b$ deux réels positifs, $a\leq b$ si et seulement si $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$.

Définition : on dit qu'une fonction $f$ admet un minimum (respectivement un maximum) en $a$ sur un ensemble $D$ lorsque pour tout réel $x$ de $D$, $f(x)\geq f(a)$ (respectivement $f(x)\leq f(a)$). Le nombre $f(a)$ est alors le minimum (respectivement maximum) de $f$ sur $D$.

1. Représenter dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les fonctions $f$ et $g$ définies sur $[0,1]$ par $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x$. On notera respectivement $C_f$ et $C_g$ les courbes représentatives de $f$ et $g$.
2. Soit $x\in[0,1]$. On note M et N les points d'abscisse $x$ qui appartiennent respectivement à $C_f$ et $C_g$.
   - **a.** Étudier, graphiquement puis algébriquement, le signe de l'expression $\sqrt{x}-x$.
   - **b.** Exprimer en fonction de $x$ la distance MN. On note $d(x)$ cette distance.
   - **c.** Démontrer que la fonction $d$ admet un maximum en $\frac{1}{4}$ et déterminer la valeur de ce maximum.

**1.**




**2. a.** Étude graphique :

Le signe de $\sqrt{x}-x$ c'est-à-dire de $f(x)-g(x)$ est donné par la position relative des points $M(x,f(x))$ et $N(x,g(x))$.

Sur tout l'intervalle $[0,1]$, la courbe $C_f$ est située au-dessus de la courbe $C_g$.

Graphiquement, $\sqrt{x}-x\geq 0$ sur tout l'intervalle $[0,1]$.

Étude algébrique :

$\sqrt{x}-x=\sqrt{x}(1-\sqrt{x})$ .

Or, si $0\leq x\leq 1$, alors d'après la propriété (2), $0\leq\sqrt{x}\leq\sqrt{1}$ soit $0\leq\sqrt{x}\leq 1$.

Donc, pour tout $x\in[0,1]$, $(1-\sqrt{x})\geq 0$ et $\sqrt{x}\geq 0$ d'où $\sqrt{x}-x\geq 0$.

**b.** Comme $\sqrt{x}-x\geq 0$, $d(x)=\sqrt{x}-x$.

**c.** Pour tout $x\in[0,1]$,

$d\left(\frac{1}{4}\right)-d(x)=\left(\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}\right)-(\sqrt{x}-x)=x-\sqrt{x}+\frac{1}{4}$

Soit $d\left(\frac{1}{4}\right)-d(x)=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2$. On en déduit que, pour tout $x\in[0,1]$, $d\left(\frac{1}{4}\right)-d(x)\geq 0$ ce qui signifie que la fonction $d$ admet un maximum en $\frac{1}{4}$. Ce maximum est $d\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$.

**Exercice 3 – Problèmes d'alignement et de parallélisme**

Propriété : soit et B deux points distincts du plan. Pour tout point O du plan, il existe un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

C'est cette propriété qui permet de placer des points à partir d'égalités vectorielles.

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

- La colinéarité de deux vecteurs non nuls traduit le parallélisme de deux droites ou l'alignement de trois points.
- L'égalité de deux vecteurs se traduit par une configuration de parallélogramme.
- La relation de Chasles facilite les calculs.

*Les deux questions 1. et 2. ci-dessous sont indépendantes.*

**1.** Soit ABC un triangle. On considère les points I, J et K tels que :

$$\text{I est le milieu du segment } [AB],\ \overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JA} \text{ et } \overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}.$$

**a.** Exprimez le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$ puis le vecteur $\overrightarrow{BK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

**b.** Faire une figure

**c.** Montrer que les points I, J, K sont alignés.

**2.** Soit ABC un triangle et soit $E$ un point du plan. On considère les points F et G tels que :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} - 3\overrightarrow{EC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

**a.** Faire une figure. On pourra s'aider d'un papier quadrillé.

**b.** Montrer que $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{EG}$.

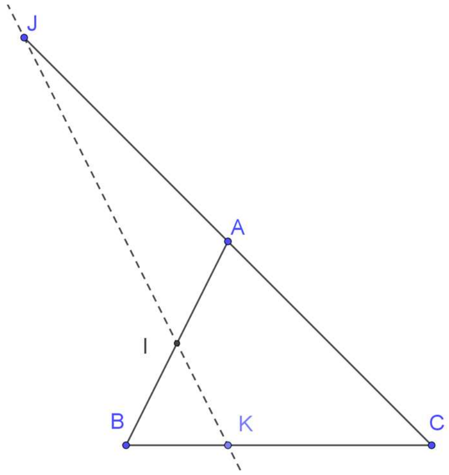
**c.** Montrer que les droites (EF) et (GC) sont parallèles.

**1.** **a.** $\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JA}$ s'écrit aussi $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{JA}$ soit $\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$ .

$\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$ s'écrit aussi $\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC}\right)$ soit $\frac{3}{2}\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

C'est-à-dire $\frac{3}{2}\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ soit $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Ces deux égalités permettent de placer les points J et K.



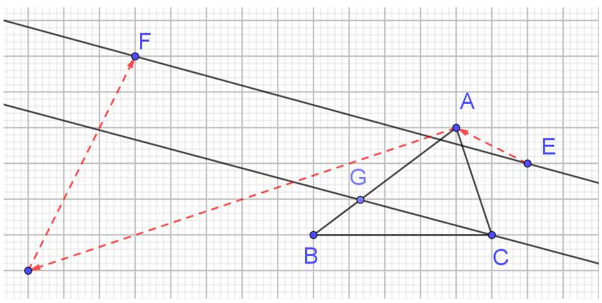

**c.** On va montrer que les points I, J, K sont alignés en montrant que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires en les exprimant tous les deux en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ .

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ car I est le milieu du segment $[AB]$.

De même $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$

Soit $\overrightarrow{IK} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On constate que $\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont bien colinéaires et donc que les points I, J, K sont alignés.

**2.** **a.**




**b.** $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AB}$

Or $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AG}$

d'où $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{AG}$ soit $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{EG}$.

**c.** Par définition, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} - 3\overrightarrow{EC}$

Soit, d'après le **b.**, $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{EG} - 3\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{CE} + 3\overrightarrow{EG}$

C'est-à-dire $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{CG}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont colinéaires donc les droites (EF) et (GC) sont parallèles.

**Exercice 4 – Colinéarité en géométrie analytique**

Un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé lorsque les points I et J définis par les vecteurs $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ sont tels que OI = OJ et les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

Définition : on dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel $k$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Théorème : dans le plan muni d'un repère, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Définition : dans le plan muni d'un repère, le déterminant du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est le nombre $dét(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

L'introduction d'un repère dans un exercice de géométrie permet de démontrer des alignements en s'appuyant sur la condition de colinéarité de deux vecteurs par le déterminant.

**1.** Démonstration du théorème

**a.** Démontrer que si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires alors $xy' - x'y = 0$.

**b.** Démontrer que si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont tels que $xy' - x'y = 0$ alors ils sont colinéaires.

(on pourra traiter à part le cas où l'un au moins des vecteurs est nul)

**2.** Application

Soit ABCD un carré de côté $a$. On construit à l'intérieur du carré ABCD le triangle équilatéral ABE et à l'extérieur du carré ABCD le triangle équilatéral CBF. On veut montrer que les points D, E et F sont alignés.

**a.** Justifier que si on pose $\vec{\imath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$ alors $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormal.

**b.** Déterminer les coordonnées des points D, E et F dans ce repère.

**c.** Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

**1.** Démonstration du théorème

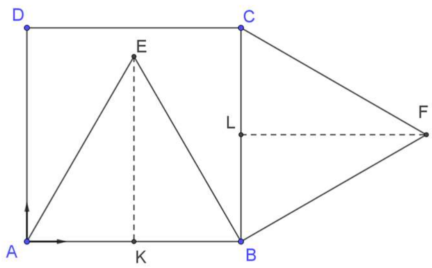
***a.*** Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires, alors il existe un réel $k$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$. Si $\vec{u} = k\vec{v}$ alors $\begin{cases}x = kx'\\y = ky'\end{cases}$ d'où $xy' - x'y = kx'y' - x'ky' = 0$. Par symétrie, si $\vec{v} = k\vec{u}$ alors $xy' - x'y = xky - kxy = 0$.

***b.*** Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont tels que $xy' - x'y = 0$ alors :

- Soit l'un des vecteurs est nul : si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $0\vec{v} = \vec{u}$ et si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $0\vec{u} = \vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (*on retrouve que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur, propriété découlant directement de la définition*)
- Soit aucun des vecteurs n'est nul. Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, on a $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Si $x \neq 0$, comme $xy' = x'y$, si on pose $k = \frac{x'}{x}$ alors $y' = ky$ et $\vec{v} = k\vec{u}$. Sinon, $y \neq 0$ et en posant $k = \frac{y'}{y}$, l'égalité $xy' = x'y$ donne $x' = kx$ et on retrouve $\vec{v} = k\vec{u}$.

Dans les deux cas, on en déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

**2.** a. Comme ABCD est un carré de côté a, les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont à la fois orthogonaux et de norme 1 donc $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormal.




b. Dans ce repère, $\overrightarrow{AD} = a\vec{\jmath}$. On a donc $D(0, a)$.

ABE est un triangle équilatéral et situé à l'intérieur du carré ABCD donc l'ordonnée de E est positive et vaut EK où K est le milieu de [AB] et son abscisse est celle de K c'est-à-dire $\frac{a}{2}$.

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté $a$ vaut $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (se retrouve en appliquant le théorème de Pythagore au triangle AKE rectangle en K). On a donc $E\left(\frac{a}{2}, a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Le triangle CBF est équilatéral et situé à l'extérieur du carré ABCD donc, en utilisant le calcul précédent de la hauteur d'un triangle équilatéral, on a $F\left(1 + a\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

c. Les points D, E et F sont alignés si et seulement si le déterminant du couple de vecteurs $\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}\right)$ est nul.

Or on a $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\ a\frac{\sqrt{3}}{2} - a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}a + a\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{a}{2} - a\end{pmatrix}$. Donc $dét\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}\right) = \frac{a}{2} \times \left(\frac{a}{2} - a\right) - \left(a\frac{\sqrt{3}}{2} - a\right)\left(a + a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soit $dét(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = a^2\left(-\frac{1}{4}-\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1\right)\right) = a^2\left(-\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}-1\right)\right) = a^2\left(-\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = 0$

Les points D, E et F sont donc bien alignés.

**Exercice 5 – Nombres entiers naturels**

Définition : un entier naturel $a$ est un multiple d'un entier naturel $b$ lorsqu'il existe un entier $k$ tel que $a = bk$.

Écriture décimale d'un entier naturel : Soit $N$ un entier décimal à quatre chiffres dont l'écriture décimale est $\overline{abcd}$.
Cela signifie que $N = 1\,000a + 100b + 10c + d$ et $0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9, 0 \leq d \leq 9$.

1. Montrer que le produit des trois entiers naturels consécutifs augmenté du nombre central est un cube parfait (le cube d'un entier naturel).
2. Existe-il trois entiers naturels consécutifs dont la somme vaut 2 025 ? Même question pour 5 entiers naturels consécutifs, puis pour 6 entiers naturels consécutifs.
3. Trouver tous les nombres $\overline{abc}$ à trois chiffres tels que $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$
4. Soit $N = \overline{abcd}$ un nombre à quatre chiffres et soit $N' = \overline{dcba}$. On considère la différence positive $D$ entre ces deux nombres. Combien de chiffres 5 le nombre $D$ peut-il au maximum avoir ?

1. Les trois entiers naturels peuvent s'écrire $x - 1, x, x + 1$. Leur produit augmenté de l'entier central (ici, $x$) est donc égal à $(x - 1)x(x + 1) + x = x(x^2 - 1) + x = x(x^2 - 1 + x) = x^3$.

*Remarque : il est souvent judicieux, lorsqu'on considère un nombre impair d'entiers consécutifs, de les noter*

$$x - r, x - r + 1, \dots, x - 1, x + 1, \dots, x + r - 1, x + r.$$

2. On note à nouveau $x - 1, x, x + 1$ les trois entiers consécutifs. Leur somme est $x - 1 + \; x + \; x + 1 = 3x$.
   On aboutit à l'équation $3x = 2\,025$ qui a bien une solution puisque 2 025, est divisible par 3 (car $2 + 0 + 2 + 5 = 9$ qui est divisible par 3). Les entiers cherchés sont 674, 675, 676.
   Le même raisonnement pour 5 aboutit à $5x = 2\,025$ soit $x = 405$ et les entiers solutions sont 403, 404, 405, 406, 407.
   En revanche, le raisonnement précédent ne peut s'appliquer pour 6 car 6 est pair. Mais les 6 entiers naturels peuvent s'écrire $x - 2, x - 1, x, x + 1, x + 2, x + 3$, ce qui conduit à l'équation $6x + 3 = 2\,025$ soit $6x = 2\,022$ soit $x = 337$. Les entiers cherchés sont donc 335, 336, 337, 338, 339 et 340.
3. L'égalité donnée signifie que $100a + 10b + c = (10a + b) + (10b + c) + (10c + a)$
   Soit $89a = b + 10c$. Or $0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9$ donc $b + 10c \leq 99$.
   On en déduit que $89a \leq 99$ et comme $0 < a \leq 9$, cela signifie que $a = 1$.
   On en déduit que $b + 10c = 89$ et toujours comme $0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9$, $b = 9$ et $c = 8$.
   L'unique solution du problème est donc le nombre 198.
4. $N = 1\,000a + 100b + 10c + d$ et $N' = 1\,000d + 100c + 10b + a$
   Donc $N - N' = 999(a - c) + 90(b - c)$. On en déduit que $N - N'$ est multiple de 9.
   La différence ne peut donc comporter quatre chiffres 5 car 5 555 n'est pas un multiple de 9 (car $5 + 5 + 5 + 5 = 20$, qui n'est pas un multiple de 9).
   Montrons que la différence $D$ peut comporter 3 chiffres 5 : $6\,621 - 1\,266 = 5\,355$.
   Le nombre maximal de chiffres 5 dans l'écriture du nombre $D$ est donc bien 3.
   et $5 + 3 + 5 + 5 = 18$, qui est un multiple de 9 donc la différence peut comporter trois chiffres 5.