MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

Stage « résolution de problème » proposé à des collégiens talentueux et motivés désignés par leurs établissements, les 20 et 21 octobre 2014

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le centre INRIA de Paris-Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves, sur lesquels les établissements veillent.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Anne ALLARD, Marie-Françoise BOURDEAU, Joëlle DEAT, Yann ÉGLY, Catherine GUFFLET, Anne MENANT, Pierre MICHALAK (IPR honoraire), Évelyne ROUDNEFF, Joffrey ZOLNET

Les responsables des établissements d'accueil : Jean-Luc VAYSSIÈRE (Président de l'Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines), Florence GOEHRS (Responsable administrative de l'UVSQ, campus des sciences), Jean-Paul JOUAN (Proviseur du lycée Camille Pissarro), Didier TACHEAU (Principal du collège Paul Fort)

Les professeurs : Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Isabelle BOIS (Collège Michel Vignaud, MORANGIS), Jérôme CERISIER (Lycée Mansart, SAINT CYR L'ÉCOLE), Antoine CROUZET (Lycée La Folie Saint James, NEUILY SUR SEINE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Odile DELASSUS (Lycée Alfred Kastler, CERGY), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Laurence GIGAN (Collège Les Nénuphars, BRÉVAL), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Philippe JULIEN (Lycée International, SAINT GERMAIN EN LAYE), Konrad RENARD (Lycée Arthur Rimbaud, GARGES LES GONESSE), Alexandra VIALE (Lycée de l'Essouriau, LES ULIS), Christine WEILL (Lycée Hoche, VERSAILLES), Martine ZNATY (Collège Les Hauts Grillets, SAINT GERMAIN EN LAYE)

Et les professeurs qui accompagnent leurs élèves

Programme du stage des 20 et 21 octobre 2014

Lundi 20 octobre						
	Montlhéry	**Pontoise 1**	**Pontoise 2**	**Versailles 1**	**Versailles 2**	**Versailles 3**
1O	**Aires et volumes** Nicolas Fixot	**Aires et volumes** Catherine Houard	**Équations** Bruno Baudin	**Aires et volumes** Philippe Julien Chr. Deguil	**Équations** Alexandra Viale	**Combinatoire Probabilités** Martine Znaty
11.45	Repas ou film	Repas ou film	Repas ou film	Repas ou film	Repas ou film	Repas ou film
12. 30	Film ou repas	Film ou repas	Film ou repas	Film ou repas	Film ou repas	Film ou repas
13. 15 à 14.45	**Équations** Nicolas Fixot Christine Weill	**Équations** Bruno Baudin	**Cryptographie** Odile Delassus	**Combinatoire Probabilités** Martine Znaty	**Aires et volumes** Philippe Julien Chr. Deguil	**Équations** Alexandra Viale
15 à 16.30	**Cryptographie** Christine Weill	**Cryptographie** Odile Delassus	**Aires et volumes** Catherine Houard	**Équations** Alexandra Viale	**Combinatoire Probabilités** Martine Znaty	**Aires et volumes** Philippe Julien Chr. Deguil

Mardi 21 octobre						
	Montlhéry	**Pontoise 1**	**Pontoise 2**	**Versailles 1**	**Versailles 2**	**Versailles 3**
1O	**Géométrie du triangle** Isabelle Bois	**Géométrie du triangle** Anne Menant	**Nombres** Konrad Renard	**Géométrie du triangle** L. Gigan	**Cryptographie** Antoine Crouzet	**Nombres** J. Cerisier
12	Repas	Repas	Repas	Repas	Repas	Repas
12.45 à 14.30	**Nombres** Isabelle Bois Catherine Gufflet	**Combinatoire Probabilités** Odile Delassus	**Géométrie du triangle** Anne Menant	**Nombres** J. Cerisier	**Géométrie du triangle** L. Gigan	**Cryptographie** Antoine Crouzet
14.45 à 16.30	**Combinatoire Probabilités** Catherine Gufflet	**Nombres** Konrad Renard	**Combinatoire Probabilités** Odile Delassus	**Cryptographie** Antoine Crouzet	**Nombres** J. Cerisier	**Géométrie du triangle** L. Gigan

Thème : La géométrie du triangle

1. Médianes d'un triangle

a. Soit ABC un triangle, A' le milieu du segment [BC] et M un point intérieur au triangle ABC.

Démontrer la propriété suivante : M est un point de la médiane (AA') du triangle ABC si et seulement si les triangles MBA et MCA ont même aire.

(Indications : pour démontrer la réciproque, on pourra comparer les distances des points B et C à la droite (AM) puis les aires des triangles MBD et MCD, où D est le point d'intersection des droites (MA) et (BC).)

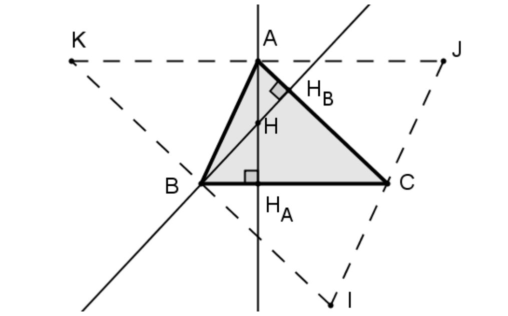
a. Démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

Définition : Le point d'intersection des trois médianes d'un triangle est appelé **centre de gravité** de ce triangle**.**

(Indication : Comparer les aires des triangles GAC et GBC.)

b. Démontrer que le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.

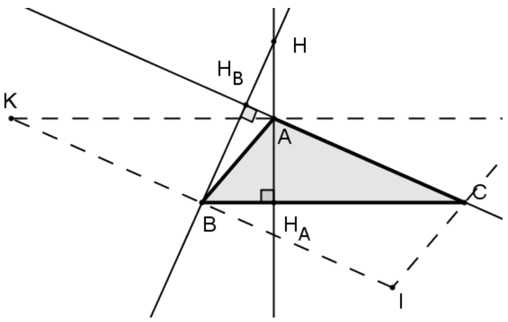
(Indication : Soit A' et B' les milieux respectifs des côtés [BC] et [AC] d'un triangle ABC et G le centre de gravité de ce triangle. On appelle K le milieu du segment [AG]. Comparer les aires des triangles GBK et GBA' puis les longueurs AK, KG et GK. Conclure.)



1. Hauteurs d'un triangle

Démontrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

(Indications : Soit H_A et H_B les pieds des hauteurs issues respectiv
de A et B dans le triangle ABC.
On mène par A, B et C les parallèles à (BC), (AC) et
(respectivement. Ces droites déterminent un triangle IJK.
Que peut-on dire des quadrilatères BCAK et BCJA
Que représente la droite (AH_A) pour le segment [KJ] ?
Que représente le point H pour le triangle IJK ?)



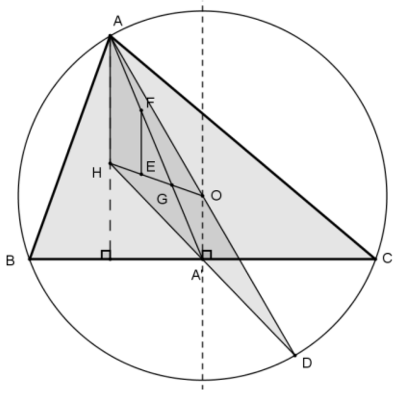
2. Droite d'Euler

Soit ABC un triangle non équilatéral. On appelle respectivement O, G, H le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre de ce triangle.

Démontrer que les points O, G et H sont alignés et que OH = 3OG.

Définition : La droite qui contient les points O, G et H est appelée droite d'Euler du triangle ABC.

(Indications : on appelle A' le milieu du segment [BC] et D le symétrique de A dans la symétrie de centre O.



(a) Que représente le point G pour le triangle AHD ? En déduire que les points O, G et H sont alignés.

(b) Soit F le milieu du segment [AO]. La parallèle à (AH) passant par F coupe (HO) en E.

Démontrer que : AH = 2OA' = 2EF. En déduire que EG = GO. Conclure.)

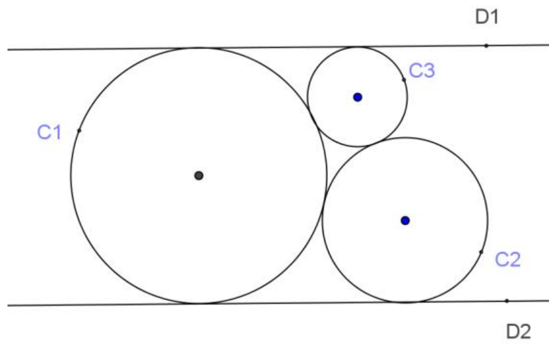
3. Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales se coupent en un point P sans être perpendiculaires.

On note H l'orthocentre du triangle ABP, I celui du triangle BCP, J celui du triangle CDP et K celui du triangle DAP.

a. Déterminer la nature du quadrilatère lorsque les points H, J et P sont alignés.

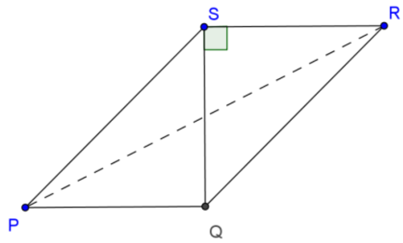
b. Déterminer la nature du quadrilatère lorsque les points H, J et P sont alignés ainsi que les points I, K et P.
c. Déterminer la nature du quadrilatère HIJK lorsque le quadrilatère ABCD est un rectangle.

4. On considère deux droites parallèles D_1 et D_2 ainsi que trois cercles C_1, C_2 et C_3 tels que :
C_1 est tangent aux deux droites, C_2 est tangent à la droite D_2, C_3 est tangent à la droite D_1 ;
les trois cercles sont tangents extérieurement deux à deux ;
On suppose de plus que le cercle C_2 a pour rayon 9 et que le cercle C_3 a pour rayon 4.
Déterminer le rayon du cercle C_1.

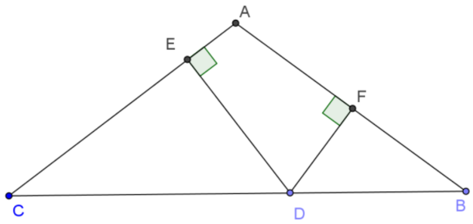


Thème : Aires et volumes

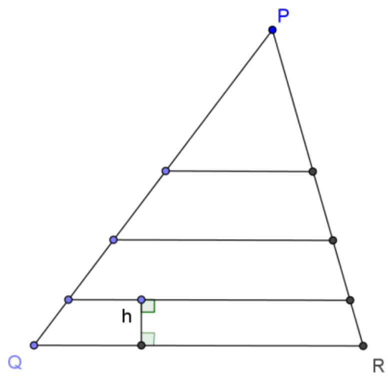
1. On a découpé un carré le long d'une diagonale et on a placé les morceaux de manière à former le parallélogramme PQRS de la figure ci-contre.
Sachant que PR = 9, déterminer l'aire du carré initial.



2. Soit ABC un triangle tel que BC = 40, AB = AC = 25 et soit D un point de [BC]. Les points E et F sont les pieds des droites respectivement perpendiculaires à (AB) et (AC) et passant par D.
Calculer la somme DE + DF.



3. On considère un triangle PQR tel que :
PQ = 150 et PR = QR = 125.
On trace trois droites parallèles à la droite (QR) de manière à diviser le triangle PQR en quatre sections de mê aire, comme sur la figure ci-contre.
On note h la hauteur du trapèze « du bas ».
Déterminer de quel nombre la hauteur h est la plus proche :
16,9 16,7 16,5 16,3 16,1

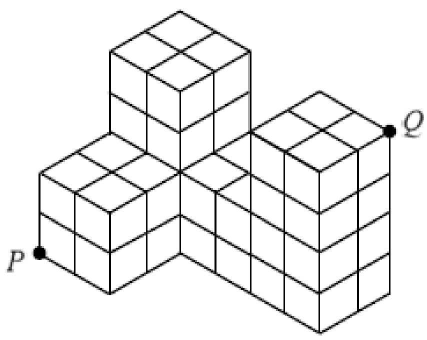


4. On considère un triangle PQS et un point R du segment [QS] qui vérifient :

$$\text{QR} = 8,\ \text{PR} = 12,\ \text{PRQ} = 120° \text{ et } RPS = 90° .$$

Déterminer l'aire du triangle PQS.

5. Le solide ci-contre est constitué de 48 cubes identiques ayant des arêtes toutes de longueur $\sqrt{n}$. Des faces entières des cubes sont collées les unes aux autres.
Déterminer la plus petite valeur de *n* pour laquelle la distance de P à Q est un entier.
Définition : Soit n un nombre positif, $\sqrt{n}$ est le nombre positif dont le carré est égal à *n*.



6. Une élève a deux contenants ouverts, de forme cylindrique. (Les parois des contenants sont minces et leur épaisseur est négligeable.) Le plus grand des contenants a une hauteur de 20 cm, un rayon de 6 cm et il contient de l'eau jusqu'à une profondeur de 17 cm. Le plus petit a une hauteur de 18 cm, un rayon de 5 cm et il est vide. Comme l'illustre la Figure 1, l'élève fait descendre le petit contenant dans le plus grand.
Comme on peut le constater dans la Figure 2, lorsque le petit contenant descend dans le grand, l'eau se met à déborder vers l'extérieur, mais lorsque le petit contenant est baisse plus bas, l'eau se met à déborder dans le petit contenant.
Déterminer la profondeur de l'eau dans le petit contenant lorsque le petit contenant reposera au fond du grand.

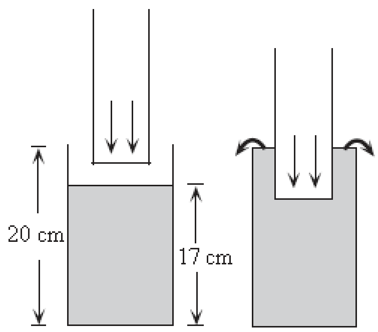


Figure 1 Figure 2

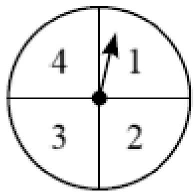
Thème : Combinatoire et probabilités

1. Combien y aura-t-il de termes différents dans le développement de l'expression $(a+b+c+d+e+f+g+h+i)^2$?

2. On considère un nombre entier naturel de cinq chiffres distincts pris parmi 1, 3, 5, 7 et 9 de telle manière que :
- Le chiffre des milliers est plus grand que le chiffre des centaines ;
- Le chiffre des milliers est plus grand que le chiffre des dix milliers
- Le chiffre des dizaines est plus grand que le chiffre des centaines ;
- Le chiffre des dizaines est plus grand que le chiffre des unités.

Déterminer tous les entiers répondant à ces critères.

3. On suppose que lorsqu'on faite tourner la flèche ci-contre, elle peut s'arrêter sur n'importe quel numéro avec la même probabilité. Diane fait tourner la flèche deux fois. Elle multiplie ensuite les deux numéros sur lesquels la flèche s'est arrêtée.
Déterminer le produit le plus probable parmi les nombres suivants :
2 4 6 8 12.

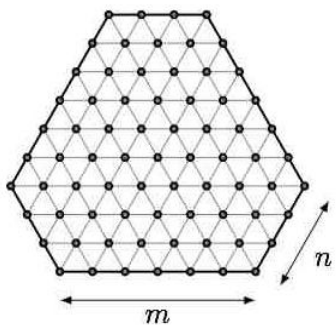


4. Les satellites utilisés pour le positionnement par GPS permettent de localiser précisément n'importe quel endroit sur la Terre. On programme ceux-ci de façon qu'ils choisissent au hasard 5 endroits sur la surface de notre planète. Si on suppose que les terre est une boule, quelle est la probabilité que l'on puisse trouver une demi-sphère (frontière incluse) sur laquelle au moins 4 des points choisis soient situés ?

5. Trois amis se retrouvent au parc. Bob et Clarice sont debout au même endroit, tandis qu'Alain est debout à une distance de 10 m des deux autres. Bob choisit une direction au hasard et se met à marcher jusqu'à ce qu'il soit à 10 m de Clarisse. Quelle est la probabilité que Bob soit plus près que Clarisse d'Alain ?

6. Combien existe-t-il d'entiers positifs compris entre 1 000 et 10 000 divisibles par 3 et dont les quatre chiffres sont des entiers consécutifs ?

7. Soit m et n deux naturels non nuls. On construit un hexagone dont les angles sont de 120° et dont les côtés mesurent alternativement m et n. Cet hexagone est pavé par des triangles équilatéraux de côté 1 et tous les sommets de ces triangles sont marqués.
a. Combien y a-t-il de points marqués lorsque $m=10$ et $n=6$?
b. Combien y a-t-il de points marqués dans le cas général ?



Thème : Nombres

1. Combien y a-t-il d'entiers n compris entre 10 et 1 000 dont la somme des chiffres est égale à 3 ?

2. Combien d'entiers peut-on exprimer comme une somme de trois nombres distincts choisis dans l'ensemble {4, 7, 10, 13, …, 46} ?

3. On considère un nombre entier de quatre chiffres s'écrivant *wxyz* en base 10 ($w \neq 0$). On appelle *somme en dégradé* de ce nombre la somme $wxyz + xyz + yz + z$.
Sachant que la *somme en dégradé* du nombre *wxyz* est 2014, déterminer la valeur de l'expression $w + x + y + z$.

4. Démontrer que pour tout nombre premier *p* strictement supérieur à 3, il existe un entier *n* tel que $24n+1 = p^2$

5. Soit *a* et *c* deux nombres positifs tels qu'il existe quatre entiers *y*, *z*, *m* et *n* tels que pour tout nombre *x*, on puisse écrire $x^2 + ax + 48 = (x+y)(x+z)$ et $x^2 - 8x + c = (x+m)(x+n)$.
Déterminer la valeur maximale du nombre ac .

6. Etant donné un nombre entier strictement positif *n*, on note $S(n)$ le plus petit entier strictement positif divisible par chacun des entiers 1, 2, 3, …, *n*. Par exemple, $S(5) = 60$.
Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs *n* tels que $1 \leq n \leq 100$ et $S(n) = S(n+4)$?

Thème : Equations

1. Déterminer la somme des solutions de l'équation $\left(x^2-5x+5\right)^{x^2+4x-60}=1$.

2. Julie parcourt un chemin droit qui relie sa maison (J) à celle de son grand-père (G). Une partie du chemin est sur terrain plat tandis que d'autres parties sont en montant ou en descendant. Sa voiture descend les côtes à une vitesse moyenne de 99 km/h, elle va en moyenne à 77 km/h sur terrain plat et monte les côtes à une vitesse moyenne de 63 km/h. Julie met 3 heures et 40 minutes pour se rendre de J à G. Elle met 4 heures et 20 minutes pour se rendre de G à J. Quelle est la distance, en km, entre J et G ?

3. Déterminer la plus petite valeur prise par la somme $a+b$ où a et b sont des entiers strictement positifs et solutions de l'équation $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{3a}=\dfrac{1}{b^2-2b}$.

4. Pour tous entiers strictement positifs *p* et *q*, on note $\max(p,q)$ le plus grand des nombres *p* et *q* et on note $\min(p,q)$ le plus petit des nombres *p* et *q*.

Déterminer le nombre de couples (x,y) d'entiers positifs inférieurs ou égaux à 100 et solutions de l'équation :

$$\max\left(60,\min(x,y)\right)=\min\left(\max(60,x),y\right).$$

5. Les masses, en kilogrammes, de cinq citrouilles sont des entiers naturels tous différents. On place ces citrouilles deux par deux sur une balance. Les plus petites masses ainsi obtenues sont 16kg et 18kg, tandis que les plus grandes sont 26kg et 27kg.

- **a.** Ces informations permettent-elles de déterminer la masse de chacune des citrouilles ?
- **b.** Si non, combien de cas en tout sont cohérents avec ces informations ? Donner les cinq masses dans chacun des cas.

6. Sur chacune des six faces d'un cube on inscrit un entier supérieur ou égal à 1. Pour chacun des huit sommets du cube, on forme le produit des trois nombres situés sur les faces contenant le sommet.
La somme des huit nombres obtenus est 70. Quelle est la somme des nombres écrits sur les faces du cube ?