



MINISTÈRE DE  
L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE  
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR  
ET DE LA RECHERCHE



## ***Stage « résolution de problème » proposé à des collégiens talentueux et motivés désignés par leurs établissements, les 21 et 22 octobre 2013***

La Pépinière académique de mathématique organise pour la huitième année, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Cinq niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le centre INRIA de Paris-Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise le collège Paul Fort de Montlhéry. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves, sur lesquels les établissements veillent.

**Le secrétariat opérationnel :** Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

**Les inspecteurs :** Anne ALLARD, Marie-Françoise BOURDEAU, Joëlle DEAT, Yann ÉGLY, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF, Éric SOROSINA

**Les responsables des établissements d'accueil :** Dominique BARTH (Directeur de l'UFR des sciences de l'UVSQ), Florence GOEHRS (Responsable administrative de l'UVSQ), Jean-Paul JOUAN (Proviseur du lycée Camille Pissarro), Didier TACHEAU (Principal du collège Paul Fort)

**Les professeurs :** Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Isabelle BOIS (Collège Michel Vignaud, MORANGIS), Fabrice CHARLEMAGNE (Lycée Robert Doisneau, CORBEIL ESSONNES), Dominique CLÉNET (Lycée François Villon, LES MUREAUX), Antoine CROUZET (Lycée La Folie Saint James, NEUILY SUR SEINE), Nicolas FIXOT (Lyc2e Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Line ORRÉ (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Konrad RENARD (Lycée Arthur Rimbaud, GARGES LES GONESSE), Martine SALMON (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Christine WEILL (Lycée Hoche, VERSAILLES), Joffrey ZOLNET (Lycée Léonard de Vinci, LEVALLOIS PERRET)

## *Emploi du temps*

	<b>Pontoise P1</b>	<b>Pontoise P2</b>	<b>Montlhéry</b>
<b>Lundi 21 10 heures</b>	Nombres et calculs BB	Nombres et calculs CH	Nombres et calculs IB
<b>Lundi 21 11 h 45</b>	Film	Repas	Film
<b>Lundi 21 12 h 15</b>	Repas	Film	Repas
<b>Lundi 21 13 heures</b>	Angles et distances KR	Cryptographie AC	Cryptographie IB+NF
<b>Lundi 21 14 h 45</b>	Cryptographie AC	Angles et distances KR	Aires et volumes NF
<b>Mardi 22 10 heures</b>	Aires et volumes CH	Aires et volumes AA	Raisonnement FC
<b>Mardi 22 11 h 45</b>	Repas	Film	Film
<b>Mardi 22 12 h 15</b>	Film	Repas	Repas
<b>Mardi 22 13 heures</b>	Raisonnement KR	Équations AA+YE	Équations FC
<b>Mardi 22 14 h 45</b>	Équations AA+YE	Raisonnement KR	Angles et distances ES+JD

	<b>Versailles V1</b>	<b>Versailles V2</b>	<b>Versailles V3</b>
<b>Lundi 21 10 heures</b>	Aires et volumes LO	Nombres et calculs JZ	Film Raisonnement DC
<b>Lundi 21 11 h 45</b>	Film	Repas	DC
<b>Lundi 21 12 h 15</b>	Repas	Film	Repas
<b>Lundi 21 13 heures</b>	Raisonnement DC	Aires et volumes LO	Nombres et calculs JZ
<b>Lundi 21 14 h 45</b>	Nombres et calculs JZ	Raisonnement DC	Aires et volumes LO
<b>Mardi 22 10 heures</b>	Film Angles et distances	Équations CW	Cryptographie ER+PM
<b>Mardi 22 11 h 45</b>	MS	Film	Repas
<b>Mardi 22 12 h 15</b>	Repas	Repas	Film
<b>Mardi 22 13 heures</b>	Équations CW	Cryptographie ER+PM	Angles et distances MS
<b>Mardi 22 14 h 45</b>	Cryptographie ER+PM	Angles et distances MS	Équations CW

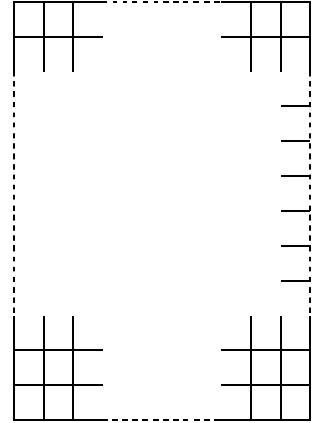
## Thème : Nombres et calculs

### Exercice 1 Objectif caramel

Une solution de sucre dans l'eau a une masse de 2 kg. Elle est composée, en masse, de 90% d'eau et de 10% de sucre. On chauffe cette solution pour faire évaporer l'eau. Après un certain temps, l'eau ne représente plus que 85% de ce qui reste. Quelle est à ce moment la masse de la solution ?

### Exercice 2 Grands carreaux

Une feuille de papier quadrillé rectangulaire présente la particularité suivante : le nombre de cases situées sur le bord est égal au nombre de celles qui ne touchent pas le bord. Quelles sont, en nombre de cases, les dimensions de cette feuille ?



### Exercice 3 Et pourtant ils sont pairs

Quel est le plus petit nombre entier s'écrivant avec les chiffres 2, 4 et 8, chacun apparaissant deux fois, et qui n'est pas divisible par 4 ?

### Exercice 4 Des entiers, encore des entiers...

Le nombre positif  $x$  vérifie :  $x + \frac{1}{x} = 5$ . Calculer  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  puis  $x^3 + \frac{1}{x^3}$ . Est-il vrai que pour tout entier naturel non nul  $n$  le nombre  $x^n + \frac{1}{x^n}$  est un entier ?

*Vous ferez au passage connaissance avec le raisonnement par récurrence.*

### Exercice 5 L'avant-dernier chiffre

Le carré d'un nombre entier a pour chiffre des unités 6. Montrer que son chiffre des dizaines est impair.

### Exercice 6 Les mystères de l'homographie

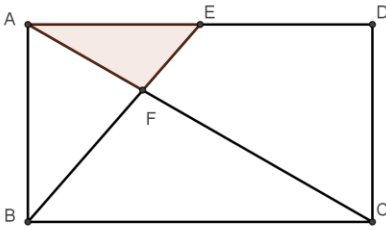
- On donne des nombres  $a, b, c$  et  $d$  tous strictement positifs et tels que  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ . Montrer que  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .
- Si  $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_{2013}}{b_{2013}}$  sont 2 013 quotients de nombres tous strictement positifs, montrer que le quotient  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2013}}{b_1 + b_2 + \dots + b_{2013}}$  est encadré par le plus petit et le plus grand d'entre eux.
- Trouver des entiers  $x$  et  $y$  les plus petits possibles tels que :  $\frac{2011}{2012} < \frac{x}{y} < \frac{2012}{2013}$ .

### Exercice 7 Un peu de calcul littéral

Si  $a, b$  et  $c$  sont des nombres positifs tels que  $a^2 = b^2 + c^2$ , simplifier l'écriture de  $A = \sqrt{\frac{a+b+c}{a+b-c} \cdot \frac{a-b+c}{b+c-a}}$

## Thème : aires et volumes

### Exercice 1

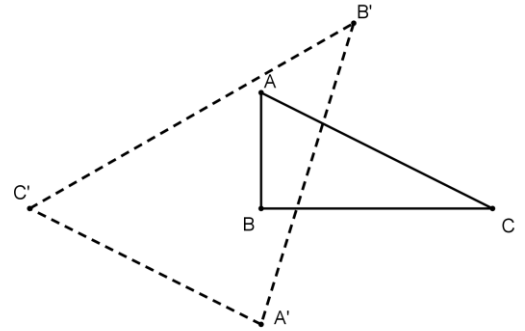


Un classique : On considère un rectangle ABCD, E le milieu du côté [AD] et F le point d'intersection de [BE] avec la diagonale [AC]. L'aire du triangle AFE est 1. Quelle est l'aire du rectangle ABCD ?

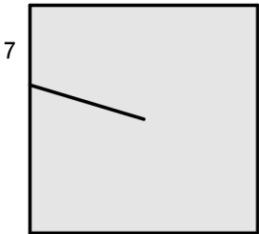
En serait-il de même si on remplaçait « rectangle » par « parallélogramme » ?

### Exercice 2

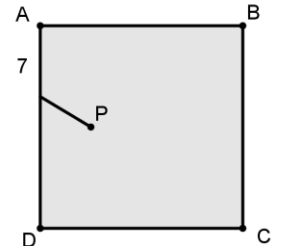
On considère un triangle ABC rectangle en B et les symétriques  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  des points A, B et C respectivement par rapport à (BC), (CA) et (AB). Montrer que l'aire du triangle  $A'B'C'$  est le triple de l'aire de ABC.



### Exercice 3 Une tarte carrée



Vincent doit découper une tarte carrée de 20 cm de côté en cinq parts de même aire. Il a planté son couteau au centre de la tarte et fait une première découpe jusqu'à un point situé à 7 cm d'un angle. Il s'apprête à réaliser d'autres découpes partant du centre de la tarte. Comment doit-il continuer ?

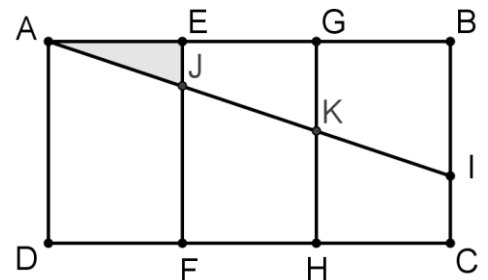


Sarah doit découper une autre tarte de la même forme en cinq parts de même aire. Elle a planté le couteau au point P, situé à 5 cm du côté (AD) et à 10 cm du côté (AB) et réalisé une première découpe jusqu'au point du côté (AD) situé à 7 cm de A. Les découpes partant toutes du point P, comment doit-elle continuer ?

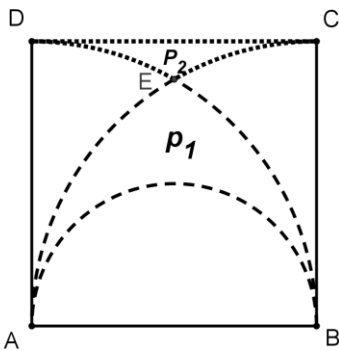
### Exercice 4

Le rectangle ABCD a été découpé en trois rectangles identiques. Le point I est le point du segment [BC] tel que l'aire du trapèze BGKI soit le double de celle de KICH.

On suppose que l'aire du triangle AEJ est 1. Quelle est l'aire du rectangle ABCD ?



### Exercice 5 Le vitrail

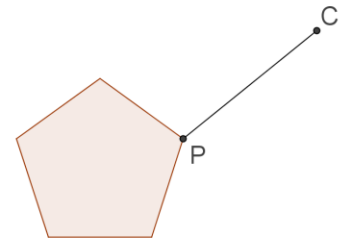


Dans le carré ABCD de côté 2, sont placés un demi-cercle de diamètre [AB] et deux quarts de cercles  $\widehat{BD}$ , de centre A et  $\widehat{AC}$ , de centre B. Ces arcs déterminent deux régions notées  $p_1$  et  $p_2$  n'ayant en commun que le point E.

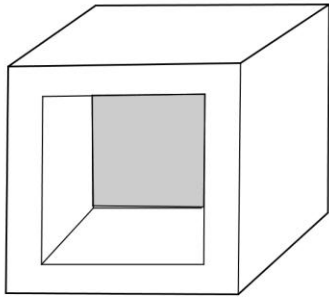
Quel est le rapport des aires de  $p_1$  et  $p_2$  ?

### Exercice 6 La chèvre du pentagone

La chèvre C est attaché au piquet P fiché en un des sommets d'un pentagone régulier impénétrable de côté 6 m au moyen d'une corde de longueur 10 m. Quelle est l'aire du domaine dans lequel la chèvre peut évoluer ?



### Exercice 7 Coffre-fort (sans porte...)



Un coffre-fort mural a la forme d'un cube d'arête  $a$  – mesurée en cm – dont les parois ont une épaisseur de 5 cm. Sans la porte, le volume de métal est  $14\,500\text{ cm}^3$ .

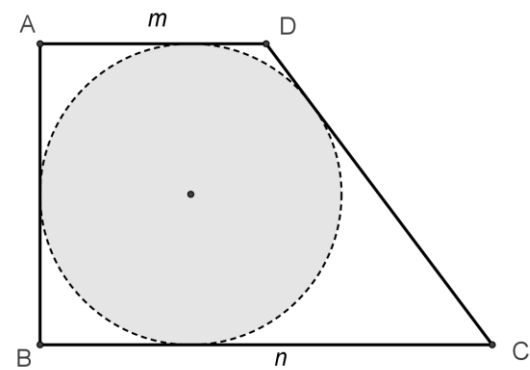
Combien vaut  $a$  ? On pourra considérer raisonnablement que  $a$  est un nombre entier compris entre 20 et 50.

### Exercice 8 Un tilleul envahissant

Mon jardin a la forme d'un trapèze rectangle dont les bases mesurent  $m$  et  $n$ .

Un tilleul planté dans le jardin s'est développé jusqu'à ce que son feuillage, apparaisse en projection verticale comme un disque tangent aux quatre côtés du trapèze.

Comment s'exprime l'aire du jardin en fonction de  $m$  et  $n$  ?



## Thème : équations

### Exercice 1 Carré magique

Dans le carré ci-contre, les nombres inscrits dans les cases sont des nombres strictement positifs.

Le *produit* des nombres inscrits dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chacune des deux diagonales est le même. Déterminer  $h$ .

0,5	32	$a$	$b$
$c$	2	8	2
4	1	$d$	$e$
$f$	$g$	$h$	16

### Exercice 2 Les triplés

Déterminer trois entiers impairs successifs  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que le nombre  $a^2 + b^2 + c^2$  s'écrive avec quatre chiffres identiques.

### Exercice 3 Encore des triplés

Trouver tous les triplets de nombres vérifiant :  $x + y - z = -1$ ,  $x^2 - y^2 + z^2 = 1$  et  $-x^3 + y^3 + z^3 = -1$

### Exercice 4 Fractions égyptiennes

Déterminer les couples d'entiers positifs  $(x, y)$  tels que  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2013}$

### Exercice 5 L'un d'eux est un

Si trois nombres  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont tels que leur produit soit 1 et que la somme de leurs inverses soit égale à leur somme, alors l'un d'eux est égal à 1.

### Exercice 6 Encore la méthode de la factorisation forcée

J'ai un terrain rectangulaire dont les dimensions  $x$  et  $y$  sont mesurées en mètres par des nombres entiers. J'ai la possibilité d'acquérir des parcelles voisines, ce qui augmenterait une des dimensions de 5 m et l'autre de 6 m, et triplerait la superficie.

Quelles peuvent être les dimensions de mon terrain ?

### Exercice 7 Économie de métal

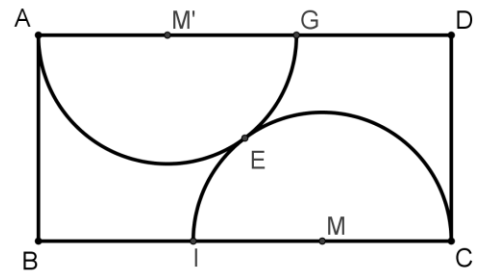
Mon voisin, lui, possède un pré carré de 30 m de côté, entièrement clôturé. Il désire le séparer en trois parcelles de même aire, également clôturées, mais il ne possède que de quoi réaliser 50 m de clôture. Comment s'y prendre ?

## Thème : calculs d'angles et de distances

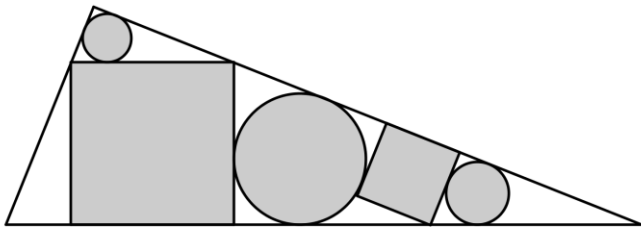
### Exercice 1 Styliste

Dans une pièce de tissu rectangulaire de longueur 160 cm et de largeur 80 cm, un tailleur souhaite découper deux demi-disques identiques, comme sur la figure ci-contre.

Quel est le rayon de ces demi-disques ?



### Exercice 2 Bric à brac (exercice à garder pour la fin)



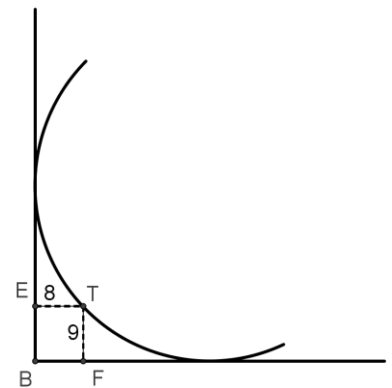
Un triangle rectangle contient des carrés et des disques (tangents à des côtés du rectangle ou à des côtés des carrés). Le rayon du plus grand disque est  $a$ , le rayon du plus petit est  $b$ . Quel est le rayon du troisième ?

### dans un coin

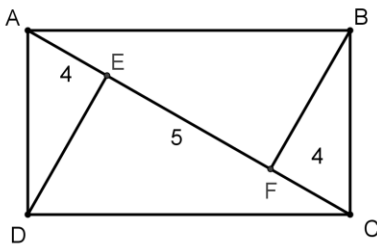
Un cercle est tangent à deux droites perpendiculaires. Un point  $T$  de ce cercle est tel que ses distances à ces deux droites sont respectivement 8 et 9.

Quel est le rayon du cercle ?

### Exercice 3 Le cercle



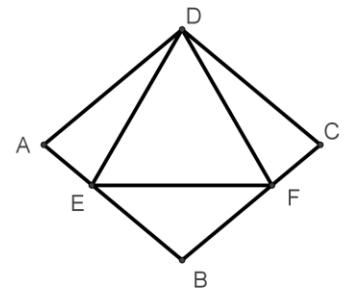
### Exercice 4 Puzzle



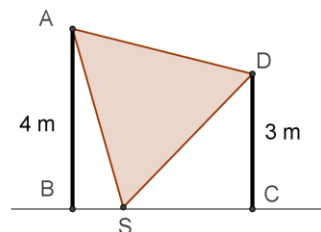
Dans un rectangle  $ABCD$  de longueur  $a$  et de largeur  $b$ , les pieds des perpendiculaires abaissées de  $B$  et  $D$  sur  $[AC]$  déterminent sur cette diagonale des segments de longueurs 4, 5 et (évidemment) 4. Déterminer  $a$  et  $b$ .

### Exercice 5 Sept allumettes

Sept allumettes identiques matérialisent les côtés d'un losange  $ABCD$  et les côtés d'un triangle équilatéral  $DEF$ , les points  $E$  et  $F$  appartenant respectivement aux côtés  $[AB]$  et  $[BC]$  du losange. Quelle est la mesure de l'angle  $\widehat{EBF}$  ?



### Exercice 6 Après la fête



Pour abriter les spectateurs du soleil, des vélums avaient été tendus, attachés au sommet de mâts. L'un d'entre eux, en forme de triangle équilatéral, est encore accroché par deux de ses sommets en haut de deux mâts dont l'un mesure 4 m et l'autre 3 m. Son troisième sommet touche exactement le sol. Quelle est la longueur du côté de ce triangle équilatéral ?

### Exercice 7 Symétrie cachée

On considère un triangle équilatéral  $ABC$ . On place un point  $D$  sur  $[AC]$  tel que l'angle  $\widehat{DBC}$  mesure  $20^\circ$ . Sur la demi-droite  $(BD)$ , on place le point  $E$  tel que  $DE = AB$ .

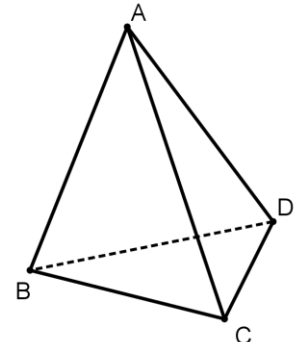
Quelle est la mesure de l'angle  $\widehat{DEC}$  ?

## Thème : logique, raisonnement, probabilités

### Exercice 1 Loto tétraèdre

Les côtés du tétraèdre ABCD mesurent, dans une unité arbitraire, 7, 13, 18, 27, 36 et 41.

On suppose que la longueur de [AB] est 41. Quelle est la longueur de [CD] ?



### Exercice 2

Ali dit : « Bela dit toujours la vérité »

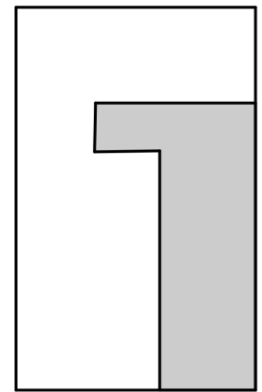
Bela dit : « Ali ment »

Cora dit : « Ali et Bela mentent tous les deux »

Qui ment et qui dit la vérité ?

### Exercice 3 Tapisserie

Une feuille rectangulaire est découpée en deux parties par des coups de ciseau parallèles à ses côtés. Cette opération donne naissance à deux figures, une qui a huit côtés, l'autre qui en a six. Les côtés de la figure à huit côtés mesurent, en unité arbitraire, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8. La figure donnée en illustration n'est pas à l'échelle, l'ordre des côtés n'est pas donné. Quelle est, au maximum, l'aire de la figure à six côtés ?



### Exercice 4 Un classique



Cendrillon tient dans ses mains jointes six morceaux de ficelle dont les extrémités dépassent du côté des pouces et du côté des auriculaires.

Aladin noue deux à deux les extrémités des bouts de ficelle, d'un côté puis de l'autre. Cendrillon ouvre les mains. Quelle est la probabilité que les six morceaux de ficelle aient été réunis en une courbe fermée ?

### Exercice 5 La météo d'hier, parce que c'est plus facile

Je me suis absenté un certain nombre de jours. Mes voisins m'ont dit que pendant cette période, onze jours avaient été pluvieux à un moment ou un autre de la journée. Ils ont observé que, lorsque la pluie était tombée le matin, l'après-midi avait été sec. Au total, on avait vu 9 matinées sèches et 12 après-midi ensoleillés.

Combien de jours ont été intégralement épargnés par le pluie durant cette période ?

### Exercice 6 Applaudissez !

Magique : si j'écris deux nombres entiers dans mon cahier de magie et que vous frappez dans vos mains, les deux nombres se transforment en leur somme et leur produit.

Par exemple, si j'écris 2 et 3, j'obtiens 5 et 6 à la première salve d'applaudissements, 11 et 30 à la deuxième, puis 41 et 330, etc.

1. Quels nombres écrire pour faire apparaître 18 au bout d'un certain temps ?
2. De combien de façons peut-on faire apparaître 18 ? On ne tient compte que des *paires* de nombres à écrire.



## Thème : équations

### Exercice 1 Carré magique

Dans le carré ci-contre, les nombres inscrits dans les cases sont des nombres strictement positifs.

Le *produit* des nombres inscrits dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chacune des deux diagonales est le même. Déterminer  $h$ .

0,5	32	$a$	$b$
$c$	2	8	2
4	1	$d$	$e$
$f$	$g$	$h$	16

### Exercice 2 Les triplés

Déterminer trois entiers impairs successifs  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que le nombre  $a^2 + b^2 + c^2$  s'écrive avec quatre chiffres identiques.

### Exercice 3 Encore des triplés

Trouver tous les triplets de nombres vérifiant :  $x + y - z = -1$ ,  $x^2 - y^2 + z^2 = 1$  et  $-x^3 + y^3 + z^3 = -1$

### Exercice 4 Fractions égyptiennes

Déterminer les couples d'entiers positifs  $(x, y)$  tels que  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2013}$

### Exercice 5 L'un d'eux est un

Si trois nombres  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont tels que leur produit soit 1 et que la somme de leurs inverses soit égale à leur somme, alors l'un d'eux est égal à 1.

### Exercice 6 Encore la méthode de la factorisation forcée

J'ai un terrain rectangulaire dont les dimensions  $x$  et  $y$  sont mesurées en mètres par des nombres entiers. J'ai la possibilité d'acquérir des parcelles voisines, ce qui augmenterait une des dimensions de 5 m et l'autre de 6 m, et triplerait la superficie.

Quelles peuvent être les dimensions de mon terrain ?

### Exercice 7 Économie de métal

Mon voisin, lui, possède un pré carré de 30 m de côté, entièrement clôturé. Il désire le séparer en trois parcelles de même aire, également clôturées, mais il ne possède que de quoi réaliser 50 m de clôture. Comment s'y prendre ?