ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2022-2023 **Stage « filé »**

Classe de troisième **Fiche numéro 1**

Parution lundi 12 décembre **Retour attendu le jeudi 12 janvier**

Exercice 1 – Opérations sur les nombres rationnels

Définition 1 : soit a et b deux nombres entiers relatifs tels que $b \neq 0$, on appelle **quotient de a par b le nombre q** qui multiplié par b donne a , c'est-à-dire **tel que $a = bq$**. On note $q = \frac{a}{b}$ et on dit que q est un nombre rationnel. On parle aussi de fraction.

Définition 2 : soit a un nombre entier relatif non nul, l'inverse de a est le nombre a' tel que $aa' = 1$.

Propriétés :

(1) pour tous nombres entiers relatifs a, b, c tels que $c \neq 0$, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$;

(2) pour tous nombres entiers relatifs a, b, k tels que $b \neq 0$ et $k \neq 0$, $k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$ et $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$;

(3) pour tous nombres entiers relatifs a, b, c, d tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Pour effectuer tout calcul sur des nombres rationnels, il suffit de se ramener à l'une de ces définitions, principalement celle du quotient de a par b, ou de ces propriétés.

1. Démontrer les deux premières propriétés.
2. Justifier que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $\frac{1}{a}$ est l'inverse de a et $\frac{b}{a}$ est l'inverse de $\frac{a}{b}$.
3. Démontrer que si a, b, c et d sont quatre entiers relatifs tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$.

Exercice 2 – Fractions égyptiennes

Définition : on appelle *fraction égyptienne* une fraction dont le numérateur vaut 1 et le dénominateur est un entier naturel non nul.

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'écriture de fractions sous la forme d'une somme de fractions égyptiennes de dénominateurs deux à deux distincts.

Exemple : $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$ est une somme de fractions égyptiennes de dénominateurs deux à deux distincts mais la décomposition $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ n'est pas une somme conforme à ce qui est cherché car les dénominateurs sont égaux.

1. Montrer qu'il existe deux entiers naturels non nuls distincts a et b tels que $\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
2. En déduire trois entiers naturels non nuls et deux à deux distincts tels que $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
3. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$.

   b. En déduire que pour entier naturel n strictement supérieur à 1, $\frac{2}{n}$ peut s'écrire comme une somme de fractions égyptiennes de dénominateurs deux à deux distincts.

Exercice 3 – Écriture décimale d'un entier naturel

Tout nombre entier naturel N s'écrit dans le système décimal (en base 10) à l'aide de chiffres représentant les unités, les dizaines, les centaines, les milliers….

Exemple : Soit $N = 3 \times 1\,000 + 8 \times 100 + 5 \times 10 + 2$. On note alors $N = \overline{3852}^{10}$ ou plus simplement 3 852.

Dire que $\overline{abcd}$ est l'écriture décimale d'un nombre N c'est donc dire que $N = 1\,000a + 100b + 10c + d$.

1. Dans le système décimal, combien de nombres à cinq chiffres peut-on écrire en utilisant une seule fois chacun des chiffres 1, 2, 3, 4, 5 ?

On range ces nombres en ordre croissant. Quelle place occupe le nombre 41 532 ?

2. Montrer que le carré d'un nombre n'a jamais 2, 3, 7, ou 8 comme chiffre des unités.

3. **a.** Soit $\overline{abc}$ l'écriture décimale d'un nombre N. Exprimer N en fonction de a, b et c.

b. Montrer que si M a pour écriture décimale $\overline{cab}$, alors le nombre $N - M$ est un multiple de 9.

c. Ce résultat est-il encore valable pour tout autre nombre dont l'écriture décimale comporte les chiffres a, b et c ?

Exercice 4 – Cercle circonscrit et cercle inscrit

On rappelle que tout triangle admet un cercle circonscrit (passant par ses trois sommets) et que le centre de ce cercle est le point de concours des médiatrices des côtés du triangle.

Définition : une droite est dite tangente à un cercle en un point I lorsque cette droite et ce cercle ont pour unique point commun le point I.

Propriété : si une droite D est tangente en un point I à un cercle de centre O alors les droites D et (OI) sont perpendiculaires.

On appelle cercle *inscrit* dans un polygone un cercle tangent à chacun des côtés du polygone.

Propriété : Un polygone régulier admet un cercle inscrit et ce cercle est concentrique au cercle circonscrit au polygone.

On considère un polygone régulier dont les côtés ont pour longueur 2. Calculer l'aire de la couronne délimitée par le cercle circonscrit au polygone et le cercle inscrit dans le polygone.

Exercice 5 – Bissectrices dans un triangle

Pour calculer des distances, on peut penser à s'appuyer sur :

- Le théorème de Pythagore ;
- Le théorème de Thalès ;
- Des triangles isométriques ;
- Des triangles semblables.

L'objectif de cet exercice est de démontrer que les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes et que leur point d'intersection est le centre d'un cercle inscrit dans le triangle.

a. Soit ABC un triangle. On note I le point d'intersection des bissectrices des angles $\widehat{\mathrm{BAC}}$ et $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et H, K, L les projetés orthogonaux de I respectivement sur (AB), (BC) et (CA).
Montrer que IH = IK = IL et en déduire que (IC) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{ACB}}$.

b. Application : on considère un triangle ABC isocèle en A et tel que AB = AC = 17 et BC = 16.
Déterminer le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Exercice 6 – de l'importance des figures

En s'appuyant sur la figure ci-contre, montrer que si on considère un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent a et b et dont l'hypoténuse mesure c, alors le rayon r du cercle inscrit dans le triangle vérifie les égalités :

$$r = \frac{ab}{a+b+c} \quad \text{et} \quad r = \frac{a+b-c}{2}.$$