ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2024-2025 **Stage « filé »**

Classe de seconde **Fiche numéro 3**

Parution lundi 10 mars **Retour attendu pour le lundi 31 mars**

Exercice 1 – Calcul littéral et inégalités

Le calcul littéral s'appuie sur plusieurs propriétés algébriques, notamment :

- les identités remarquables ;
- les propriétés opératoires sur les nombres rationnels.

Pour montrer que deux nombres A et B sont égaux, on peut :

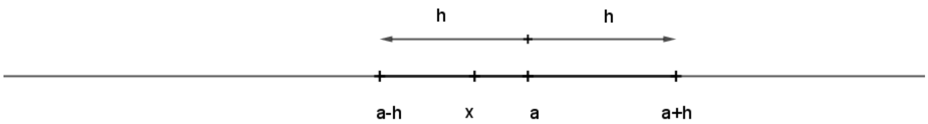
- montrer que $A - B = 0$.

ou

- montrer que $A = C$ et $B = C$.

Des valeurs particulières peuvent aboutir à une conjecture qui ne devient une propriété qu'à l'issue d'une démonstration dans le cas général, c'est-à-dire pour des **nombres quelconques**.

Définition : soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif. On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a - h \leq x \leq a + h$.



On obtient un encadrement de x de longueur $2h$.

1. **a.** Soit a et b deux nombres réels, compléter l'égalité $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \cdots$.

b. En déduire le signe de $a^2 + ab + b^2$ pour tous nombres réels a et b.

2. **a.** Ecrire chacun des produits suivants comme quotient de deux entiers naturels a et b, $b \neq 0$:

$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)$, $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)$, $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)$.

b. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}$.

c. En déduire, que, pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

d. Ecrire le produit $P = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2025^2}\right)$ comme quotient de deux entiers naturels a et b, $b \neq 0$. Quelle valeur la calculatrice affiche-t-elle pour P ?

e. Déterminer à partir de quel entier naturel n, le nombre $\frac{1}{2}$ est une valeur approchée de $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ à 10^{-2}près.

Exercice 2 – Fonctions et inégalités

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.

Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

Propriétés :

(1) Soit a et b deux réels positifs, $a \leq b$ si et seulement si $a^2 \leq b^2$.

(2) Soit a et b deux réels positifs, $a \leq b$ si et seulement si $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Définition : on dit qu'une fonction f admet un minimum (respectivement un maximum) en a sur un ensemble D lorsque pour tout réel x de D, $f(x) \geq f(a)$ (respectivement $f(x) \leq f(a)$). Le nombre $f(a)$ est alors le minimum (respectivement maximum) de f sur D.

1. Représenter dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les fonctions f et g définies sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x$. On notera respectivement C_f et C_g les courbes représentatives de f et g.

2. Soit $x \in [0,1]$. On note M et N les points d'abscisse x qui appartiennent respectivement à C_f et C_g.
   a. Étudier, graphiquement puis algébriquement, le signe de l'expression $\sqrt{x} - x$.
   b. Exprimer en fonction de x la distance MN. On note $d(x)$ cette distance.
   c. Démontrer que la fonction d admet un maximum en $\frac{1}{4}$ et déterminer la valeur de ce maximum.

Exercice 3 – Problèmes d'alignement et de parallélisme

Propriété : soit et B deux points distincts du plan. Pour tout point O du plan, il existe un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

C'est cette propriété qui permet de placer des points à partir d'égalités vectorielles.

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

- La colinéarité de deux vecteurs non nuls traduit le parallélisme de deux droites ou l'alignement de trois points.
- L'égalité de deux vecteurs se traduit par une configuration de parallélogramme.
- La relation de Chasles facilite les calculs.

Les deux questions 1. et 2. ci-dessous sont indépendantes.

1. Soit ABC un triangle. On considère les points I, J et K tels que :

$$\mathrm{I} \text{ est le milieu du segment } [AB],\ \overrightarrow{\mathrm{JC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{JA}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{KB}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{KC}}.$$

   a. Exprimez le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ puis le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BK}}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.
   b. Faire une figure
   c. Montrer que les points $\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}$ sont alignés.

2. Soit ABC un triangle et soit E un point du plan. On considère les points F et G tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{EA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{EB}} - 3\overrightarrow{\mathrm{EC}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

   a. Faire une figure. On pourra s'aider d'un papier quadrillé.
   b. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{EA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{EB}} = 3\overrightarrow{\mathrm{EG}}$.
   c. Montrer que les droites (EF) et (GC) sont parallèles.

Exercice 4 – Colinéarité en géométrie analytique

Un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé lorsque les points I et J définis par les vecteurs $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ sont tels que OI = OJ et les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

Définition : on dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Théorème : dans le plan muni d'un repère, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Définition : dans le plan muni d'un repère, le déterminant du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le nombre $d\acute{e}t(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

L'introduction d'un repère dans un exercice de géométrie permet de démontrer des alignements en s'appuyant sur la condition de colinéarité de deux vecteurs par le déterminant.

1. Démonstration du théorème
   a. Démontrer que si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires alors $xy' - x'y = 0$.
   b. Démontrer que si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont tels que $xy' - x'y = 0$ alors ils sont colinéaires.
   (on pourra traiter à part le cas où l'un au moins des vecteurs est nul)
2. Application

Soit ABCD un carré de côté a. On construit à l'intérieur du carré ABCD le triangle équilatéral ABE et à l'extérieur du carré ABCD le triangle équilatéral CBF. On veut montrer que les points D, E et F sont alignés.

   a. Justifier que si on pose $\vec{\imath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ alors $(\mathrm{A}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormal.

b. Déterminer les coordonnées des points D, E et F dans ce repère.
c. Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

Exercice 5 – Nombres entiers naturels

Définition : un entier naturel a est un multiple d'un entier naturel b lorsqu'il existe un entier k tel que $a = bk$.
Écriture décimale d'un entier naturel : Soit N un entier décimal à quatre chiffres dont l'écriture décimale est $\overline{abcd}$.
Cela signifie que $N = 1\,000a + 100b + 10c + d$ et $0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9, 0 \leq d \leq 9$.

1. Montrer que le produit de trois entiers naturels consécutifs augmenté du nombre central est un cube parfait (le cube d'un entier naturel).
2. Existe-il trois entiers naturels consécutifs dont la somme vaut 2 025 ? Même question pour 5 entiers naturels consécutifs, puis pour 6 entiers naturels consécutifs.
3. Trouver tous les nombres $\overline{abc}$ à trois chiffres tels que $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$
4. Soit $N = \overline{abcd}$ un nombre à quatre chiffres et soit $N' = \overline{dcba}$. On considère la différence positive D entre ces deux nombres. Combien de chiffres 5 le nombre D peut-il au maximum avoir ?