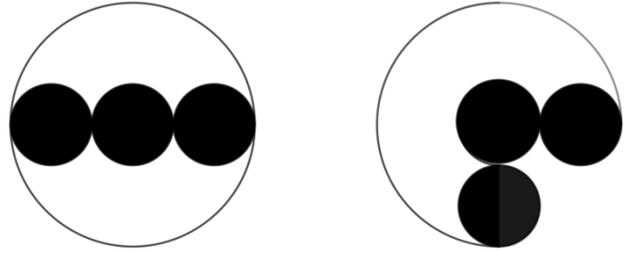


## Aires et volumes

### Exercice 1 Disques troués

Dans un disque de rayon 3, on a découpé trois disques de rayon 1 comme sur la figure, à gauche. Les deux morceaux restants du disque ont été séparés. L'un des deux morceaux a été replacé sur l'autre après une rotation d'un angle droit (à droite sur la figure). Quelle est l'aire de cette nouvelle surface ?

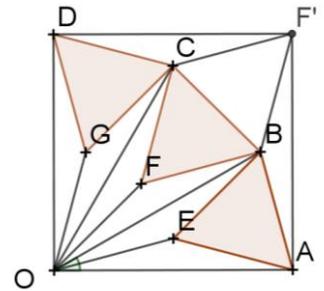


On peut voir dans la figure les trois quarts du disque de rayon 3 diminués de deux demi-disques de rayon 1 et trois quarts d'un disque de rayon 1.

$$\text{Au total : } S = \frac{3}{4}\pi \times 3^2 - 2 \times \frac{1}{2}\pi - \frac{3}{4}\pi = \pi \left( \frac{27}{4} - \frac{7}{4} \right) = 5\pi$$

### Exercice 2 Aire d'un dodécagone régulier

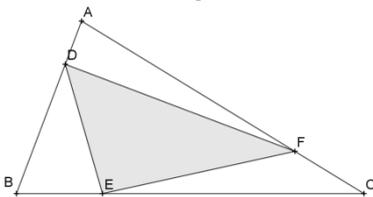
Les triangles OAB, OBC et OCD sont tous isocèles de sommet principal O. Leurs angles au sommet ont tous pour mesure  $30^\circ$ . Les triangles ABE, BFC, OGD et BCF sont tous équilatéraux. Montrer que le quadrilatère OAF'D est un carré. En déduire que l'aire du dodécagone régulier inscrit dans un cercle de rayon  $R$  est  $3R^2$ .



Les triangles OAE, OEB, etc., OGD sont tous isocèles ; leurs angles à la base mesurent  $15^\circ$ . Ils sont tous isométriques. L'angle  $\widehat{ODC}$  mesure  $75^\circ$ . En plaçant le triangle DCF', copie des triangles isocèles précédents, on obtient un angle  $\widehat{ODF'}$  de  $90^\circ$ . On place alors le triangle F'CB puis le triangle F'BA, copie des triangles isocèles précités, pour obtenir le carré ODF'A.

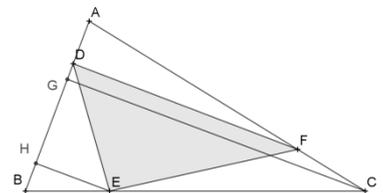
La figure peut être considérée comme le quart d'un dodécagone régulier complétée par un tiers de ce quart. Le dodécagone complet occupe donc l'aire de quatre carrés, chacun amputé d'un tiers. D'où le résultat.

### Exercice 3 Triangle réduit



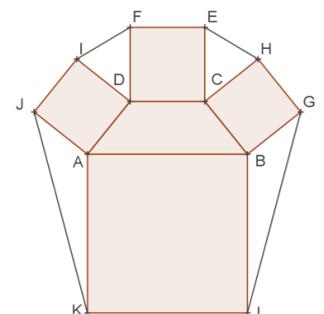
Le triangle ABC a pour aire 48. On place le point D sur le côté [AB], le point E sur le côté [BC] et le point F sur le côté [CA] de sorte que  $\frac{AD}{BD} = \frac{BE}{CE} = \frac{CF}{AF} = \frac{1}{3}$ . Quelle est l'aire du triangle DEF ?

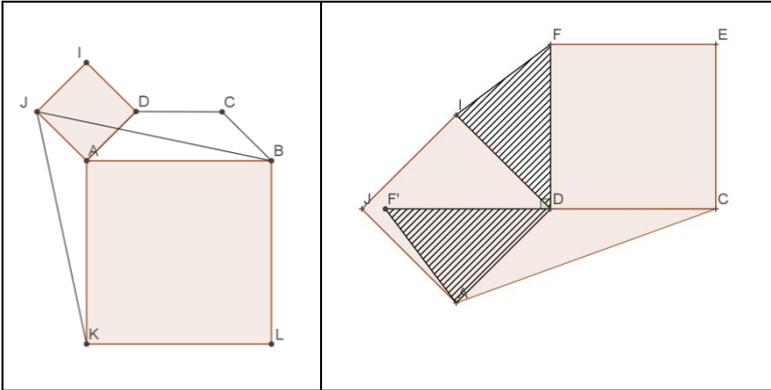
Considérons le triangle EBD. Son aire est le demi-produit de sa hauteur EH par la longueur BD. La hauteur EH est le quart de la hauteur CG du triangle ABC (les triangles BEH et BCG sont en situation de Thalès) et le côté [BD] mesure les trois quarts du côté [BA]. L'aire de EBD représente donc les  $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$  de l'aire de ABC. La considération des triangles FEC et DAF conduirait à des résultats semblables. Les aires cumulées des trois triangles représentent donc  $\frac{9}{16}$  de l'aire de ABC. Il en reste  $\frac{7}{16}$  pour DEF, soit 21.



### Exercice 4 Trapèze et alentours

Le trapèze isocèle ABCD a pour côtés parallèles [AB], de longueur 15 et [CD] de longueur 7, les autres côtés [AD] et [BC] mesurant 5. Sur chacun de ces côtés on construit un carré, et on complète la figure comme ci-contre. Quelle est l'aire du polygone ainsi construit ?





L'aire totale peut être décomposée en :

- l'aire du trapèze (on peut voir que sa hauteur est 3 par application du théorème de Pythagore) ;
- l'aire du carré de côté 15 ;
- l'aire du carré de côté 7 ;
- deux fois l'aire d'un carré de côté 5 ;
- les aires des triangles LBG et AJK, qui sont chacune égale à la moitié de l'aire du trapèze, car les triangles AJK et AKB sont isométriques et les triangles AKB et ADB ont la même aire (J, D et C sont alignés) ;

- de même les triangles CHE et DFI ont pour aire la moitié de l'aire du trapèze (voir figure)

Au total, on a trois fois l'aire du trapèze (3 fois 33) plus deux fois l'aire d'un carré de côté 5 (2 fois 25) plus l'aire d'un carré de côté 7 (49) plus l'aire d'un carré de côté 15 (225) : 423

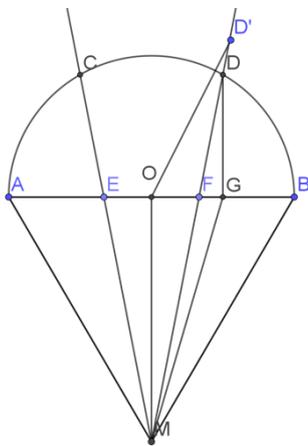
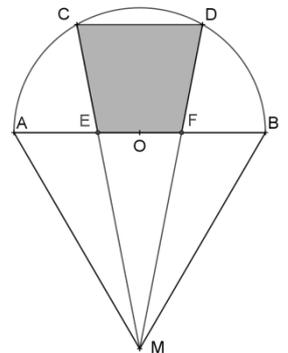
### Exercice 5 Abside

Les points E et F divisant le segment [AB] en trois, on trace les demi-droites passant respectivement par E et F et issues du sommet M du triangle équilatéral ABM. Ces droites coupent le demi-cercle de diamètre [AB] en trois.

1. Les arcs  $\widehat{AC}$ ,  $\widehat{CD}$  et  $\widehat{DB}$  sont-ils de même mesure ?

2. Le segment [AB] mesure 15 unités. Quelle est l'aire du trapèze (est-ce bien un trapèze ?) CDEF ?

*N.B. Cette construction aurait été utilisée par les constructeurs de temples ou d'églises pour découper régulièrement des fonds d'absides. Si on découpe le segment [AB] en cinq, on réalise une très bonne approximation d'un découpage régulier en cinq, etc.*



1. Soit O le milieu de [AB]. Appelons D' le point d'intersection de la parallèle à (MB) avec (MF). Les triangles D'OF et MBF sont en situation de Thalès. Le rapport entre OF et FB est donc égal au rapport entre OD' et BM. On a donc  $OD' = OB$  (le rapport est  $\frac{1}{2}$ ). Par conséquent le point D' appartient au demi-cercle. C'est le point D de la figure. Le triangle ODB est équilatéral et les points A, C, D et B sont quatre sommets consécutifs d'un hexagone.

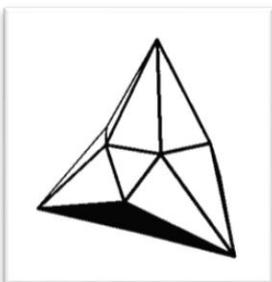
2. Le parallélisme de (CVD) avec (AB) est de ce fait acquis, il ne nous manque que la hauteur du trapèze. C'est la longueur du segment [DG] de la figure, c'est-à-dire la hauteur d'un triangle équilatéral de côté  $\frac{15}{2}$ . L'aire cherchée est donc :

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{15}{2} + 5 \right) \times \frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{375\sqrt{3}}{16}$$

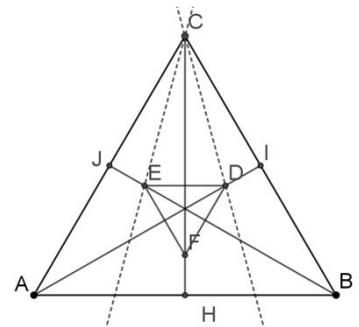
### Exercice 6 Économie de carton

À partir d'un tétraèdre régulier creux (les faces sont en carton), on effectue les constructions suivantes :

1. Sur chacune des faces, on trace un triangle équilatéral dont les côtés ont une longueur égale à deux fois la distance de chacun des sommets à l'arête la plus proche. Montrer que les points d'intersection entre les hauteurs du triangle et les bissectrices des « demi-angles aux sommets » (en pointillés) sont les sommets de ce triangle.



2. On crée un solide avec de nouvelles arêtes [DE], [EF], [FD], [AE], [AF], [BF], [BD], [CD] et [CE] et leurs homologues construites à partir des autres faces. Les arêtes du tétraèdre initial disparaissent en tant qu'arêtes et le solide obtenu est composé de quatre pyramides régulières à base hexagonale posées sur quatre faces hexagonales d'un tétraèdre tronqué. Calculer son volume et le comparer à celui du tétraèdre initial.



1. Les hauteurs (AI) et (BJ) coupent en D et E respectivement les bissectrices des angles  $\widehat{BCH}$  et  $\widehat{ACH}$ . Les points D et E sont équidistants des côtés du triangle et de la hauteur [CH]. Des considérations de symétrie permettent de conclure : le triangle DEF possède les propriétés énoncées.

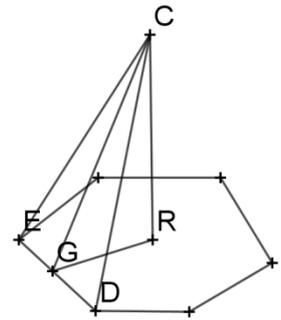
2. Les pyramides ont pour bases des hexagones réguliers de côté le côté du triangle DEF. Si on prend pour unité la longueur du côté du triangle ABC, le triangle rectangle CDI donne :  $DI = \frac{1}{2} \tan 15$  et donc  $DE = \tan 15$ . L'aire de

l'hexagone de base est  $A = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} DE^2$ . Pour calculer la hauteur de ces pyramides, on applique le théorème de Pythagore dans le triangle CGR de la figure ci-contre, où

$CG = \frac{1}{2}$  et  $GR = CD \frac{\sqrt{3}}{2}$ . On applique ensuite la formule donnant le volume d'une pyramide. Il y a 4 telles pyramides.

Le tétraèdre tronqué a pour faces originelles les hexagones de la figure ci-contre dont trois côtés dont deux ne sont pas consécutifs ont été prolongés pour créer des triangles rectangles isocèles, et ce qui lui manque (ce qui a été tronqué) sont quatre tétraèdres réguliers dont les faces sont identiques au triangle DEF.

Il n'y a plus qu'à calculer, mais il est facile de voir que les pyramides qu'on a créées ont un volume plus grand que celles qu'on a tronquées.



## Nombres

### Exercice 1 Chaînes de multiples de 7

Le nombre 7 possède 13 multiples qui s'écrivent dans le système décimal avec deux chiffres. On constitue des « chaînes » de multiples de 7 telles que le chiffre des unités d'un multiple soit le chiffre des dizaines du multiple suivant. Chaque multiple doit y apparaître au plus une fois. Quelles sont les chaînes les plus longues ?

Faisons des essais. Les chaînes possibles sont :

14 – 42 – 21

14 – 42 – 28 – 84 – 49 – 91 (suite a)

14 – 49 – 91

14 – 49 – 98 – 84 – 42 – 28 ou 21 suites c)

21 – 14 et suite a

28 – 84 – 49 – 91 – 14 – 42 – 21 (suite b)

35 – 56 – 63 et ses deux permutations

circulaires

42 et suite a en rejetant 14 à la fin

49 et variante de la suite b sans 21

70

77 – 70

84 et les variantes des suites a ou b

91 et les mêmes variantes

98 et les variantes des suites c

Les plus longues suites ont sept termes.

### Exercice 2 Patriarche antédiluvien

D'après un texte ancien, Mathusalem mourut l'année du Déluge, 1 6xy années (les deux derniers chiffres ne peuvent être lus) après la création d'Adam. Trois autres textes font référence au patriarche, qui aurait vécu plus de 900 ans. Trois autres textes indiquent, l'un que le nombre d'années écoulées jusqu'au Déluge est un multiple de 8, l'autre un multiple de 7, le troisième un multiple de 9. Il est possible qu'un des trois se trompe. Quelles sont les possibilités restantes ?

Le tableau ci-dessous recense les quatre millésimes qui sont à la fois multiple de deux nombres parmi 7, 8 et 9

multiples de 9	1602		1611		1620	1629
multiples de 8		1608		1616		1624
multiples de 7	1603		1610		1617	1631
multiples de 9	1638		1647		1656	1665
multiples de 8	1632	1640		1648	1656	1664
multiples de 7	1638	1645		1652	1659	
multiples de 9		1674	1683		1692	
multiples de 8	1672		1680		1688	1696
multiples de 7	1666	1673	1680	1687		1695

### Exercice 3 Calculs avec des approximations

Rappels :

1. Le nombre  $x$  est une valeur approchée du nombre  $X$  à  $a$  près si  $|X - x| \leq a$  ;

2. Le nombre  $y$  est obtenu par troncature au [millième] à partir du nombre positif  $Y$  si l'écriture décimale de  $y$  coïncide avec celle de  $Y$  jusqu'au [troisième] chiffre à droite de la virgule et ne possède que des 0 (qu'on n'écrit pas) après.

2 bis. Adapter les mots entre crochets dans la définition précédente. Adapter aussi aux troncatures à l'unité, à la dizaine, etc. en tenant compte des 0 que dans ce cas on écrit...

3. La troncature au [millième]  $w$  du nombre positif  $Z$  peut être prise pour arrondi au [millième] de  $Z$  si  $Z - w < 5 \times 10^{-4}$ . Si  $Z - w \geq 5 \times 10^{-4}$ , l'arrondi au [millième] de  $Z$  est  $w + 10^{-3}$ .

3 bis. Adapter les mots entre crochets de la définition précédente.

Ce qui distingue principalement ces notions, c'est que *valeur approchée* porte sur les *distances*, tandis que *troncature* et *arrondi* portent sur des *formats d'écriture*.

Soit  $a$  un entier positif et soit  $m$  un nombre réel strictement positif. On pose  $P = \frac{a}{100} \times m$  et  $\bar{P}$  l'arrondi au centième de  $P$ .

1. Résoudre l'équation  $\bar{P} = 2\,019$  lorsque  $m = 0,321$

2. Résoudre l'équation  $\bar{P} = 2\,020$  lorsque  $m = 0,56$

1. On écrit la liste des produits de 0,00321 par des entiers consécutifs. Le tableau suivant :

	628 970	628 971	628 972	628 973	628 974
$\times 0,00321 =$	2018,9937	2018,99691	2019,00012	2019,00333	2019,00654

Montre que l'équation proposée possède trois solutions : 628 971, 628 972 et 628 973

2. Même façon d'agir. On ne trouve cette fois que deux solutions, 360 715 et 360 716

#### Exercice 4 Archéologie

Un nombre entier  $n$  étant écrit dans le système décimal, on appelle *fragment de  $n$*  tout entier obtenu en supprimant des chiffres par lesquels débute ou finit l'écriture de  $n$ . Par exemple, 19, 9, 201, 20, 2 sont les *fragments de 2 019*.

Quel est le plus petit entier positif  $n$  qui, ajouté à un de ses fragments, donne 2 019 ?

Le nombre cherché s'écrit avec quatre chiffres (la somme d'un nombre de trois chiffres et d'un nombre de deux chiffres, si elle s'écrit avec quatre chiffres, débute par un 1, deux nombres de trois chiffres dont l'un est un fragment de l'autre sont égaux, et leur somme, paire, d'écrit avec trois chiffres ou commence par un 1).

Nous cherchons donc un nombre de quatre chiffres dont le chiffre des milliers est 1.

Ce nombre s'écrit classiquement  $N = 1\,000 + 100a + 10b + c$ . Ses fragments sont, outre lui-même,

$$P = 100 + 10a + b, Q = 10 + a, R = 1, S = 100a + 10b + c, T = 10b + c, U = c.$$

Les sommes possibles sont donc :

1.  $1\,000 + 100(a + 1) + 10(a + b) + b + c$ , qui conduit à  $N = 1\,836$  (pour obtenir un nombre de centaines égal à 10, il est nécessaire que  $a = 9$ , ou  $a = 8$  et  $b = 2$  ou  $b = 3$ ).

#### Exercice 5 Reste 1 000

Quels sont les entiers  $n$  tels que la division euclidienne de  $n^2$  par  $2n + 1$  donne pour reste 1 000 ?

Appelons  $q$  le quotient d'une telle division euclidienne. Celle-ci s'écrit :

$$n^2 = q(2n + 1) + 1\,000 \text{ et } 1\,000 < 2n + 1$$

$$\text{Une transformation d'écriture donne } (n - q)^2 - \left(q - \frac{1}{2}\right)^2 = 1\,000 - \frac{1}{4}$$

$$\text{On passe en entiers et on factorise : } (2n + 1)(2n - 4q - 1) = 3\,999$$

Les seuls diviseurs de 3 999 sont 1, 3, 1 333 et 3 999. Les deux seules solutions sont donc 666 et 1 999.

#### Exercice 6 Millésimes « variés »

Le millésime 2019 est « varié » : les quatre chiffres qui le composent sont tous distincts. 2020 n'est pas « varié ».

Le millésime 2019 est le septième terme d'une suite de millésimes « variés » consécutifs : 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019.

1. Quelle est la prochaine suite de sept millésimes « variés » consécutifs ?

2. Peut-on trouver, entre 1000 et 9999 une suite de **huit** millésimes « variés » consécutifs ?

1. Si les millésimes cherchés commencent par 2 et 0, le troisième chiffre doit être un 3, et de 34 à 39 il n'y a que six entiers. Donc on s'intéresse aux millésimes débutant par 2 et 1 : cette fois, 2 103, 2 104, 2 105, 2 106, 2 107, 2 108 et 2 109 constituent une suite de sept millésimes convenable.

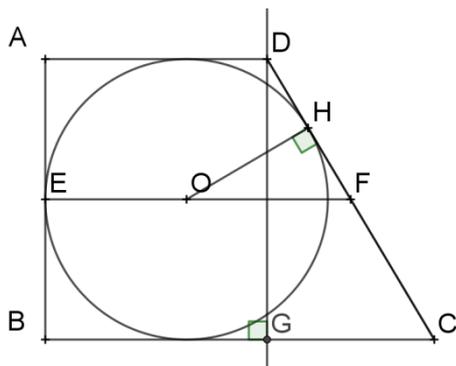
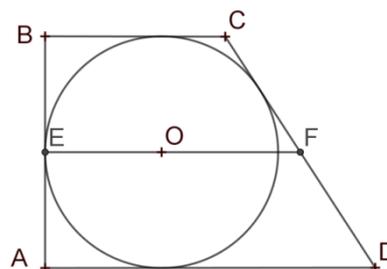
2. Huit millésimes à quatre chiffres utilisent les 10 chiffres (deux pour les milliers et les centaines, huit pour le chiffre final). On ne peut donc à coup sûr pas faire mieux. Comme on ne peut utiliser l'un ou l'autre des deux premiers chiffres comme chiffre des unités et que les chiffres des unités sont consécutifs (au sens large, ce peut être une fin suivie d'un début de la suite 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), cette impossibilité crée un « trou ». Pas de solution, donc ; sept est un maximum.

## Angles et distances

### Exercice 1 Cercle inscrit

Le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle (les angles en A et B sont droits). Le cercle de centre O et de rayon 10 est tangent aux quatre côtés du trapèze. Le côté [CD] a pour longueur 24.

Si E et F sont les milieux respectifs de [AB] et [CD], quelle est la longueur EF ?



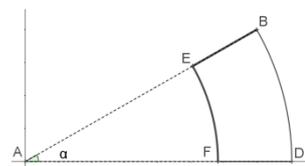
Appelons G le projeté orthogonal de D sur [BC] et H le point de contact entre le cercle de centre O et le segment [CD].

Les triangles CDG et FOH ont leurs angles de mêmes mesures (à cause du parallélisme de (CG) et (OF)). On en déduit :  $\frac{CG}{FH} = \frac{OH}{GD} = \frac{1}{2}$ .

Il s'ensuit que OF = 12 et donc que EF = 22

### Exercice 2 Il suffit de passer le pont

Deux ponts, [EB] et [FD] permettent de traverser un fleuve, dont le cours suit (partiellement) une couronne circulaire, entre deux secteurs d'angle au sommet  $\alpha$ . Pour aller de B à D, peut-il être plus court de passer par E et F ?



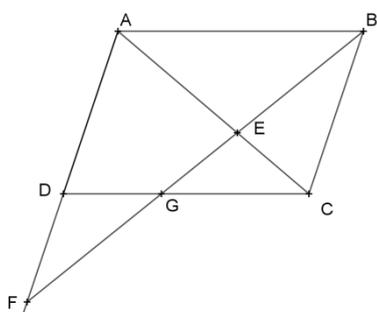
Appelons  $R$  la distance AB et  $r$  la distance AE.

L'arc BD a pour longueur  $\alpha R$  (où  $\alpha$  est mesuré en radians, cela simplifie les expressions littérales).

Le parcours BEFD a pour longueur  $2(R - r) + \alpha r$ .

La question posée se traduit donc par  $2(R - r) + \alpha r \leq \alpha R$

Cette condition s'écrit aussi  $(\alpha - 2)(R - r) \geq 0$ . Il vaut donc mieux faire le détour lorsque  $\alpha$  est supérieur à 2 radians (un peu plus de 114 degrés).



**Exercice 3 Parallélogramme** Une droite passant par B coupe le côté [CD] du parallélogramme ABCD en G, la demi-droite [AD] en F et la diagonale [AC] en E. Montrer que  $\frac{1}{BE} = \frac{1}{BG} + \frac{1}{BF}$

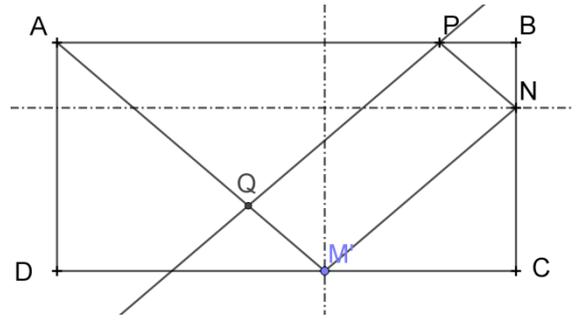
Les triangles EGC et EBA sont en situation de Thalès :  $\frac{EG}{BE} = \frac{CG}{AB}$ .

Les triangles ABF et CGB ont des angles de même mesure, donc des côtés proportionnels :  $\frac{CG}{AB} = \frac{BG}{BF}$ .

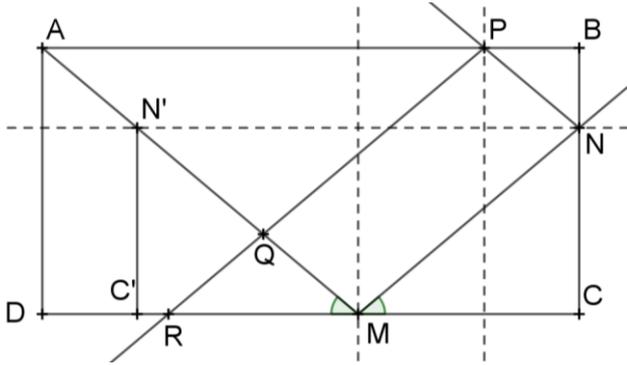
De ces deux égalités découle :  $\frac{EG}{EB} = \frac{BG}{BF}$ , ou encore  $\frac{BG - BE}{BE} = \frac{BG}{BF}$ . On continue :  $\frac{BF}{BE} - \frac{BF}{BG} = 1$  puis  $\frac{1}{BE} = \frac{1}{BG} + \frac{1}{BF}$ .

**Exercice 4 Billard**

Sur un billard rectangulaire ABCD (de longueur AB = 4 et de largeur BC = 2), une boule (assimilée à un point) part de A, rebondit successivement en M, N et P sur les côtés [CD], [BC] et [BA] et sa trajectoire coupe le segment [AM] en Q. Le rebond en M, par exemple, s'effectue en suivant la direction symétrique de la direction d'arrivée par rapport à la perpendiculaire en M au côté [CD].



1. Pour quelles positions de M parvient-on à un quadrilatère MNPQ ?
2. Quelle est l'aire de ce quadrilatère ?
3. Ce quadrilatère peut-il être un losange ?



1. Les triangles ADM et NCM étant semblables, car les triangles ADM et N'C'M (obtenu par symétrie à partir de NCM) sont en situation de Thalès. Il s'ensuit que le rapport  $\frac{CN}{CB}$  n'est inférieur à 1 (N est entre C et B) que si le rapport  $\frac{CM}{DM}$  l'est, autrement dit si M est plus près de C que de D. Si on exclut le cas où M serait en C, cette condition est suffisante pour qu'on puisse parler du quadrilatère MNPQ, attendu que les droites (AM) et (CP) sont parallèles et que les droites (PQ) et (MN) le sont aussi.

2. Si on appelle  $x$  la distance DM, on peut exprimer d'autres longueurs en fonction de  $x$ . On trouve ainsi :

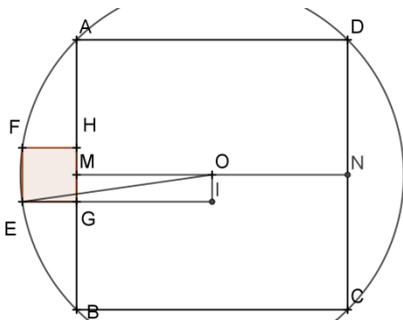
$$CM = 4 - x, CN = \frac{2(4 - x)}{x}, BN = \frac{3x - 8}{x}, BP = \frac{3x - 8}{2}$$

La diagonale [PM] coupant le parallélogramme MNPQ en deux triangles de même aire, il nous suffit de déterminer l'aire du triangle PMN, qui est obtenue en ôtant de l'aire du trapèze MCBP les aires des triangles MCN et NPB.

L'aire de MCN est  $\frac{(4-x)^2}{2}$ , l'aire de NPB est  $\frac{(3x-8)^2}{4x}$  et l'aire du trapèze  $2x$ .

3. Pour que le quadrilatère soit un losange, il faut que deux de ses côtés consécutifs soient de même longueur. Ce n'est le cas que si N est le milieu de [CB]. Ce qui conduit à  $x = 2(4 - x)$  et donc à  $x = \frac{8}{3}$ .

**Exercice 5 Grand carré et petit carré**



Au carré ABCD, de côté 4, on adjoint le carré EFGH, dont les sommets E et F appartiennent au cercle circonscrit à ABCD et les sommets G et H au côté [AB].

Combien mesure le côté du petit carré ?

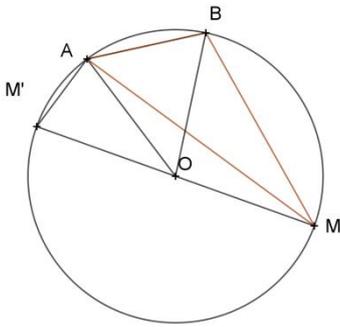
Pour des raisons de symétrie, le milieu M de [AB] est aussi celui de [GH]. Appelons  $x$  la distance MG et considérons le triangle rectangle OIE dont les cathètes sont parallèles aux côtés du carré. Appliquons le théorème de Pythagore à ce triangle :  $OE^2 = OI^2 + IE^2$ .

Comme  $OE = 2\sqrt{2}$ ,  $OI = x$  et  $IE = 2 + 2x$ , on trouve que  $x = \frac{2}{5}$ . La réponse est donc  $4/5$ .

On sera amené à vérifier que pour tout  $x$  :  $5x^2 + 8x - 4 = (5x - 2)(x + 2)$

**Exercice 6 Le théorème de l'angle inscrit (rappel)**

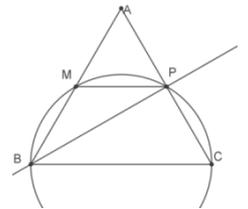
Si deux points A et B appartiennent à un cercle de centre O, alors pour tout point M de ce cercle tel que l'angle  $\widehat{AMB}$  soit aigu, la mesure de l'angle  $\widehat{AMB}$  est la moitié de la mesure de l'angle  $\widehat{AOB}$



On commence par prouver que, si  $M'$  est le point diamétralement opposé à M, le résultat annoncé est vrai pour l'angle  $\widehat{AMM'}$ . Il suffit pour cela de considérer le triangle rectangle  $MM'A$  partagé en deux triangles isocèles  $OAM$  et  $AOM'$ . Le résultat pour l'angle  $\widehat{AMB}$  est ensuite obtenu par différence. Si le point O est intérieur au triangle  $AMB$  on procède par sommation de deux angles pour lesquels le théorème est vrai.

**Exercice 6 bis Angle inconnu**

Le triangle  $ABC$  est isocèle de sommet principal A. La bissectrice de l'angle en B coupe le côté  $[AC]$  en P. Le cercle circonscrit au triangle  $BPC$  coupe le côté  $[AB]$  en son milieu M. Quelle est la mesure de l'angle en B ?

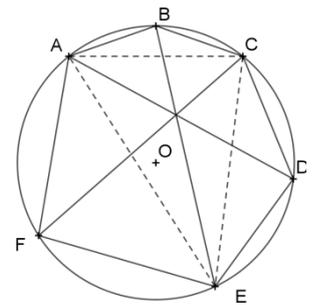


Le théorème de l'angle inscrit permet d'affirmer que l'arc PC et l'arc MP sont de même mesure, et que cette mesure est la moitié de celle de l'arc PB. Il s'ensuit notamment que les segments  $[MB]$ ,  $[MA]$  et  $[MP]$  ont la même longueur, et donc que le triangle  $APB$  est rectangle en P. Ses angles non droits ont des mesures double l'une de l'autre, ce sont donc  $60^\circ$  et  $30^\circ$ .

**Exercice 7 Un hexagone pas très régulier**

L'hexagone  $ABCDEF$  est inscrit dans un cercle de centre O. Il est tel que les égalités  $AB = BC$ ,  $CD = DE$ ,  $EF = FA$ . Prouver que les droites

Ces droites sont les bissectrices intérieures du triangle  $ACE$ .



## Équations

### Exercice 1 Partie entière (sans calculatrice)

Pour tout réel positif  $x$ , il existe un entier  $n$  tel que  $n \leq x < n + 1$ . L'entier  $n$  est appelé *partie entière de  $x$* . On note :  $n = [x]$  ou  $n = E(x)$ .

Quelle est la *partie entière* du nombre  $x = \sqrt{10 - \sqrt{10 - \sqrt{10 - \sqrt{10 - \sqrt{10 - \sqrt{10}}}}}}$  ?

On vérifie que  $2 \leq \sqrt{10 - \sqrt{10}} \leq 3$ , puis que, si  $2 \leq x \leq 3$ , alors  $2 \leq \sqrt{10 - x} \leq 3$ . Cet encadrement se transporte vers la gauche lorsqu'on effectue le calcul. Le résultat est donc 2.

### Exercice 2 Inégalités

Les nombres  $x, y$  et  $z$  satisfont les inégalités suivantes : 
$$\begin{cases} x + y + 3z \geq 13 \\ x + 2y \geq 4 \\ x \geq 1 \end{cases} .$$

Quelle est la valeur minimale de  $x + y + z$  ?

On met en œuvre certaines des propriétés des inégalités, qui reposent sur la définition :  $a \geq b$  signifie que  $a - b \geq 0$ . Par exemple, si  $a \geq c$  et  $b \geq d$  alors  $a + b \geq c + d$ .

On peut donc « ajouter » des inégalités ce qui, dans le cas qui nous occupe, conduit à  $3(x + y + z) \geq 18$  et donc (autre propriété des inégalités)  $x + y + z \geq 6$ . Nous avons établi une condition nécessaire, mais elle ne prouve pas qu'on est en présence d'un minimum.

### Exercice 3 Répétition

Une suite de 2019 nombres possède les propriétés suivantes :

1. Tous les groupes de quatre termes consécutifs ont la même somme ;
2. Les différences de deux termes consécutifs ont toutes la même valeur absolue.

On sait d'autre part que les trois premiers termes,  $a, b$  et  $c$  sont tels que  $a < b < c$  et  $b = 6$ .

Quelle est la somme de tous les termes de cette suite ?

La première propriété indique que les groupes de quatre termes consécutifs, à partir du premier, sont tous les mêmes : si  $a, b, c, d$  sont les quatre premiers termes et  $e$  le cinquième, alors  $a + b + c + d = b + c + d + e$ , donc  $a = e$  et ainsi de suite.

Posons  $b = a + x$ , où  $x > 0$ . Il vient  $c = a + 2x$ , puis  $d = a + 3x$  ou  $d = a + x$ . La première hypothèse conduit à  $e = a + 4x$  ou  $a = a + 2x$ , l'une et l'autre en contradiction avec  $e = a$ . Les quatre premiers termes de la suite sont donc  $6 - x, 6, 6 + x, 6$ . Leur somme est 24.

Dans la suite des 2 019 termes, il y a 504 groupes de quatre et un dernier groupe de trois. La somme de ces 2019 termes est donc  $504 \times 24 + 18 = 12\,114$ .

### Exercice 4 Petit foot entre amies

Aïssatou, Eugénie et Wendie enchaînent des petits matchs : à chaque fois, l'une d'entre elles est gardienne de but, les deux autres joueuses de champ. Quand un but est marqué, la gardienne échange sa place avec celle qui a marqué. Aïssatou a été 12 fois joueuse de champ, Eugénie 21 fois et Wendie a gardé 8 fois le but. Qui gardait le but lors du premier match ?

Appelons  $A, E$  et  $W$ , respectivement, le nombre de fois où Aïssatou, Eugénie et Wendie étaient joueuses de champ,  $a, e$  et  $w$ , respectivement, le nombre de fois où elles jouaient gardienne, et  $x$  le nombre total de parties jouées. L'énoncé indique que :  $12 = x - a$ ,  $21 = x - e$ ,  $w = 8$ ,  $A = 12$ ,  $E = 21$ ,  $W = x - 8$ . Par ailleurs, à chaque nouveau match, le nombre de fois que des joueuses ont été joueuses de champ augmente de 2 tandis que le nombre de fois qu'elles ont été gardiennes augmente de 1, ce qui fait que  $A + E + W = 2(a + e + w)$ . Cette égalité conduit à  $x = 25$ . Aïssatou a été 12 fois joueuse de champ et 13 fois gardienne : comme ces postes alternent, c'est elle qui était gardienne lors du premier match.

### Exercice 5 Classement

Les nombres  $a, b, c$  et  $d$  sont des entiers supérieurs à 2. On pose  $A = \frac{a+b}{c+d}, B = \frac{a \times b}{c+d}, C = \frac{a+b}{c \times d}, D = \frac{a \times b}{c \times d}$ . Quel est le plus grand de ces quatre nombres ?

Là encore, il s'agit de faire fonctionner la définition et les propriétés des inégalités. On compare d'abord les rationnels écrits avec le même dénominateur, et on montre que, comme  $a \times b - a - b = (a - 1)(b - 1) - 1$  et que les entiers considérés sont supérieurs à 2,  $a \times b \geq a + b$  (il en va de même avec  $c$  et  $d$ )  $\frac{a \times b}{c+d} \geq \frac{a+b}{c+d}$  et  $\frac{a \times b}{c \times d} \geq \frac{a+b}{c \times d}$ . Reste à comparer  $\frac{a \times b}{c \times d}$  et  $\frac{a \times b}{c+d}$ . Le plus grand des deux est le second, qui est donc le plus grand de tous.

### Exercice 6 Équations en morceaux

Pour tout nombre réel positif  $a$ , on note  $\lfloor a \rfloor$  le plus grand entier inférieur ou égal à  $a$  (on l'appelle la *partie entière* de  $a$  ; elle peut être aussi notée  $[a]$  ou  $E(a)$ ). On note  $\{a\}$  la *mantisse* de  $a$ , c'est-à-dire la différence entre  $a$  et sa partie entière :  $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ .

Les nombres  $x, y, z$  vérifient :

$$\begin{cases} 3\lfloor x \rfloor - \{y\} + \{z\} = 20,3 \\ 3\lfloor y \rfloor + 5\lfloor z \rfloor - \{x\} = 15,1 \\ \{y\} + \{z\} = 0,9 \end{cases}$$

Que sont  $x, y$  et  $z$  ?

On additionne membre à membre la première et la troisième inégalité, pour obtenir  $3\lfloor x \rfloor + 2\{z\} = 21,2$ . Le premier terme du membre de gauche est un entier, le second est positif et inférieur à 2. Il s'ensuit que  $\lfloor x \rfloor = 7$  et  $\{z\} = 0,1$ . D'où on tire  $\{y\} = 0,8$ . La deuxième égalité conduit à  $3\lfloor y \rfloor + 5\lfloor z \rfloor = 16$  et  $\{x\} = 0,9$ . Finalement :  $x = 7,9, y = 2,8$  et  $z = 2,1$

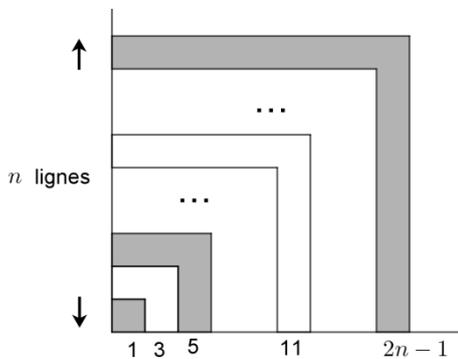
## Dénombrement et algorithmes

### Exercice 1 Zéro délai mais pas zéro papier

Un imprimeur veut lancer une série d'impressions de documents sur 2 imprimantes. Tout document doit être imprimé entièrement sur une même imprimante. Les imprimantes vont à la même vitesse et enchaînent les documents sans délai entre eux. Donner une répartition des impressions sur les 2 imprimantes de façon à terminer le tout en un minimum de temps, s'il veut imprimer les documents suivants :

1. Il y a 4 documents comportant respectivement 1, 3, 5 et 7 pages ;
2. Il y a 5 documents comportant respectivement 1, 3, 5, 7 et 9 pages ;
3. Il y a 6 documents comportant 1, 3, 5, 7, 9 et 11 pages ;
4. Il y a 50 documents dont les nombres de pages sont tous les entiers impairs compris entre 1 et 99 ;
5. Il y a  $n$  documents dont les nombres de pages sont les entiers impairs compris entre 1 et  $2n - 1$ .

1. Comme  $1 + 7 = 3 + 5$ , c'est la répartition (1,7), (3, 5) qui est la moins coûteuse.
2. Il y a 25 pages à imprimer.  $5 + 7 = 9 + 3 = 12$ . Le document d'une page peut être confié à l'une ou l'autre machine.
3. Les documents comportent un total de 36 pages.  $11 + 7 = 1 + 3 + 5 + 9 = 18$  donne une répartition acceptable.



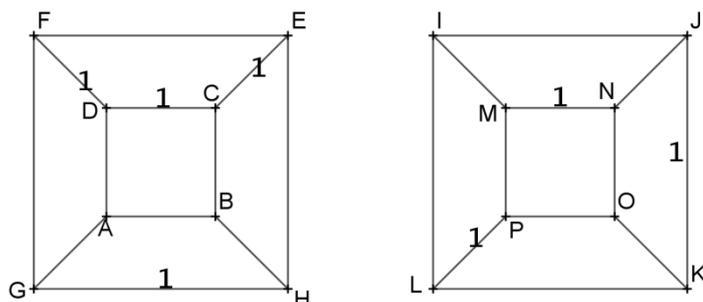
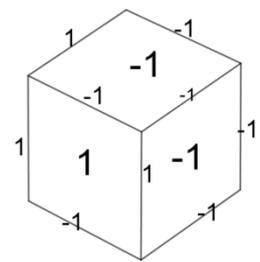
On peut représenter la suite des nombres impairs comme des gnomons emboîtés, ce qui donne l'idée (juste) que la somme des entiers impairs de 1 à  $2n - 1$  est  $n^2$ .

4. La somme des 50 premiers nombres impairs vaut 2 500. Chaque machine doit réaliser 1 250 impressions. La somme des impairs jusqu'à 71 vaut  $36^2$ , c'est-à-dire 1 296. La somme des impairs de 73 à 99 vaut donc  $2 500 - 1 296 = 1 204$ . Pour équilibrer, on confie à la première machine les documents dont les nombres de pages sont les impairs de 3 à 71 sauf 45, et à la seconde les autres.

4. Comme dit plus haut, le nombre de pages à imprimer est dans ce cas  $n^2$ . Si  $n$  est impair, un partage équitable n'est pas possible. En procédant comme ci-dessus, on sépare les documents en deux de sorte à confier le plus petit carré supérieur à  $n^2/2$  (cas où  $n$  est pair) ou à  $(n - 1)/2$  cas où  $n$  est impair et on ajuste.

### Exercice 2 Produit d'arêtes

Sur chaque arête d'un cube, on écrit le nombre 1 ou le nombre -1. Sur chaque face, on écrit le produit des nombres figurant sur les quatre arêtes de la face. On fait ensuite le total de ces 18 nombres (12 arêtes et 6 faces). Quelle est la plus petite valeur possible de cette somme ?



gauche, condamnent les faces ABCD, AGFD et ECBH. On peut encore marquer « 1 » l'arête commune aux faces EFGH et ABHG. Le total obtenu est  $6 \times -1 - 8 + 4 = -10$ . La figure de droite présente un cas où seules trois

Chaque fois qu'une face est marquée « 1 », cela signifie qu'au moins deux arêtes sont marquées « 1 » (deux arêtes de cette face au moins). On peut donc commencer par essayer de voir les totaux possibles lorsque les six faces sont marquées « -1 ». On s'aide des diagrammes ci-contre, qui représentent le cube « ouvert ». Une face est marquée « -1 » lorsque une ou trois de ses arêtes sont marquées 1. Le schéma de gauche envisage les premier cas, le schéma de droite le second. Les trois arêtes marquées, à

arêtes sont marquées « 1 ». Le total est  $6 \times -1 - 9 + 3 = -12$ . Changer un « 1 » en « -1 » conduit à changer les marques de deux faces. On y perd.

### Exercice 3 Fair play

Les étudiants participant à la finale d'une compétition de mathématiques ont été répartis, un par table, sur  $m$  lignes et  $n$  colonnes. Ils sont polis et respectueux les uns des autres et, avant le début de l'épreuve, chacun serre les mains de ses voisins (un à gauche, un à droite, un devant, un derrière, un devant à droite, un devant à gauche, un derrière à droite, un derrière à gauche au maximum). Au total 1 020 poignées de mains sont échangées.

Combien d'étudiants participaient à ce concours ?

Les 4 étudiants situés dans les coins ont trois voisins, ceux qui sont situés sur les bords, hors les coins, en ont 5. Il y a  $2 \times (m - 2)$  et  $2 \times (n - 2)$  tels candidats. Tous les autres ont 8 voisins. Le nombre de poignées de mains est donc :

$$N = 8 \times (m - 2)(n - 2) + 5 \times (2m + 2n - 8) + 12 = 8mn - 6m - 6n + 4$$

Le nombre de voisins est le double du nombre de poignées de mains. L'équation à résoudre est donc :

$$4mn - 3m - 3n + 2 = 1\,020$$

Cette équation s'écrit :

$$\left(2m - \frac{3}{2}\right)\left(2n - \frac{3}{2}\right) = \frac{4\,081}{4}, \text{ ou encore } (4m - 3)(4n - 3) = 4\,081$$

Comme  $4\,081 = 7 \times 11 \times 53$ , ses diviseurs dont le reste dans la division euclidienne par 4 est 1 sont 77 et 53, ce qui conduit à  $m = 20$  et  $n = 14$ . Il y a 280 étudiants.

### Exercice 4 Déménageurs

La piscine à balles du jardin d'enfants contient 110 balles jaunes, 120 balles rouges et 140 bleues. Combien les gamins facétieux (et sachant un peu compter...) doivent-ils en jeter par-dessus bord *au minimum* pour être sûrs que dans ce qu'ils ont éliminé se trouvent au moins 113 balles de la même couleur ?

On jette les 110 balles jaunes, puis 112 balles rouges et 112 bleues. La suivante est nécessairement rouge ou bleue. Cela fait donc 335 balles à jeter. Si on en jette une de moins, le décompte précédent prouve qu'on n'est pas sûr d'atteindre l'objectif.

### Exercice 5 Tireuse de cartes

On place sur une table quatre cartes à jouer et on note l'ordre des couleurs apparues, par exemple « Cœur, Carreau, Pique, Cœur ». Combien de telles séries sont-elles possibles si on écarte les séries comportant exactement deux fois la même couleur ?

À chaque tirage, quatre résultats sont possibles. Il y a donc 256 séries possibles au total. Pour constituer une série faisant apparaître exactement deux fois la même couleur, on choisit deux positions parmi les quatre, occupées par des cartes de même couleur, et on occupe les deux dernières positions avec des cartes qui n'ont pas la couleur initialement choisie et de couleurs différentes entre elles.

Il y a 6 façons de choisir deux places parmi 4 (positions 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 2 et 3, 2 et 4, 3 et 4), 3 façons de choisir une couleur pour occuper la première place vide et 2 façons d'occuper la dernière. Au total 36 possibilités, mais il y avait 4 façons de choisir la couleur doublée, donc les séries comportant une couleur et une seule doublée et pas triplée sont 144. Il reste 112 façons de répondre aux exigences de l'énoncé.

### Exercice 6 L'addition, s'il vous plaît !

Cinq amis ont déjeuné ensemble. L'addition s'élève à 180 euros. Trois d'entre eux ont réglé la facture, à charge pour les autres de les rembourser (chacun paiera la même somme, on n'est pas dans un sketch).

Argan donne 90 euros, Béline donne 57 euros et Cléante 33 euros.

À combien de transactions *au minimum* procèdera-t-on pour que Diafoirus et Fleurant paient leur écot ?

Argan doit recevoir 54 euros, Béline 21 euros, Cléante doit donner 3 euros, Diafoirus et Fleurant chacun 36 euros. Une solution en 4 transactions : Cléante donne 3 euros à Béline, Diafoirus donne 36 euros à Argan, Fleurant donne 18 euros à Argan et 18 euros à Béline. Peut-on faire moins ? Comme il y a 3 débiteurs et qu'un des créditeurs doit recevoir plus que le maximum dû par un seul débiteur, non.