



Exercice 1 – Histoires de carrés

Définition 1 : un nombre entier a est un multiple d'un nombre entier b s'il existe un nombre entier k tel que $a = bk$.

On dit aussi alors que b est un diviseur de a .

Définition 2 : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Propriété : pour tous réels a et b , $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

1. a. Soit x un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
Montrer que la phrase « la somme des carrés des entiers consécutifs $x - 1, x, x + 1$ est égale à la somme des carrés des deux entiers consécutifs suivants $x + 2, x + 3$ » se traduit par l'équation $x(x - 10) = 11$.
b. Montrer que cette équation a une unique solution dans \mathbf{N} .
2. a. Calculer les sommes $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$ et $5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2$.
b. Plus généralement, soit n un entier naturel.
Calculer la somme $(4n + 1)^2 - (4n + 2)^2 - (4n + 3)^2 + (4n + 4)^2$.
c. En déduire la valeur du nombre :

$$N = (1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) + \dots + (2\,021^2 - 2\,022^2 - 2\,023^2 + 2\,024^2) + 2\,025^2 - 2\,026^2$$

Exercice 2 – Calcul littéral et géométrie

Propriété : pour tous réels a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ et } (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Cette propriété est très utile aussi bien pour factoriser que pour développer.

On peut notamment faire des « factorisations forcées » pour se ramener à l'une de ces égalités pour factoriser une expression.

Soit ABC un triangle. On note p le demi-périmètre du triangle. On note $BC = a, CA = b, AB = c$.

On veut montrer que l'aire S du triangle ABC est $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$. (*)

1. Démontrer que $16p(p - a)(p - b)(p - c) = ((b + c)^2 - a^2)(a^2 - (b - c)^2)$.
2. On suppose que le triangle ABC est rectangle en A.
 - a. Exprimer l'aire S en fonction de b et c .
 - b. En déduire que, dans le cas d'un triangle rectangle, la relation (*) est bien vérifiée.
3. On suppose que le triangle ABC a tous ses angles aigus. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A et on pose $AH = h$ et $BH = x$.
 - a. Exprimer de deux façons différentes le nombre h^2 à l'aide des nombres a, b, c, x .
 - b. En déduire une expression du nombre x en fonction des nombres a, b, c puis une expression du nombre h^2 uniquement en fonction des nombres a, b, c .
 - c. Démontrer que $S^2 = \frac{1}{16}(4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2))$ puis que $S^2 = \frac{1}{16}(b^2 - (a - c)^2)((a + c)^2 - b^2)$.
 - d. En déduire que $S^2 = \frac{1}{16}(2p - 2a)(2p - 2c)(2p - 2b)2p$ et conclure.

Exercice 3 – Fonction et équation

Définition : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I . Si on note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g leurs courbes respectives dans un repère du plan, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Soit ABCD un carré dont le côté mesure 4. On considère un point M de la diagonale [BD] et H son projeté orthogonal sur (BC) c'est-à-dire le pied de la hauteur issue de M dans le triangle BCM.

L'objectif de l'exercice est de déterminer la position si elle existe, du point M tel que l'aire du trapèze ABHM et l'aire du triangle DMC soient égales.

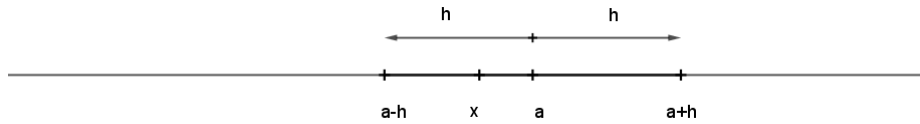
On note $BH = x$.

1. Dans quel intervalle varie x ?
2. Déterminer, en fonction de x , l'aire du trapèze ABHM et l'aire du triangle DMC.

3. On pose, pour tout nombre réel x , $f(x) = \frac{x(x+4)}{2}$ et $g(x) = 2(4 - x)$. En représentant les fonctions f et g , à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, émettre une conjecture sur l'existence d'une position du point M telle que l'aire du trapèze ABHM soit égale à l'aire du triangle DMC.
4. a. Démontrer que le problème posé revient à résoudre l'équation $x(x + 4) = 4(4 - x)$.
b. Montrer que cette équation s'écrit aussi $(x + 4)^2 - 32 = 0$ et résoudre algébriquement le problème posé.

Exercice 4 – Encadrements et valeurs approchées

Définition : soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif. On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a - h \leq x \leq a + h$.



On obtient un encadrement de x de longueur $2h$.

Soit a, b, c et d des nombres réels

Théorème 1 : si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.

(si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ donc, comme $b - a = (b + c) - (a + c)$, $(b + c) - (a + c) \geq 0$ soit $(b + c) \geq (a + c)$)

Théorème 2 :

Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$

Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$

Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.

Théorème 3 :

Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.

Théorème 4 :

Si $0 \leq a \leq b$ alors $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

6

Dans tout exercice portant sur des inégalités, on se ramène souvent à l'un au moins de ces théorèmes.

1. On sait que 1,73 est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-2} près, que 1,41 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près et que 3,14 est une valeur approchée de π à 10^{-2} près. Traduire ces informations par des encadrements.
2. En déduire un encadrement puis une valeur approchée de $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.
3. Donner un encadrement de $-\pi$ puis un encadrement de $\sqrt{3} + \sqrt{2} - \pi$. Peut-on, avec les valeurs approchées prises au départ, comparer les nombres $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et π ?
4. Reprendre les questions en prenant comme données de départ :
1,7321 est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-4} près, que 1,4141 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près et que 3,1416 est une valeur approchée de π à 10^{-4} près.

Exercice 5 – Triangle rectangle et cercle

Pour déterminer la nature d'un triangle ou d'un quadrilatère, on fait appel aux caractérisations d'un triangle particulier (isocèle, équilatéral, rectangle, isocèle rectangle) ou d'un quadrilatère particulier (parallélogramme, rectangle, losange, carré) en étant le plus précis possible.

L'objectif de cet exercice est de **démontrer un théorème**.

Soit \mathcal{C} un cercle de centre I. On considère deux points A et B diamétralement opposés sur ce cercle et un point C, distinct de A et B, sur le cercle \mathcal{C} .

On veut déterminer la nature du triangle ABC.

1. Soit D le point diamétralement opposé à C sur \mathcal{C} . Déterminer la nature du quadrilatère AD BC.
2. En déduire la nature du triangle ABC.
3. Quel théorème peut-on énoncer ?