Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 — **Stage « filé »**

Classe de troisième — **Fiche numéro 3**

Parution mardi 15 mars — **Retour attendu le mercredi 6 avril**

Exercice 1 Ecriture d'un nombre rationnel

Propriété : Tout nombre rationnel (quotient de deux entiers) admet une écriture décimale finie (nombre décimal) ou infinie périodique (nombre non décimal).

Exemples : $\frac{3}{8} = 0{,}375$ est un nombre décimal et $\frac{3}{11} = 0{,}272727 \ldots$ n'est pas un nombre décimal et son écriture décimale est illimitée mais périodique de période 27. On note alors $\frac{3}{11} = 0,\overline{27}$. De même $\frac{35}{8} = 5{,}83333 \ldots = 5{,}8\overline{3}$ et $\frac{1\,216}{495} = 2{,}4\overline{56}$.

a. On considère le nombre rationnel dont l'écriture décimale périodique est $5,\overline{123}$.
   En considérant le nombre $1\,000x$ où $x = 0,\overline{123}$, déterminer des entiers p et q tels que $\frac{p}{q} = 5,\overline{123}$.

b. Déterminer de même une écriture fractionnaire de $N = 0{,}12\overline{89}$.

Exercice 2 Un peu de calcul littéral

Dans les calculs faisant intervenir des quotients, deux propriétés interviennent souvent :

- Pour tous nombres a, b, c et d tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0, \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$
- Pour tous nombres a, b et c tels que $b \neq 0$ et $c \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$

Dans le calcul littéral, trois propriétés facilitent les calculs :

(1) Pour tous nombres a et b, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
(2) Pour tous nombres a et b, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
(3) Pour tous nombres a et b, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

1. Démontrer les propriétés (2) et (3).
2. Soit a et b deux nombres tels que $b \neq 1$ et $b \neq -1$.

a. Démontrer que si x et y sont définis par $\frac{x-a}{x+a} = b$ et $\frac{y-a}{y+a} = -b$ alors $xy = a^2$.

b. On pose $m = \frac{x+y}{2}$. Montrer que $(m - x)^2 = (m - y)^2 = (m - a)(m + a)$

Exercice 3

On rappelle qu'une des façons de montrer que deux nombres A et B sont égaux est de montrer que $A - B = 0$.

Définition : Un nombre entier naturel n est impair lorsqu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$.

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a^2 - b^2 = a + b$. Montrer que le nombre $a + b$ est un nombre impair.

Exercice 4 Divisibilité par 11

Théorème (division euclidienne) : Soit a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

Définition : Soit a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$. Si (q, r) est un couple d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$ alors q et r sont appelés respectivement quotient et reste de la division euclidienne de a par b.

Propriété : Si deux entiers a et b sont multiples d'un entier c alors $a + b$ et $a - b$ sont aussi des multiples de c.

a. Montrer que si on retranche 1 de chacun des nombres 100, 10 000, 1 000 000 on obtient un multiple de 11.

b. Montrer que si on ajoute 1 à chacun des nombres 10, 1 000, 100 000, on obtient un multiple de 11.
   (on pourra par exemple remarquer que $1\,001 = 11 + 990$)

c. Démontrer que si on a $A = 1\underbrace{0 \dots \dots 00}_{nbre\ pair\ de\ 0}$ alors $A - 1$ est multiple de 11.

d. Démontrer que si on a $A = 1\underbrace{0 \dots \dots 00}_{nbre\ impair\ de\ 0}$ et donc $A + 1 = 1\underbrace{0 \dots \dots 0}_{nbre\ pair\ de\ 0}1$ alors $A + 1$ est multiple de 11.

e. On considère le nombre $N = 935$. On peut écrire $N = 9 \times 100 + 3 \times 10 + 5 = 9(99 + 1) + 3(11 - 1) + 5$. En caclulant $9 - 3 + 5$, quel diviseur de 935 peut-on ainsi mettre en évidence ?

f. On considère le nombre $N' = 1\ 234$. On peut écrire $N' = 1 \times 1\ 000 + 2 \times 100 + 3 \times 10 + 4$. En s'inspirant des questions précédentes, déterminer (sans poser la division) le reste de la division euclidienne de N' par 11.

g. Énoncer un critère de divisibilité par 11 pour un entier de 5 chiffres $n = \overline{abcde}$ (c'est-à-dire $n = 10\ 000a + 1\ 000b + 100c + 10d + e$) et le démontrer.

Exercice 5

Propriété : Un parallélogramme possède un centre de symétrie qui est le milieu commun de ses diagonales.
Définition : Le symétrique d'un point M par rapport à un point O est le point M' tel que O soit le milieu de [MM'].
Propriété : Une symétrie centrale transforme le segment [AB] en le segment [A'B'] tel que :

- A' et B' sont les symétriques de A et B,
- A'B' = AB
- (A'B') est parallèle à (AB)
- Le milieu de [A'B'] est le symétrique du milieu de [AB].

Soit ABCD un parallélogramme. On note E et F les milieux respectifs des segments [AB] et [DC]. La droite (AC) coupe les droites (DE) et (BF) respectivement en G et H.
Montrer que AG = GH = HC

Exercice 6

Propriété 1 : Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi médiatrice du côté opposé.
Propriété 2 : Si dans un triangle, la hauteur issue d'un sommet est aussi médiatrice du côté opposé, alors ce triangle est isocèle en ce sommet.

Soit ABCD un parallélogramme. On note M et N les milieux respectifs des segments [BC] et [DA] et on note E le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ADM.

a. Déterminer la nature du quadrilatère AMCN.
b. Montrer que CD = CE.

Exercice 7 Angle inscrit, angle au centre

Définition : On dit qu'un angle $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ lorsque A, B et C sont trois points deux à deux distincts du cercle $\mathcal{C}$.
Définition : On dit qu'en angle $\widehat{BOC}$ est un angle au centre dans un cercle $\mathcal{C}$ lorsque O est le centre du cercle $\mathcal{C}$ et les points B et C sont deux points du cercle $\mathcal{C}$.
Dans les deux cas, on dit que l'angle intercepte l'arc BC.

L'objectif de l'exercice est de trouver une relation entre angle au centre et angle inscrit.

1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A, B, C trois points deux à deux distincts de ce cercle. Montrer que $\widehat{CAB} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$ en considérant trois cas.

a. Le segment [AB] est un diamètre de $\mathcal{C}$.
b. Aucun des côtés du triangle ABC n'est un diamètre de $\mathcal{C}$ et le point O est à l'intérieur du triangle ABC.
c. Aucun des côtés du triangle ABC n'est un diamètre de $\mathcal{C}$ et le point O est à l'extérieur du triangle ABC.

Dans les questions b et c, on pourra considérer le point D diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathcal{C}$.

2. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et quatre points A, B, C et D placés dans cet ordre sur ce cercle tels que les triangles AOB et COD soient rectangles en O. On note I le point d'intersection des droites (AC) et (BD).
   a. Montrer que le triangle CBI est rectangle isocèle en I.
   b. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.