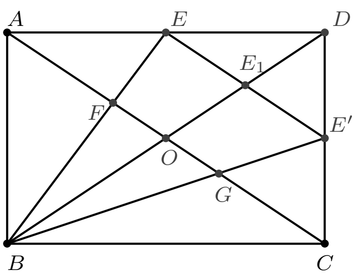
Corrigé. Aires et volumes

Exercice 1

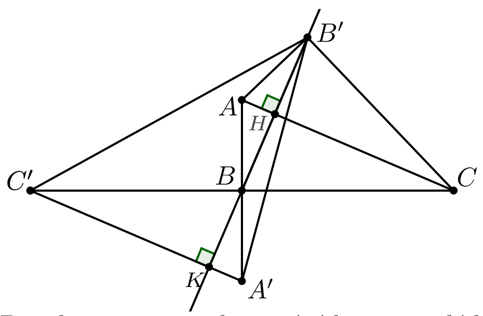
Notons $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle $ABCD$.

- La droite (BE) est médiane du triangle BAD, donc l'aire du triangle BAE, que l'on notera $\mathcal{A}_1$, est la moitié de l'aire du triangle BDA, donc $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{4}\mathcal{A}$.



- Notons E' le milieu de $[DC]$, O le centre du rectangle et E_1 le point d'intersection de la droite (EE') et de la droite (BD).
  En appliquant le théorème de la droite des milieux dans le triangle ADC, puis dans le triangle ADO, on obtient successivement que les droites (EE') et (AC) sont parallèles, puis que E_1 est le milieu de $[OD]$.
  En utilisant le fait que les diagonales du rectangle $ABCD$ se coupent en leur milieu, on obtient : $OE_1 = \frac{1}{2}OB$, puis en utilisant le théorème de Thalès dans le triangle BEE_1 : $FE = \frac{1}{2}BF$.
- les triangles AFE et AFB ont une hauteur commune, celle issue de A, et la longueur de la base de l'un est la moitié de la longueur de la base de l'autre, donc l'aire du triangle AFE est la moitié de l'aire du triangle AFB .
  D'après l'énoncé, l'aire du triangle AFB est 1, donc $\mathcal{A}_1 = 2 + 1 = 3$, puis $\mathcal{A} = 4 \times 3 = 12$.
- En reprenant les raisonnements précédents on constate qu'ils s'étendent facilement au parallélogramme.
  on peut remarquer qu'au passage on a démontré la position du centre de gravité d'un triangle sur les médianes.

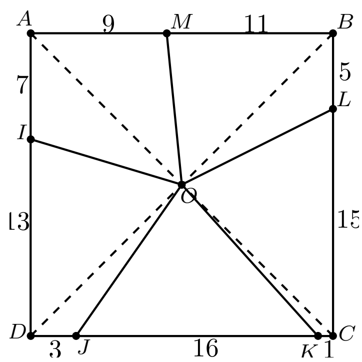
Exercice 2



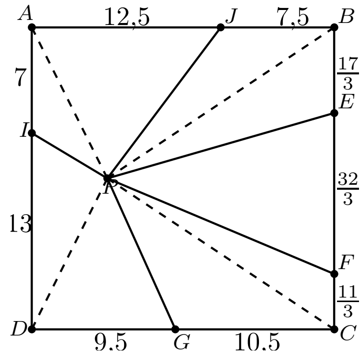
- B' est le symétrique de B par rapport à (AC) donc les droites (BB') et (AC) sont perpendiculaires et $BB' = 2BH$, où H est le pied de la hauteur issue de B du triangle ABC.
- A' est le symétrique de A par rapport à (BC) et le triangle ABC est rectangle en B, donc B est le milieu de $[AA']$. De la même façon, B est le milieu de $[CC']$, donc les diagonales du quadrilatère $ACA'C'$ se coupent en leur milieu, B, donc $ACA'C'$ est un parallélogramme, donc les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles et $A'C' = AC$.

Des deux paragraphes précédents, on déduit que (BB') est perpendiculaire à $(A'C')$, donc (BB') est la hauteur issue de B' du triangle $A'B'C'$. Notons K le point d'intersection de (BB') et $(C'A')$.
L'aire de $A'B'C'$ est $\mathcal{A} = \frac{B'K \times A'C'}{2} = \frac{B'K \times AC}{2}$, de plus $B'K = B'B + BK$. Or le triangle $BA'C'$ est superposable au triangle ABC (mêmes angles et un côté de même longueur), et on a vu que $BB' = 2BH$, donc $B'K = 3BH$.
On en déduit que $\mathcal{A} = \frac{3BH \times AC}{2} = 3\frac{BH \times AC}{2}$. Donc l'aire de $A'B'C'$ est le triple de l' aire de ABC.

Exercice 3

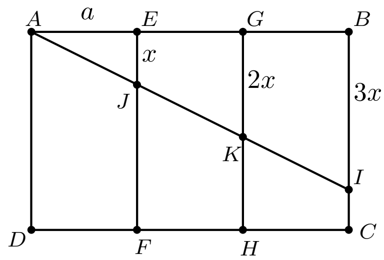


L'aire de la tarte carré est de 400 cm^2 donc chaque part de tarte doit avoir une aire de $\frac{400}{5} = 80$ cm^2.
Notons O le centre du carré et I le point d'intersection de la première découpe avec le côté $[AD]$ de la tarte (voir figure).
Le triangle OAI a pour aire $\frac{10 \times 7}{2} = 35$ cm^2. Pour couper une première part de 80 cm^2, il faut donc construire un triangle OAM de 45 cm^2, où M est un point de $[AD]$. La hauteur issue de O de OAM étant de 10, M est donc à la distance 9 de A.
En réitérant ce procédé, on obtient le plan de coupe ci-contre.



En utilisant la même méthode que précédemment, en tenant compte du fait que les hauteurs des triangles sont de 5, 10 et 15, on obtient le plan de coupe ci-contre.

Exercice 4

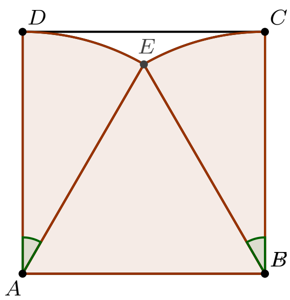


- Notons x la distance EJ. En appliquant le théorème de Thalès, successivement dans les triangles AGK et ABI, on obtient :
  $GK = 2x$ et $BI = 3x$.
- Notons a la distance AE. Par hypothèse, l'aire du triangle AEJ est 1 donc $\dfrac{ax}{2} = 1$, donc $ax = 2$.
- Le trapèze $BGKI$ a alors pour aire : $\dfrac{a(2x+3x)}{2} = \dfrac{5ax}{2} = 5$.

De plus par hypothèse, l'aire du trapèze $BGKI$ est le double de celle de $KICH$, donc l'aire de $KICH$ est $\dfrac{5}{2}$. On en déduit que l'aire du rectangle $GBCH$ est $5 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{2}$, puis que l'aire du rectangle $ABCD$ est $\dfrac{45}{2}$.

Exercice 5

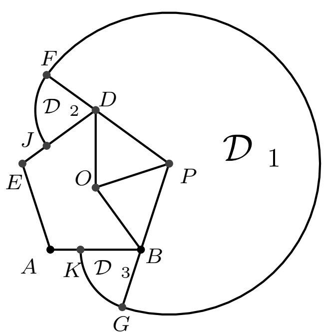
L'aire de chacun des deux quarts de disque est de π, l'aire du demi-disque est de $\dfrac{\pi}{2}$ et l'aire du carré est de 4.
Notons P_1 l'aire de p_1 et P_2 l'aire de p_2. Compte tenu du fait que l'intersection des deux quarts de disque est $p_1 \cup D$ (où D est le demi-disque), on a : $P_2 + \pi + \pi - P_1 - \dfrac{\pi}{2} = 4$, donc $P_1 - P_2 = \dfrac{3\pi}{2} - 4$.



les angles $\widehat{CBE}$ et $\widehat{EAD}$ ont pour mesure 30°, donc les secteurs angulaires correspondants ont pour aires $\dfrac{1}{12} \times 4\pi = \dfrac{\pi}{3}$.
L'aire du triangle équilatéral ABE est $\dfrac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$.
On a donc $\underline{P_2 = 4 - \sqrt{3} - \dfrac{2\pi}{3}}$.

Des deux paragraphes précédents, on déduit que $\underline{P_1 = \dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3}}$ et que $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{4 - \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}}{\dfrac{5\pi}{6} - 4\sqrt{3}} \approx 0,2$.

Exercice 6

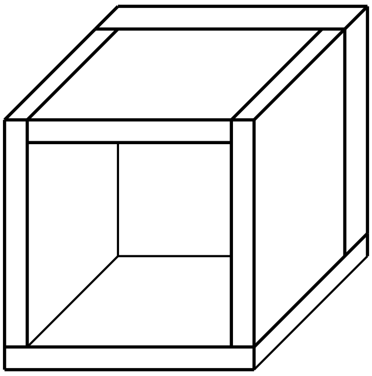


Le domaine dans lequel la chèvre peut évoluer est la réunion des trois portions de disque $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$.
Les limites de ce domaine sont : un arc de cercle de centre P et de rayon 10 et deux arcs de cercle de centres respectifs D et B et de rayon 4 (voir figure ci-contre).

- Les triangles DOP et POB sont des triangles isocèles en O, d'angle au sommet $\frac{360}{5} = 72°$. Les angles $\widehat{DPO}$ et $\widehat{OPB}$, ont donc pour mesure $\frac{180-72}{2} = 54°$. Donc l'angle rentrant OPB a pour mesure $360 - 2 \times 54 = 252°$. $\mathcal{D}_1$ a donc pour aire $\frac{252}{360} \times 100\pi = 70\pi$.
- L'angle $\widehat{FDJ}$ a pour mesure 72°. $\mathcal{D}_2$ a donc pour aire $\frac{72}{360} \times 16\pi = \frac{16}{5}\pi$. $\mathcal{D}_3$ a la même aire que $\mathcal{D}_2$.

L'aire du domaine où la chèvre peut évoluer est donc de $70\pi + \frac{32}{5}\pi = \frac{382}{5}\pi$ $(76,4m^2)$.

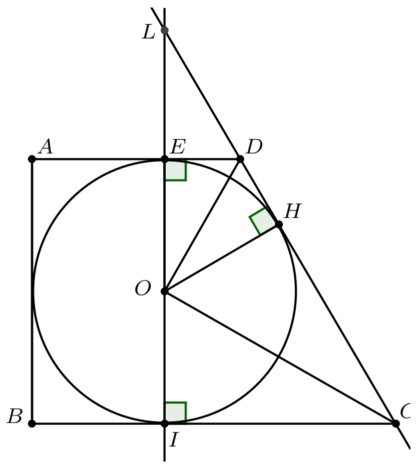
Exercice 7



Le coffre fort est la réunion de 5 parallélépipèdes rectangles ayant une arête de mesure 5 cm.
Les volumes des parallélépipèdes sont $5 \times a \times a$ (socle), $5 \times a \times (a-5)$ (fond), $5 \times (a-5) \times (a-5)$ (côtés), $5 \times (a-5) \times (a-10)$ (dessus).
a est donc solution de l'équation :
$5(a^2 + a(a-5) + 2(a-5)^2 + (a-5)(a-10)) = 14500$
$5(5a^2 - 40a + 100) = 14500$
$a^2 - 8a + 20 = 580$
$a(a-8) = 560$
On constate que 28 est une solution. C'est la seule solution positive puisque si $0 < a < 28$ alors $a(a-8) < 560$ et si $a > 28$ alors $a(a-8) > 560$.

Finalement, l'arête du coffre fort est de 28 cm.

Exercice 8



Notons R le rayon du disque.

- L'aire du jardin est $\mathcal{A} = \frac{AB(AD+BC)}{2} = \frac{2R(m+n)}{2} = R(m+n)$.
- On note O le centre du cercle, I et E les points d'intersection respectifs du cercle avec $[BC]$ et $[AD]$, H et L les points d'intersection respectifs de la droite (CD) avec le cercle et la droite $[OE]$.
La droite (AD) est tangente au cercle en E, donc elle est perpendiculaire au rayon (OE), donc le triangle OED est rectangle en E. De même les triangles OHD, OHC et OIC sont rectangles respectivement en H, H et I.
- Les triangles OHC et OIC, sont rectangles en H, ont un côté commun $[OC]$ et $OH = OI = R$, donc, ils sont isométriques (superposables), donc $\widehat{OCI} = \widehat{OCH} = \frac{1}{2}\widehat{HCI}$. En raisonnant de la même façon avec les triangles OHD et OED, on obtient $\widehat{DOH} = \widehat{DOE} = \frac{1}{2}\widehat{HOE}$.
Par ailleurs, dans le triangle LIC, rectangle en I, $\widehat{HCI}$ et $\widehat{HLO}$ sont complémentaires, et dans le triangle LHO ,rectangle en H, $\widehat{HOE}$ et $\widehat{HLO}$ sont complémentaires, il en résulte que $\widehat{HCI} = \widehat{HOE}$, puis que $\widehat{OCH} = \widehat{DOH}$.
Les triangles rectangles ODH et OHC ont donc les même angles donc l'un est un agrandissement de l'autre.
On en déduit que $\frac{OH}{HD} = \frac{HC}{OH}$.
Or, $OH = R$, $HD = ED = m - R$, $HC = IC = m - R$ et $OH = R$, donc $\frac{R}{m-R} = \frac{n-R}{R}$.
On en déduit que $R^2 = (m-R)(n-R)$, puis que $R = \frac{mn}{m+n}$.

Finalement : L'aire de jardin est mn.

Corrigé. Nombres et calculs

Exercice 1

A l'instant initial, on note x_0 la masse d'eau et y_0 la masse de sucre.
Masse totale : $x_0 + y_0 = 2$kg.
On a 90% d'eau et 10% de sucre donc $\dfrac{x_0}{y_0} = \dfrac{90}{10} = 9$, soit $x_0 = 9y_0$.
On a $\begin{cases} x_0 + y_0 = 2 \\ x_0 = 9y_0 \end{cases}$. On en déduit $x_0 = 1,8$ kg et $y_0 = 0,2$ kg.
Après un certain temps, l'eau ne représente plus que 85% de la masse totale. On note x_1 la masse d'eau et y_1 la masse de sucre.
Le sucre ne s'est pas évaporé donc $y_1 = y_0$. D'autre part $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{85}{15} = \dfrac{17}{3}$, donc $x_1 = \dfrac{17}{3}y_0$.
On en déduit $x_1 = \dfrac{17}{15}$ et $y_1 = \dfrac{1}{5}$ soit une masse totale de $\dfrac{17}{15} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{3}$.
La masse de la solution est donc environ 1,33 kg.

Exercice 2

On note a le nombre de carreaux horizontalement et b le nombre de carreaux verticalement.
Il y a $(a-1)+(b-1)+(a-1)+(b-1)$ carreaux sur le bord c'est à dire $2a+2b-4$.
Il y a $(a-2)(b-2)$ carreaux qui ne touchent pas le bord.
On en déduit $2a+2b-4 = (a-2)(b-2)$
En développant on obtient $ab-4a-4b+8=0$ soit $(a-4)(b-4)=8$
On en déduit quatre cas possibles :

$$\begin{cases} a-4=1 \\ \text{et} \\ b-4=8 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-4=2 \\ \text{et} \\ b-4=4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-4=4 \\ \text{et} \\ b-4=2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-4=8 \\ \text{et} \\ b-4=1 \end{cases}.$$

La feuille a donc deux dimensions possible : 5×12 ou 6×8, solutions qui conviennent bien.

Exercice 3

100 est divisible par 4 donc le nombre $\overline{abcdef}$ est divisible par 4 si et seulement si le nombre $\overline{ef}$ est divisible par 4.
Il y a 9 nombres de 2 chiffres formés avec les chiffres 2, 4 et 8.
6 sont divisibles par 4 : 24, 28, 44, 48, 84, 88 et 3 ne le sont pas : 22, 42, 82.
Parmis les nombres s'écrivant avec les chiffres 2, 4, 8 chacun apparaissant deux fois

- ceux qui commencent par 244 sont 244882, 244828 et 244288 : seul 244882 n'est pas divisible par 4.
- ceux qui sont inférieurs à 244288 commencent par 224 ou 242, il ne se terminent donc pas par 22, 42 ou 82 et sont donc divisibles par 4.

244882 est donc le plus petit nombre entier s'écrivant avec les chiffres 2, 4, 8 chacun apparaissant deux fois et qui n'est pas divisible par 4.

Exercice 4

x vérifie $x + \dfrac{1}{x} = 5$, donc $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 = 25$ soit $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 23$
Or $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = x^3 + x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}$, donc $x^3 + x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3} = 5 \times 23$ soit $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 110$.
Puis $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right) = x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}}$
soit $x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right) - \left(x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}}\right)$.
Par récurrence, on montre alors facilement que pour tout entier n, $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ est entier.

Exercice 5

Soit n un nombre entier tel que n^2 ait 6 pour chiffre des unités. Alors le carré du chiffre des unités de n a 6 pour chiffre des unités donc le chiffre des unités de n est 4 ou 6.

- Si le chiffre des unités de n est 4, il existe un entier naturel k tel que $n = 10k + 4$.
  On a alors : $n^2 = (10k + 4)^2 = 100k^2 + 80k + 16 = 10(10k^2 + 8k + 1) + 6$. Le chiffre des dizaines de n^2 est le chiffre des unités de $10k^2 + 8k + 1$, il est donc impair.
- Si le chiffre des unités de n est 6, il existe un entier naturel k tel que $n = 10k + 6$.
  On a alors : $n^2 = (10k + 6)^2 = 100k^2 + 120k + 36 = 10(10k^2 + 60k + 3) + 6$. Le chiffre des dizaines de n^2 est le chiffre des unités de $10k^2 + 60k + 3$, il est donc impair.

Finalement, dans tous les cas, le chiffre des dizaines de n^2 est impair.

Exercice 6

1. a, b, c et d sont strictement positifs, on suppose de plus que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$, donc $ad < bc$, donc $bc - ad > 0$.

   - $\dfrac{a+c}{b+d} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{b(a+c) - a(b+d)}{b(b+d)} = \dfrac{bc-ad}{b(b+d)}$, donc $\dfrac{a+c}{b+d} - \dfrac{a}{b} > 0$, donc $\dfrac{a+c}{b+d} > \dfrac{a}{b}$.
   - $\dfrac{c}{d} - \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{c(b+d) - (a+c)d}{d(b+d)} = \dfrac{cb-ad}{d(b+d)}$, donc $\dfrac{c}{d} - \dfrac{a+c}{b+d} > 0$, donc $\dfrac{c}{d} > \dfrac{a+c}{b+d}$.

   Donc $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.

2. Quitte à renommer les nombres, on peut considérer que $\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \cdots, \dfrac{a_{2013}}{b_{2013}}$ sont ordonnés par ordre croissant.
   On applique alors successivement le résultat précédent :
   $\dfrac{a_1}{b_1} \leqslant \dfrac{a_2}{b_2}$ donc $\dfrac{a_1}{b_1} \leqslant \dfrac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \leqslant \dfrac{a_2}{b_2}$, puis
   $\dfrac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \leqslant \dfrac{a_3}{b_3}$ donc $\dfrac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \leqslant \dfrac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3} \leqslant \dfrac{a_3}{b_3}$, puis
   $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3} \leqslant \dfrac{a_4}{b_4}$ donc $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3} \leqslant \dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{b_1+b_2+b_3+b_4} \leqslant \dfrac{a_4}{a_4}, \cdots$
   Après 2012 étapes, on obtient : $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{2012}}{b_1+b_2+\cdots+b_{2012}} \leqslant \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{2013}}{b_1+b_2+\cdots+b_{2013}} \leqslant \dfrac{a_{2013}}{a_{2013}}$, puis,
   $\dfrac{a_1}{b_1} \leqslant \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{2013}}{b_1+b_2+\cdots+b_{2013}} \leqslant \dfrac{a_{2013}}{a_{2013}}$.

3. On cherche des entiers naturels x et y tels que $\dfrac{2011}{2012} < \dfrac{x}{y}$, c'est à dire $2011y < 2012x$ (1) et $\dfrac{x}{y} < \dfrac{2012}{2013}$, c'est à dire $2013x < 2012y$ (2).

   D'après (1) $2011(y - x) < x$ et d'après (2) $x < 2012(y - x)$ donc $2011(y - x) < x < 2012(y - x)$.
   On en déduit que la plus petite valeur possible de $y - x$ est 2, puis que $x > 4022$ et donc que la plus petite valeur que peut prendre x est 4023. La plus petite valeur que peut prendre y est alors 4025.
   On a alors : $2011y = 2011 \times 4025 = 8094275$, $2012x = 2012 \times 4023 = 8094276$, $2013x = 2013 \times 4023 = 8098299$ et $2012y = 2012 \times 4025 = 8098300$.
   Donc les valeurs $x = 4023$ et $y = 4025$ conviennent et sont bien les plus petites possibles.

Exercice 7

a, b et c sont trois réels positifs tels que $a^2 = b^2 + c^2$.

- $(b + c + a)(b + c - a) = (b + c)^2 - a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - a^2 = 2bc$
- $(b + a - c)(a - b + c) = ba - b^2 + bc + a^2 - ab + ac - ac + bc - c^2 = 2bc$

Donc $\mathcal{A} = \sqrt{(2bc)^2} = 2bc$.

Angles et distance : éléments de solutions

Exercice 1.
AM'CM est un parallélogramme donc E est le milieu de [MM'].
La parallèle à (AB) passant par M' coupe (BC) en un point N.
En notant R le rayon des disques, on a BN = R donc MN = 160$-2R$.
Alors, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle M'NM, on a
$80^2 + (160 - 2R)^2 = (2R)^2$ ou encore $640R = 80^2 + 160^2 = 5 \times 80^2$.
On en déduit $\boxed{R = 50 \text{ cm}}$.

Exercice 2. Voir à la fin

Exercice 3.
Notons O le centre du cercle, R son rayon et S le point d'intersection de la droite (ET) et de la parallèle à (BE) passant par O.
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OST, on a
$(R-9)^2 + (R-8)^2 = R^2$ soit, en développant, $R^2 - 34R + 145 = 0$.
Cette équation peut être écrite $(R-17)^2 - 144 = 0$, c'est-à-dire encore $(R-29)(R-5) = 0$.
La seule valeur 29 peut être retenue.

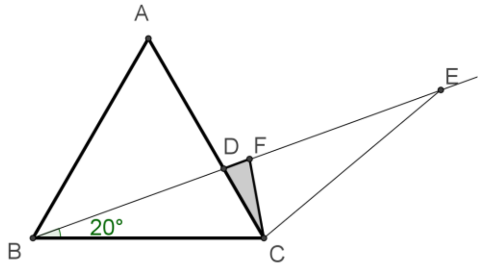
Exercice 4.
Appliquons le théorème de Pythagore dans les triangles ADE, CDE et ACD :
On a $b^2 = 16 + \text{DE}^2$, $a^2 = 81 + \text{DE}^2$ et $a^2 + b^2 = 13^2 = 169$.
En soustrayant les deux premières équations membre à membre, on a $a^2 - b^2 = 65$.
On en déduit que $2a^2 = 169 + 65 = 234$ et $2b^2 = 169 - 65 = 104$
d'où $\boxed{a = \sqrt{117} \text{ et } = \sqrt{52}}$.

Exercice 5.
Notons O le centre du losange, G le milieu de [EF] et P le point d'intersection des droites (DE) et (AO).
Codons alors la figure en indiquant les angles connus (en degrés) et en notant $\alpha = \widehat{\text{ADE}}$:
$\widehat{\text{EDG}} = 30$; $\widehat{\text{DPO}} = \widehat{\text{APE}} = 60$; $\widehat{\text{DAO}} = \widehat{\text{OAB}} = 90 - (30 + \alpha) = 60 - \alpha$;
$\widehat{\text{AEP}} = 180 - 60 - (60 - \alpha) = 60 + \alpha$.
Comme le triangle ADE est isocèle en D, on a $60 + \alpha = 120 - 2\alpha$ donc $\alpha = 20$.
Finalement $\boxed{\widehat{EBF} = 100°}$.

Exercice 6.
Notons E le point tel que BCDE soit un rectangle et posons $a = \text{AD}$, $b = \text{BS}$ et $c = \text{CS}$. En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles BAS, CDS et ADE, on obtient :
$b = \sqrt{a^2 - 16}$, $c = \sqrt{a^2 - 9}$
et $a^2 = 1 + (\sqrt{a^2 - 16} + \sqrt{a^2 - 9})^2 = 2a^2 - 24 + 2\sqrt{a^4 - 25a^2 + 144}$.
Ainsi $4(a^4 - 25a^2 + 144) = (24 - a^2)^2 = a^4 - 48a^2 + 576$.

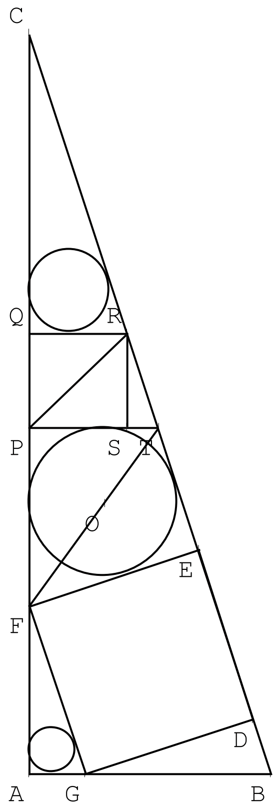
On a donc $3a^4 - 52a^2 = 0$ soit $a^2 = \frac{52}{3}$ et, finalement, $\boxed{a = \sqrt{\frac{52}{3}} \approx 4{,}16\ \mathrm{m}}$.

Exercice 7



Considérons le point F de la demi-droite [BE) tel que BF = BC. Le triangle BFC est isocèle de sommet principal B. Ses angles à la base ont pour mesure 80° (puisque l'angle au sommet est de mesure 20°). Considérons le triangle CFD. L'angle en D de ce triangle est opposé par le sommet à l'angle en D du triangle ABD. Sa mesure est donc 80° (180 – 60 – 40). Le triangle CDF est donc isocèle de sommet principal C. La symétrie d'axe passant par C qui échange D et F échange aussi E et B, puisque BF = ED. L'axe de symétrie du triangle CDF est donc aussi un axe de symétrie pour le triangle CBE. La mesure de l'angle $\widehat{CED}$ est donc 20°.

Exercice 2.



Notons c le rayon du petit cercle et $\alpha = \widehat{ACB}$.
Si r est le rayon du cercle inscrit dans un triangle ABC, on a $r = \frac{S(\mathrm{ABC})}{p(\mathrm{ABC})}$ où $S(\mathrm{ABC})$ est l'aire du triangle et $p(\mathrm{ABC})$ son périmètre.
Les trois cercles sont respectivement inscrits dans les triangles FAG, CEF et CQR qui ont tous trois les mêmes angles. Les longueurs des côtés de ces trois triangles sont donc proportionnelles.
Si, par exemple, FG = k CR alors $S(\mathrm{FAG}) = k^2 S(\mathrm{CQR})$ et $p(\mathrm{FAG}) = k\ p(\mathrm{CQR})$. On en déduit que $b = kc$.
Posons $A = \mathrm{DE}$, $B = \mathrm{AG}$ et $C = \mathrm{PQ}$ (A, B, C sont trois distances).
D'après ce qui précède, on a $\frac{b}{a} = \frac{B}{A}$ et $\frac{c}{a} = \frac{C}{A}$.

Il reste à chercher une relation entre A, B et C.

- On a $\mathrm{AG} = B$ et $\mathrm{FG} = A$ donc $\mathrm{AF} = \sqrt{A^2 - B^2}$.
- En considérant le centre O du grand cercle, comme (FO) est la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{EFP}}$, on a $\mathrm{FP} = \mathrm{FE} = A$.
- $\widehat{\mathrm{AFG}} = \alpha$ donc $\sin\alpha = \frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{FG}} = \frac{B}{A}$ et $\cos\alpha = \frac{\mathrm{AF}}{FG} = \frac{\sqrt{A^2-B^2}}{A}$.
- Dans le triangle CFE, on a $\sin\alpha = \frac{\mathrm{FE}}{CF}$ donc $\mathrm{CF} = \frac{\mathrm{FE}}{\sin\alpha} = \frac{A^2}{B}$.

  Or $\mathrm{CP} = \mathrm{CF} - \mathrm{FP}$ donc $\mathrm{CP} = \frac{A^2}{B} - A = \frac{A(A-B)}{B}$.

- Dans le triangle CPT, on a $\tan\alpha = \frac{\mathrm{PT}}{\mathrm{CP}}$ donc $\mathrm{PT} = \frac{A(A-B)}{B}\ \frac{B}{\sqrt{A^2-B^2}} = \frac{A(A-B)}{\sqrt{A^2-B^2}}$.
- Dans le triangle RST, on a $\tan\alpha = \frac{\mathrm{ST}}{\mathrm{RS}}$ donc $\mathrm{ST} = C\ \frac{B}{\sqrt{A^2-B^2}}$
- On a $\mathrm{PT} = \mathrm{PS} + \mathrm{ST}$ donc $\frac{A(A-B)}{\sqrt{A^2-B^2}} = C\left(1 + \frac{B}{\sqrt{A^2-B^2}}\right)$.

  On en déduit : $\frac{C}{A} = \frac{A-B}{\sqrt{A^2-B^2}+B} = \frac{1-\frac{B}{A}}{\sqrt{1-\left(\frac{B}{A}\right)^2}+\frac{B}{A}}$.

Alors, d'après la remarque préliminaire, on a $c = a\frac{1-\frac{b}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{b}{a}}$.

Finalement, on a $\boxed{c = \frac{a(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}+b}}$.

Logique, raisonnement, probabilités : éléments de solution

Exercice 1.

Si a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle, on a $a + b > c$.

En considérant les triangles ABC et ABD, on a donc $\mathrm{BC} + \mathrm{CA} > 41$ et $\mathrm{BD} + \mathrm{DA} > 41$.

Avec les mesures données, il y a 10 sommes de deux entiers possibles :

$7 + 13$; $7 + 18$; $7 + 27$; $7 + 36$; $13 + 18$; $13 + 27$;

$13 + 36$; $18 + 27$; $18 + 36$ et $27 + 36$.

Parmi ces sommes, seules les quatre dernières et $7 + 36$ peuvent convenir donc les distances BC, CA, BD et DA valent dans le désordre : $13, 18, 27, 36$ ou $7, 18, 27, 36$.

Dans le premier cas, on peut choisir $\mathrm{AC} = 36$ et on a nécessairement $\mathrm{CD} = 7$. On doit alors avoir $\mathrm{AD} + 7 > 36$ ce qui est impossible avec $13, 18$ ou 27.

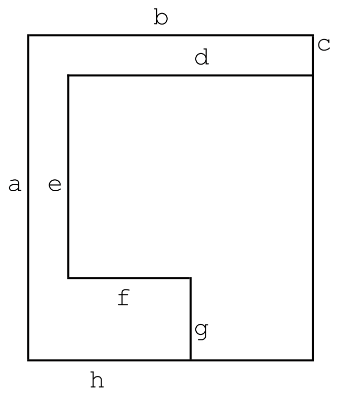
Le seul cas qui convient est donc le deuxième et, finalement, $\boxed{\mathrm{CD} = 13}$.

Remarque : on peut effectivement prendre $\mathrm{AC} = 36$, $\mathrm{AD} = 27$, $\mathrm{BC} = 7$, $\mathrm{BD} = 18$ et $\mathrm{CD} = 13$.

Exercice 2.

Si Ali dit vrai alors Bela dit vrai donc Ali ment ce qui est contradictoire.
Ainsi Ali ment donc Bela ne dit pas toujours la vérité et, là, il dit vrai donc Cora ment.
Conclusion : $\boxed{\text{Ali et Cora mentent ; Bela dit la vérité}}$.

Exercice 3.



On note les longueurs comme sur la figure ci-contre.
a et b sont les deux plus grandes longueurs donc $\{a; b\} = \{7; 8\}$.

On a $c + e + g = a$ et $h + d - f = b$ ou encore $d + h = b + f$.

Enfin l'aire de la figure à 6 côtés est $S = d(a - c) - fg$.

- Si $a = 7$ alors $\{c; e; g\} = \{1; 2; 4\}$ donc $\{d; h; f\} = \{3; 5; 6\}$.
  On a nécessairement $b = 8$; $f = 3$ et $\{d; h\} = \{5; 6\}$.
  S est maximale quand d l'est et quand c et g sont minimaux :
  Si $d = 6$; $c = 1$ et $g = 2$ alors $S = 30$
  Si $d = 6$; $c = 2$ et $g = 1$ alors $S = 27$

- Si $a = 8$ alors $\{c; e; g\} = \{1; 2; 5\}$ ou $\{1; 3; 4\}$
  - Si $\{c; e; g\} = \{1; 2; 5\}$ alors $\{d; h; f\} = \{3; 4; 6\}$.
    On a nécessairement $b = 7$; $f = 3$ et $\{d; h\} = \{4; 6\}$.
    Si $d = 6$; $c = 1$ et $g = 2$ alors $S = 36$
    Si $d = 6$; $c = 2$ et $g = 1$ alors $S = 33$

- Si Si $\{c; e; g\} = \{1; 3; 4\}$ alors $\{d; h; f\} = \{2; 5; 6\}$. Avec $b = 7$, l'égalité $d + h = b + f$ est impossible.

Conclusion : L'aire maximale est $\boxed{S = 36}$ $((a, b, c, d, e, f, g, h) = (8{,}7{,}1{,}6{,}5{,}3{,}2{,}4))$.

Exercice 4.

Numérotons les bouts de 1 à 6.

Les liaisons possibles avec 1et 2 sont : 12 34 56 ; 12 35 46 et 12 36 54.

De même, il y en a 3 avec 1 et 3, 1 et 4, 1 et 5 et 1 et 6. Soit au total 15 possibilités.

Comme il y en a 15 de chaque côté de la main, le nombre total de possibilités est 15^2.

Comptons le nombre de cas favorables :

Supposons que les liaisons soient 12 34 56 d'un côté.

Dans ce cas, on obtiendra une courbe fermée dès l'instant qu'on ne retrouve pas une des liaisons 12 34 56 de l'autre côté, c'est-à-dire avec l'une des huit liaisons suivantes :

13 25 46 ; 13 26 45 ; 14 25 36 ; 14 26 35 ;

15 23 46 ; 15 24 36 ; 16 23 45 ; 16 24 35 .

Comme ceci est vrai pour chacune des 15 combinaisons d'un côté, il y a 8×15 cas favorables.

Finalement la probabilité cherchée est $\frac{8\times 15}{15\times 15} = \boxed{\frac{8}{15}}$.

Exercice 5.

Notons P une demi-journée avec pluie et S une demi-journée sans pluie.

Il y a quatre journées possibles : PP ; PS ; SP ; SS. On note ainsi le nombre de telles journées.

Par hypothèse, on a $\mathrm{PS} + \mathrm{PP} + \mathrm{SP} = 11$; $\mathrm{PP} = 0$; $\mathrm{SS} + \mathrm{SP} = 9$ et $\mathrm{PS} + \mathrm{SS} = 12$.

En additionnant les deux dernières égalités membre à membre, et en remplaçant $\mathrm{PS} + \mathrm{SP}$ par 11, on obtient : $2\mathrm{SS} + 11 = 21$ soit $\mathrm{SS} = 5$.

Conclusion : Le nombre de jours sans pluie est $\boxed{5}$.

Exercice 6.

1. 18 peut être obtenu comme la somme ou comme le produit de deux nombres entiers. Il y a moins de produits (2×9, 3×6) que de sommes (1+17, 2+16, 3+15, … , 9+9). On n'a pas envisagé d'écrire directement 18…

2. Si on considère que les combinaisons envisagées ci-dessus sont des étapes, il faut regarder d'où peuvent provenir : {2, 9}, {3, 6}, {1, 17}, …, {9, 9}, c'est-à-dire se demander si ces paires de nombres entiers peuvent être considérées comme formées de la somme et du produit de deux entiers. Ce n'est jamais le cas. Il n'y a donc que 11 façons d'obtenir 18, chaque fois en une seule étape.

Équations : éléments de solution

Exercice 1 Carré magique

0,5	32	*a*	*b*
c	2	8	2
4	1	*d*	*e*
f	*g*	*h*	16

On appelle P le produit commun aux éléments d'une même ligne, colonne ou diagonale.
Les produits dans lesquels n'apparaît qu'une inconnue donnent : $P = 32c = 64g = 16d$, et ceux dans lesquels interviennent deux inconnues : $P = 16ab = 4de = 2cf = 32be = 8bf$.

En faisant à présent intervenir les produits dans lesquels apparaît h, il vient $h = \frac{1}{4}$.

Il convient naturellement de faire une vérification, car nous avons procédé par condition nécessaire.

Exercice 2 Les triplés

On peut trouver un entier n tel que $a = 2n-1, b = 2n+1, c = 2n+3$. On cherche donc un entier n tel que : $(2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2$ s'écrive avec quatre chiffres identiques. En développant, cela revient à dire que $12n^2+12n+11$ doit être l'un des nombres 1 111, 3 333, 5 555, 7 777, 9 999. En effet, $12n^2+12n+11$ est un nombre impair. On peut encore dire que $12n^2+12n$ doit être … 5 544 (car 1 100, 3 322, 7 766 et 9 988 ne sont pas divisibles par 12. L'équation finale s'écrit : $n^2+n=462$, ou encore $n(n+1)=462$. On établit la liste des diviseurs de 462 et on trouve $n = 21$.

Exercice 3 Encore des triplés

Nous procédons par condition nécessaire. La première condition conduit à $z = x+y-1$. On peut donc remplacer z^2 par $x^2+y^2+2xy-2x-2y+1$ dans la seconde, ce qui donne : $2x^2+2xy+2x+2y=0$, ou encore : $(x+1)(x+y)=0$.

Dans la suite, nous allons donc explorer chacune des deux voies :

1. Recherche des triplets solutions pour lesquels $x=-1$.

La première condition donne $z-y=0$, la seconde $(y+z)(y-z)=0$ et la troisième $2y^3=-2$, ce qui conduit au seul triplet $(-1,-1,-1)$.

2. Recherche des solutions pour lesquelles $y=-x$.

La première condition conduit à $z=1$. La troisième condition donne $2x^3=2$. Seul le cas $x=1$ reste à examiner. Il conduit au triplet $(1,-1,1)$.

Comme nous avons procédé par condition nécessaire, une vérification reste à faire.

Exercice 4 Fractions égyptiennes

En réduisant au même dénominateur, on obtient l'égalité $2013(x+y)=xy$. Ce qu'on peut écrire aussi (c'est la factorisation forcée) : $(x-2013)(y-2013)=2013^2$. Il reste à trouver les diviseurs de $2\,013^2$ et à identifier. Les paires de nombres dont le produit est $2\,013^2$ sont :{1, $2\,013^2$}, {3, 2 013×671},{9, 671×671, {11, 2 013×183},{33, 2 013×61}, etc. Elles permettent de « fabriquer » les solutions (x, y) en additionnant 2 013 à chacun des éléments de la paire. Une vérification finale s'impose.

Exercice 5 L'un d'eux est un

La condition s'écrit $xyz=1$ et $(x+y+z)=xy+yz+zx$. Cette dernière condition peut également s'écrire :

$(x-1)(y-1)(z-1)-xyz+1=0$. Ou encore $(x-1)(y-1)(z-1)=0$. D'où le résultat.

Exercice 6 Encore la méthode de la factorisation forcée

Le problème s'écrit : $(x+5)(y+6)=3xy$

On développe et on réorganise pour obtenir : $(2x-5)(y-3)=45$

Les paires de nombres entiers dont le produit est 45 sont : {1, 45}, {3, 15}, {5, 9}. Les systèmes résolus donnent les couples possibles de solutions : (3, 48), (25, 4), (4, 18), (10, 6), (5, 12) et (7, 8).

Tous conviennent.

Exercice 7 Économie de métal

Plaçons un point M sur le segment [EF], supporté par la médiatrice des segments [AB] et [CD], à la distance *x* de F. Les points P et Q sont placés respectivement sur [AD] et [BC], à la distance de F. Les points P et Q sont placés respectivement sur [AD] et [BC], à la distance *y* de A respectivement de B. Par symétrie, les parcelles FMQC et FDPM ont la même aire. Il nous reste à la comparer avec celle de ABQMP. La condition d'égalité des aires se traduit par : Aire (APME) = $\frac{1}{2}$ Aire (PMFD), soit :

$$(y+30-x)\times\frac{15}{2}=\frac{1}{2}(x+30-y)\times\frac{15}{2}$$, qui se réduit à $x=y+10$.

La longueur de clôture est : $L=x+2\sqrt{15^2+(30-x-y)^2}$, par application du théorème de Pythagore dans un triangle rectangle d'hypoténuse MQ et de côtés parallèles à ceux du carré.

Cette longueur s'écrit aussi : $L=x+2\sqrt{15^2+(40-2x)^2}$.

On voit qu'en prenant *x* = 20, on utilise 50 m de clôture. En prenant *x* = 18, on en utilise un peu plus de 49 m…