ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2025-2026 — **Stage « filé »**

Classe de seconde — **Fiche numéro 3**

Parution lundi 9 mars — **Retour attendu pour le lundi 30 mars**

Exercice 1 – Calcul littéral et inégalités

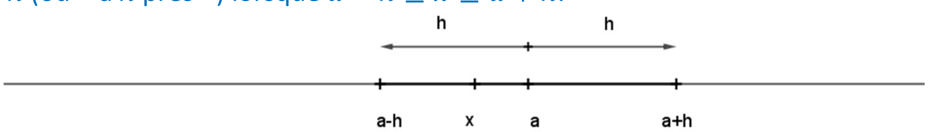
Le calcul littéral s'appuie sur plusieurs propriétés algébriques, notamment :
- les identités remarquables ;
- les propriétés opératoires sur les nombres rationnels.

Pour montrer que deux nombres A et B sont égaux, on peut :
- montrer que $A - B = 0$.

ou
- montrer que $A = C$ et $B = C$.

Des valeurs particulières peuvent aboutir à une conjecture qui ne devient une propriété qu'à l'issue d'une démonstration dans le cas général, c'est-à-dire pour des **nombres quelconques**.

Définition : soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif. On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a - h \leq x \leq a + h$.



On obtient un encadrement de x de longueur $2h$.

1. **a.** Montrer que pour tout entier naturel non nul k, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

b. En déduire, sans calculatrice, la valeur de la somme $S = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{9\times10}$.

c. Déterminer, en fonction de l'entier naturel non nul n, la somme $S_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $S_n < 1$.

e. Déterminer un entier n à partir duquel 1 est une valeur approchée de S_n à 10^{-2} près.

2. On suppose que, en cm, le rayon r et la hauteur h d'un cylindre sont tels que :
$4{,}9 \leq r \leq 5{,}1$ et $14{,}9 \leq h \leq 15{,}1$. On sait que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.
Déterminer un encadrement du volume V de ce cylindre et en déduire une valeur approchée à 60 près.

1. **a.** Pour tout entier naturel non nul k, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$.

b. On en déduit que $S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)$

soit $S = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{10}$

soit $S = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

c. Plus généralement, pour tout entier naturel non nul n :

$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

soit $S_n = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$

soit $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

d. Pour tout entier naturel non nul n, $1 - S_n = \frac{1}{n+1}$ qui est un nombre strictement positif donc $S_n < 1$.

e. Comme $S_n < 1$, 1 est une valeur approchée de S_n à 10^{-2} près si et seulement si $1 - S_n \leq 10^{-2}$ soit $\frac{1}{n+1} \leq 10^{-2}$ soit, puisque tous les nombres sont strictement positifs, $n + 1 \geq 100$ soit $n \geq 99$.
On peut donc affirmer que pour tout entier n supérieur ou égal, 1 est une valeur approchée de S_n à 10^{-2} près.

2. Le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est $V = \pi r^2 h$.
Comme $0 < 4{,}9 \leq r \leq 5{,}1$ on peut écrire que $0 < 4{,}9^2 \leq r^2 \leq 5{,}1^2$ soit $0 < 24{,}01 \leq r^2 \leq 26{,}01$

et comme $0 < 14{,}9 \leq h \leq 15{,}1$ et $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ on en déduit que
$0 < 24{,}01 \times 14{,}9 \times 3{,}14 \leq V \leq 26{,}01 \times 15{,}1 \times 3{,}15$ soit $0 < 1\,123{,}332 \leq V \leq 1\,237{,}166$.
D'où $1\,123 \leq V \leq 1\,238$ et comme $\frac{1\,123+1\,238}{2} = 1\,180{,}5$ et $\frac{1\,238-1\,123}{2} = 57{,}5$ et $57{,}5 < 60$ on en déduit que $1\,180{,}5$ est une valeur approchée de V à 60 près.
On remarque la perte importante de précision pour le calcul du volume.

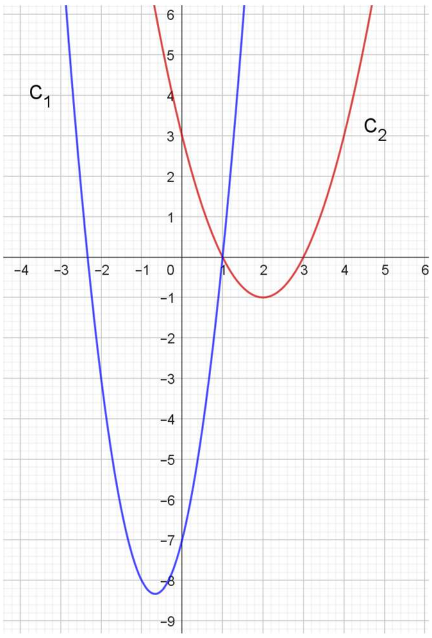
Exercice 2 – Fonctions, équations, inéquations

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.
Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

Définition : on dit qu'une fonction f admet un minimum (respectivement un maximum) en a sur un ensemble D lorsque pour tout réel x de D, $f(x) \geq f(a)$ (respectivement $f(x) \leq f(a)$). Le nombre $f(a)$ est alors le minimum (respectivement maximum) de f sur D.

Soit f et g deux fonctions définies sur le même ensemble et soit C_f et C_g leurs courbes représentatives respectives dans un repère du plan.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite d'équation $y = k$.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la courbe C_g.

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par :
$f(x) = (x-1)(x-3)$ et $g(x) = (2x+3)^2 - (x+4)^2$.
On considère, dans un repère du plan, les courbes ci-contre C_1 et C_2.



1. **a.** Associer chaque courbe de la figure ci-contre à l'une des fonctions f et g en argumentant sa réponse.
   b. Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ et $f(x) = g(x)$.
   c. Résoudre algébriquement les équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ et $f(x) = g(x)$. (on pourra commencer par factoriser $g(x)$).
2. **a.** Lire graphiquement le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x.
   b. Démontrer algébriquement le résultat précédent.
3. **a.** Quel semble être le minimum de la fonction f ?
   b. Démontrer algébriquement que la fonction f admet un minimum sur $\mathbf{R}$.
4. Déterminer algébriquement les valeurs de x pour lesquelles $f(x) \leq g(x)$.

1. a. Il suffit de prendre l'image de 0 par chaque fonction pour pourvoir affirmer que comme $f(0) = 3$, C_f est la courbe C_2 et C_g la courbe C_1 car $g(0) = 9 - 16 = -7$.
   b. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses. On lit deux solutions 1 et 3.
   Les solutions de l'équation $g(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C_g avec l'axe des abscisses. On lit deux solutions 1 et environ $-2{,}3$.
   Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes. On lit facilement la solution solutions 1. En revanche, il est difficile de vérifier graphiquement s'il y a bien une autre solution.
   c. Algébriquement :
   $f(x) = 0$ s'écrit $(x-1)(x-3) = 0$. On retrouve les solutions 1 et 3.

Comme $g(x) = (2x+3)^2 - (x+4)^2 = (2x+3+x+4)(2x+3-x-4) = (3x+7)(x-1)$
l'équation $g(x) = 0$ s'écrit $(3x+7)(x-1) = 0$ et a donc pour solutions 1 et $-\frac{7}{3}$.
Comme $f(x) - g(x) = (x-1)(x-3) - (3x+7)(x-1) = (x-1)(x-3-3x-7) = (x-1)(-2x-10)$,
l'équation $f(x) = g(x)$ s'écrit $(x-1)(-2x-10) = 0$ et a pour solutions 1 et -5.

2. **a.** Graphiquement, on s'intéresse à la position de la courbe C_f par rapport à, l'axe des abscisses. On lit que sur $[1,3]$, $f(x) \leq 0$ et sur $]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$, $f(x) \geq 0$.

b.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après ce tableau, on retrouve les résultats lus sur le graphique.

3. **a.** D'après la courbe, il semble que -1 est le minimum de la fonction f .

b. Pour tout réel x, $f(x) = x^2 - 4x + 3$,
donc $f(x) - (-1) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. On en déduit que, pour tout réel x, $f(x) \geq -1$. Donc -1 est bien le minimum de la fonction f.

4. Pour tout réel x, $f(x) - g(x) = (x-1)(-2x-10)$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x-10$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Du tableau on déduit que sur $[-5,1]$, $f(x) - g(x) \geq 0$ et que c'est sur $]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[$ que l'on a $f(x) \leq g(x)$.

Exercice 3 – Problèmes d'alignement et de parallélisme

Propriété : soit A et B deux points distincts du plan. Pour tout point O du plan, il existe un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
C'est cette propriété qui permet de placer des points à partir d'égalités vectorielles.

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

- La colinéarité de deux vecteurs non nuls traduit le parallélisme de deux droites ou l'alignement de trois points.
- L'égalité de deux vecteurs se traduit par une configuration de parallélogramme.
- La relation de Chasles facilite les calculs.

1. Soit ABCD un parallélogramme. On considère les points E et F tels que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.
Montrer que les points C, E et F sont alignés.

2. Soit ABC un triangle. On considère le point M symétrique de A par rapport au point C, le point N symétrique de B par rapport au point A et le point P symétrique de C par rapport au point B.

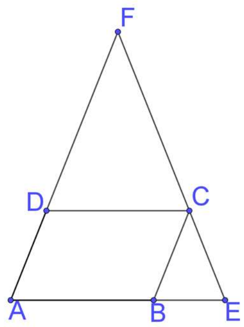
a. Faire une figure et y placer le point D défini par $\overrightarrow{ND} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NP}$.

b. Montrer que $\overrightarrow{NP} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

c. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

d. En déduire que les points M, C, A et D sont alignés.

1. On cherche à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires et, pour cela on les exprime en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.



$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}$. Or ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

De même $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD}$.

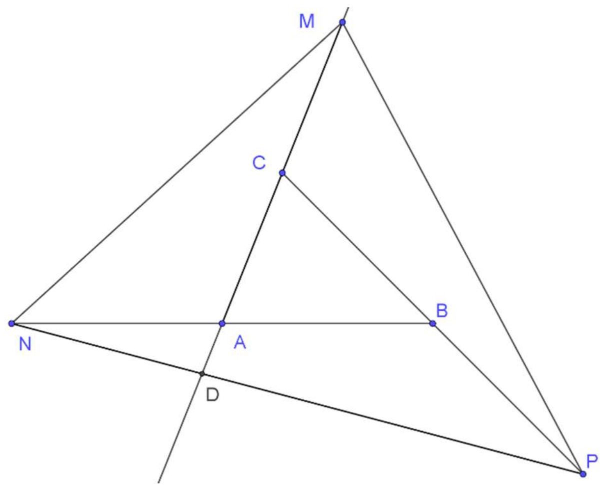
On en tire $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

On constate alors que $-2\overrightarrow{CE} = -2\left(-\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CF}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires et donc que les points C, E et F sont alignés.

2. a.



b. $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$

Or P est le symétrique de C par rapport au point B donc

$\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}$

et N symétrique de B par rapport au point A donc $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB}$.

Alors $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}$

Soit $\overrightarrow{NP} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

c. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{NP}$

Soit $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = 0.\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

d. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires.

Le point D appartient donc à la droite (AC). Comme le point M est le symétrique de A par rapport au point C, le point M appartient aussi à la droite (AC).

Les points M, C, A et D sont donc bien alignés.

Exercice 4 – Colinéarité en géométrie analytique

Un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé lorsque les points I et J définis par les vecteurs $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ sont tels que $OI = OJ$ et les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

Définition : on dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Théorème : dans le plan muni d'un repère, les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Définition : dans le plan muni d'un repère, le déterminant du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de coordonnées respectives $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$ est le nombre $dét(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

L'introduction d'un repère dans un exercice de géométrie permet de démontrer des alignements en s'appuyant sur la condition de colinéarité de deux vecteurs par le déterminant.

1. Démonstration du théorème
   a. Démontrer que si les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires alors $xy' - x'y = 0$.
   b. Démontrer que si les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont tels que $xy' - x'y = 0$ alors ils sont colinéaires.
   (on pourra traiter à part le cas où l'un au moins des vecteurs est nul)
2. Application
   Soit ABCD un parallélogramme de centre O. On considère les points M, N, P, Q définis par :
   $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \ \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\ \ \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD},\ \ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.
   a. Expliquer pourquoi $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère du plan et déterminer les coordonnées des points C et O dans ce repère.

b. Déterminer les coordonnées des points $\mathrm{M, N, P, Q}$ dans ce repère.
c. En déduire que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme dont on donnera le centre.

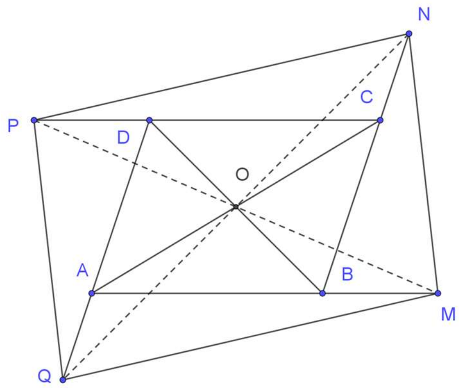
1. Démonstration du théorème

a. Si $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires, alors il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ ou $\vec{v}=k\vec{u}$. Si $\vec{u}=k\vec{v}$ alors $\begin{cases}x=kx'\\y=ky'\end{cases}$ d'où $xy'-x'y=kx'y'-x'ky'=0$. Par symétrie, si $\vec{v}=k\vec{u}$ alors $xy'-x'y=xky-kxy=0$.

b. Si $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont tels que $xy'-x'y=0$ alors :

- Soit l'un des vecteurs est nul : si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $0\vec{v}=\vec{u}$ et si $\vec{v}=\vec{0}$ alors $0\vec{u}=\vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (*on retrouve que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur, propriété découlant directement de la définition*)
- Soit aucun des vecteurs n'est nul. Comme $\vec{u}\neq\vec{0}$, on a $x\neq 0$ ou $y\neq 0$. Si $x\neq 0$, comme $xy'=x'y$, si on pose $k=\frac{x'}{x}$ alors $y'=ky$ et $\vec{v}=k\vec{u}$. Sinon, $y\neq 0$ et en posant $k=\frac{y'}{y}$, l'égalité $xy'=x'y$ donne $x'=kx$ et on retrouve $\vec{v}=k\vec{u}$.

Dans les deux cas, on en déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



2. **a.** $\left(\mathrm{A},\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$ est un repère car les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ ne sont pas colinéaires.
Comme ABCD est un parallélogramme,
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ donc les coordonnées du point C dans ce repère sont $(1,1)$.
Comme O est le centre du parallélogramme donc le milieu de $[\mathrm{AC}]$, les coordonnées du point O sont $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

b. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ se traduit par le système

$$\begin{cases}x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{B}}=\frac{1}{2}(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})\\y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{B}}=\frac{1}{2}(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}})\end{cases}\text{ soit }\begin{cases}x_{\mathrm{M}}=1+\frac{1}{2}(1-0)\\y_{\mathrm{M}}=0+\frac{1}{2}(0-0)\end{cases}\text{ soit }\begin{cases}x_{\mathrm{M}}=\frac{3}{2}\\y_{\mathrm{M}}=0\end{cases}$$

De même, les égalités $\overrightarrow{\mathrm{CN}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ conduisent à $\mathrm{N}\left(1,\frac{3}{2}\right)$, $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2},1\right)$ et $\mathrm{Q}\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

c. On en déduit les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\begin{pmatrix}1-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-0\\1+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$. Ayant les mêmes coordonnées les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ sont égaux. On en déduit que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme. De plus le centre de ce parallélogramme est le milieu du segment $[\mathrm{MP}]$. Il a donc pour coordonnées $\left(\frac{x_{\mathrm{M}}+x_{\mathrm{P}}}{2},\frac{y_{\mathrm{M}}+y_{\mathrm{P}}}{2}\right)$ soit $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. C'est donc bien le point O.

Exercice 5 – Un peu d'arithmétique

Définition : un entier naturel a est un multiple d'un entier naturel b lorsqu'il existe un entier k tel que $a=bk$.
On dit alors que b est un diviseur de a.
Définition : on appelle PGDC (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers naturels a et b, le plus grand des diviseurs de a et b.
Théorème - Division euclidienne dans $\mathbf{N}$: Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul. Alors il existe un unique couple (q,r) d'entiers naturels tels que $a=bq+r$ et $0\leq r<b$. Les nombres q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

1. On considère un coffre dont les dimensions en cm sont $L=60, l=42, h=30$. On veut remplir exactement (sans laisser d'espace vide) ce coffre avec des cubes tous identiques et dont les dimensions en centimètres sont des entiers.

a. Quelle est, en centimètre, la plus grande valeur possible pour la longueur des arêtes des cubes ? Combien en faut-il alors ?

b. Montrer qu'il est impossible de remplir ce coffre avec 700 cubes identiques.

2. On veut démontrer que pour tous entiers naturels a et b, le nombres $ab(\ a+b)(\ a-b)$ est un multiple de 3.

a. Montrer que si a et b ne sont pas des multiples de 3 alors il existe un entier k tel que $a=3k+1$ ou $a=3k+2$ et il existe un entier k' tel que $b=3k'+1$ ou $b=3k'+2$.

b. En déduire que dans tous les cas l'un des nombres $a, b, a-b, a+b$ est un multiple de 3.

c. Conclure.

1. a. Puisque le coffre doit être rempli sans laisser d'espace, la longueur du côté de chaque cube doit être un diviseur de chacune des dimensions du coffre donc le PGCD des trois dimensions.
Or $60=2^2\times 3\times 5, 42=2\times 3\times 7, 30=2\times 3\times 5$, le PGCD des trois nombres 60, 42 et 30 est 6. C'est la taille la plus grande des cubes.
Le volume du coffre est $V=60\times 42\times 30=75\ 600$. Le volume d'un cube de côté de longueur $6^3=216$.
Le nombre de cubes est donc $\frac{75\ 600}{216}$ soit 350.

b. Si le coffre contient 700 cubes identiques, le volume, en cm^3 de chaque cube sera $\frac{75\ 600}{700}$ soit 108. Or 108 n'est pas le cube d'un entier.

2. a. La division de a par 3 permet d'affirmer qu'il existe un entier k tel que $a=3k+r$ où $0\leq r<3$.
Si a est un multiple de 3 ou b est un multiple e 3, le produit $ab(a-b)(a+b)$ est un multiple de 3.
Si a n'est pas un multiple de 3, alors $r=1$ ou $r=2$ c'est-à-dire $a=3k+1$ ou $a=3k+2$.
De même si b n'est pas un multiple de 3, il existe un entier k' tel que $b=3k'+1$ ou $b=3k'+2$.
On a alors quatre cas :

- $a=3k+1$ et $b=3k'+1$. Alors $a-b=3(k-k')$ donc $a-b$ est un multiple de 3.
- $a=3k+1$ et $b=3k'+2$. Alors $a+b=3(k+k'+1)$ donc $a+b$ est un multiple de 3.
- $a=3k+2$ et $b=3k'+1$. Alors $a+b=3(k+k'+1)$ donc $a+b$ est un multiple de 3.
- $a=3k+2$ et $b=3k'+2$. Alors $a-b=3(k-k')$ donc $a-b$ est un multiple de 3.

Dans tous les cas, l'un des nombres $a, b, a-b, a+b$ est un multiple de 3.

c. On en déduit immédiatement que le produit des quatre nombres est un multiple de 3.