ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2024-2025 **Stage « filé »**

Classe de seconde **Fiche numéro 2**

Parution lundi 20 janvier **Retour attendu pour le lundi 10 février**

Exercice 1 – Encore un peu de calcul littéral

Propriété : pour tous réels a et b :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Cette propriété est très utile aussi bien pour factoriser que pour développer.

On peut notamment faire des « factorisations forcées » pour se ramener à l'une de ces égalités pour factoriser une expression.

Soit a, b, c trois nombres réels.

1. Développer les expressions $(a+b+c)^2$ et $(a+b+c)^3$.
2. En déduire que si on pose $N = (a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3)$ alors $N = 3(a+b)(c^2 + c(a+b) + ab)$ (*)
3. Écrire N comme produit de trois expressions de degré 1.

Exercice 2 – Un peu de logique

Quelques rappels de logique : soit A et B deux propositions

Si lorsque A est vérifiée alors B est automatiquement vérifiée, on dit que ***A* implique *B*** et on note $A \Longrightarrow B$.

La réciproque de cette implication est ***B* implique A** et on note $B \Longrightarrow A$.

Lorsque ces deux implications sont vraies on dit que ***A* et *B* sont équivalentes** et on note $A \Longleftrightarrow B$.

Par exemple, soit A : « le nombre réel x est tel que $x = 1$ » et B : « le nombre réel x est tel que $x^2 = 1$ ».

On a bien $A \Longrightarrow B$ mais pas $B \Longrightarrow A$ car le carré de -1 vaut aussi 1.

En revanche soit A : « le nombre réel x appartient à $\{-1,1\}$ » et B : « le nombre réel x est tel que $x^2 = 1$ ».

On a à la fois $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$ puisque les solutions de l'équation $x^2 = 1$ sont -1 et 1 donc $A \Longleftrightarrow B$.

Rappel sur les inégalités

Théorème :

Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$, si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$ et si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.

En particulier si $0 \leq a \leq b$ alors $0 \leq a^2 \leq b^2$ et si $0 \leq a \leq b$ alors $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Rappel d'arithmétique :

Définition : On dit qu'un nombre entier a est un *multiple* d'un nombre entier b s'il existe un nombre entier k tel que $a = kb$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si A implique B puis écrire la réciproque de cette implication et déterminer si cette réciproque est vraie.

On rappelle, qu'en mathématiques, chacune des réponses doit être justifiée.

1. A : « le quadrilatère MNPQ est un losange » et :
   a. B_1 : « les diagonales du quadrilatère MNPQ sont perpendiculaires »
   b. B_2 : « le quadrilatère MNPQ est un carré ».
2. A : « le nombre réel x est tel que $x^2 \leq 9$ »
   a. B_1 : « le nombre réel x est tel que $x \in [0,3]$ »
   b. B_2 : « le nombre réel x est tel que $x \in [-3,3]$ ».
3. A : « l'entier naturel n est un multiple de 12 »
   a. B_1 : « l'entier naturel n est un multiple de 4 »
   b. B_2 : « la somme des chiffres de l'entier naturel n est un multiple de 3 »

Exercice 3 – Extremum d'une fonction

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet sur I un maximum (respectivement un minimum) en x_0 lorsque pour tout réel x de I, $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geq f(x_0)$).

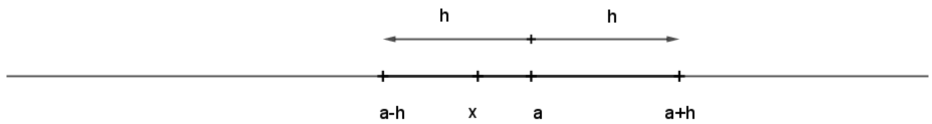
Dans les deux cas, on dit que la fonction f admet sur I un extremum.

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x-3)(x+1)$.

1. Représenter la fonction f, à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, et émettre une conjecture sur l'existence d'un extremum de la fonction f sur $\mathbf{R}$.
2. Développer l'expression et démontrer cette conjecture.

Exercice 4 – Encadrements et valeurs approchées

Définition : soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif. On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a-h \leq x \leq a+h$.



On obtient un encadrement de x de longueur $2h$.

1. On suppose que x est un nombre réel tel que $5{,}178 \leq x \leq 5{,}18$. Donner une valeur approchée de x à 10^{-3} près.
2. Soit $x = 1{,}4295$ et $a = 1{,}43$.
   - ***a.*** Peut-on affirmer que a est une valeur approchée de x à 10^{-3}près ?
   - ***b.*** Peut-on affirmer que x est une valeur approchée de a à 10^{-3}près ?

Exercice 5 – Nombres premiers

Définition : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
Définition : deux nombres entiers sont dits premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun positif est 1.
On admettra le théorème suivant :
Théorème 1 : Si un nombre est multiple de nombres premiers entre eux alors il est multiple du produit de ces nombres.
Théorème 2 (division euclidienne): soit a et b deux entiers naturels tels que b est non nul, alors il existe un unique couple (q,r) d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

1. Soit p un nombre premier tel que $p \geq 3$. Déterminer les entiers naturels x et y tels que $x^2 - y^2 = p$.
2. Soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$.
   - ***a.*** Montrer que $p^2 - 1$ est un multiple de 4 et de 3.
     (pour multiple de 3, on pourra considérer les restes de la division euclidienne de p par 3).
   - ***b.*** En déduire que $p^2 - 1$ est un multiple de 6.

Exercice 6 – Triangle rectangle et cercle

Pour déterminer la nature d'un triangle ou d'un quadrilatère, on fait appel aux caractérisations d'un triangle particulier (isocèle, équilatéral, rectangle, isocèle rectangle) ou d'un quadrilatère particulier (parallélogramme, rectangle, losange, carré) en étant le plus précis possible.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre I. On considère deux points A et B diamétralement opposés sur ce cercle et un point C, distinct de A et B, sur le cercle $\mathcal{C}$.

1. Soit D le point diamétralement opposé à C sur $\mathcal{C}$. Déterminer la nature du quadrilatère ADBC.
2. En déduire la nature du triangle ABC.