

Exercice 1 – Suite de fonctions

Connaissances requises : toutes les connaissances sur l'exponentielle et le logarithme (limites, dérivée, variations, propriétés algébriques)

Les questions faisant intervenir les suites nécessitent les connaissances sur les limites par comparaison ou par encadrement.

On pourra faire usage du théorème des valeurs intermédiaires et de ses corollaires relatifs aux fonctions strictement monotones.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on définit dans l'intervalle $]0, +\infty[$ la fonction $f_n: x \mapsto \frac{\ln(1+x^n)}{x}$.

Pour les questions 1 à 4, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1.
 - a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^n)}{x^n}$. En déduire que la fonction f_n admet en 0 une limite que l'on précisera.
 - b. Montrer que la fonction f_n admet en $+\infty$ une limite que l'on déterminera.
2. Calculer la dérivée de la fonction f_n sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et montrer que, pour tout réel $x > 0$, on peut écrire $f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{x^2(1+x^n)}$ où g_n désigne la fonction $x \mapsto nx^n - (1+x^n)\ln(1+x^n)$.
3. Etude du signe de la fonction g_n
 - a. Calculer la fonction dérivée de g_n .
 - b. Résoudre l'équation $g'_n(x) = 0$ et montrer qu'elle admet pour unique solution $a_n = e^{\frac{1}{n}\ln(e^{n-1}-1)}$.
 - c. Etudier le signe de g'_n .
 - d. Montrer que $g_n(e) < 0$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x)$
 - e. Etablir le tableau de variation de la fonction g_n sur $]0, +\infty[$ et montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution b_n , cette solution appartenant à l'intervalle $]a_n, e[$.
4. Etablir le tableau de variation de la fonction f_n .
5.
 - a. Montrer que la suite (b_n) converge vers un réel que l'on précisera.
 - b. On désigne par M_n le maximum de la fonction f_n . Montrer que la suite (M_n) admet une limite que l'on déterminera.
6. Construire à l'aide d'un logiciel de géométrie la courbe C_n de la fonction f_n pour les valeurs de n allant de 2 à 10.
Montrer qu'il existe un point A dont on calculera les coordonnées appartenant à toutes les courbes C_n .

Exercice 2 – Comparaison de moyennes

On montre que pour tout entier n tel que $n \geq 1$, la fonction f définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(x) = x^n$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbf{R}^+$ et strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$. Comme de plus $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires permet de dire que f est une bijection de $\mathbf{R}^+$ sur $\mathbf{R}^+$ et admet donc une bijection réciproque g définie sur $\mathbf{R}^+$. On dit que g est la fonction racine $n^{\text{ième}}$ et on note pour tout x de l'intervalle $\mathbf{R}^+$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. On note aussi $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

La fonction racine $n^{\text{ième}}$ est strictement croissante et vérifie les propriétés suivantes :

Pour tous réels a et b positifs $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$, si de plus $b \neq 0$, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Rappel : pour tous réels strictement positifs a et b , $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$\ln a^n = n \ln a \text{ et } \ln a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln a.$$

Pour comparer des produits, il peut être utile de comparer les logarithmes népériens de ces produits et une somme de logarithmes népériens peut être transformée en le logarithme népérien d'un produit.

Soit n un entier tel que $n \geq 2$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$, n réels strictement positifs on définit la moyenne arithmétique m , la moyenne géométrique g et la moyenne harmonique h de ces réels par :

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.
2. Appliquer l'inégalité précédente successivement aux nombres $\frac{a_1}{m}, \frac{a_2}{m}, \dots, \frac{a_n}{m}$ pour comparer les nombres g et m .
3. Appliquer aux nombres $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ l'inégalité trouvée précédemment pour les nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ et en déduire une inégalité entre m et h .

Exercice 3 – Fonctions puissances

Dans le prolongement de la fonction racine $n^{\text{ième}}$, si α est un réel non nul, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction puissance notée f_α par $f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$.

On rappelle que pour tout réel $x > 0$, $x = e^{\ln x}$.

1. Etudier, suivant les valeurs de α , les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction f_α .
2. Etudier, suivant les valeurs de α , les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction f_α .
3. Dans le cas où $\alpha > 0$, on prolonge la fonction f_α en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$. Montrer que la nouvelle fonction f_α est alors continue en 0 et étudier, suivant les valeurs de α , sa dérivabilité en 0.
4. Choisir plusieurs valeurs particulières de α représentatives des différents cas étudiés et tracer, sur un même graphique, les courbes représentatives des fonctions f_α correspondantes.

Exercice 4 – Point d'inflexion

L'étude des variations d'une fonction dérivable s'appuie le plus souvent sur le signe de sa fonction dérivée, les valeurs où celle-ci s'annule ne suffisant pas pour déterminer ce signe.

Propriété : soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative. C admet un point d'inflexion en un point d'abscisse x_0 si et seulement si la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en x_0 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (x + 1)e^{-x^2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de la fonction f .
2. Déterminer les points d'inflexion de la courbe C .
3. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe C .

Exercice 5 – Fonction convexe et intégrale

Définition : Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit f une fonction définie sur l'intervalle I . Si On note C la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la fonction f est dite **convexe sur I** si et seulement si pour tous points A et B de la courbe C d'abscisses respectives des réels a et b de I tels que $a < b$, le segment $[AB]$ est situé au-dessus de la courbe C sur l'intervalle $[a, b]$.

Propriété : Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit f une fonction définie sur l'intervalle I . Si On note C la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la fonction f est **convexe sur I** si et seulement si sa courbe représentative C est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

L'objectif de l'exercice est de démontrer que si a et b sont deux réels tels que $a < b$ et si f est une fonction convexe et dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ et dont la dérivée f' est continue sur $[a, b]$, alors :

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

- Déterminer une équation de la droite passant par les points A et B de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a et b .
En déduire que, pour tout réel $x \in [a, b]$, $f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$.
- Démontrer que $\int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$ et en donner une interprétation géométrique dans le cas où f est une fonction positive sur $[a, b]$.
- Démontrer que, pour tout réel $x \in [a, b]$, $f(x) \geq f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
- Conclure.

Exercice 6 – Suites et probabilités

Propriété : si A et B sont deux événements incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Cette propriété s'étend à une union finie d'événements deux à deux incompatibles.

Propriété : Soient A et B des événements tels que $p(B) \neq 0$; alors $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$.

Cette propriété permet de calculer de nombreuses probabilités en s'appuyant sur un arbre de probabilités.

Une urne contient en proportion 70% de jetons verts, 10% de jetons bleus, 20% de jetons noirs.

On extrait au hasard un jeton de l'urne et l'on note sa couleur.

Un jeu consiste à extraire un jeton de l'urne :

- Si le jeton est bleu, le jeu s'arrête et l'on a gagné.
- Si le jeton est noir, le jeu s'arrête et l'on a perdu.
- Si le jeton est vert, on le replace dans l'urne et l'on recommence l'épreuve.

Soit n un entier naturel non nul. On fixe à n le nombre de fois où l'épreuve précédente est réalisée (épreuve qui peut s'interrompre avant le rang n si l'on a au préalable perdu ou gagné).

Pour tout entier $k \geq 1$ inférieur ou égal à n , on note :

- B_k l'événement « le jeton extrait après k itérations est bleu »
- N_k l'événement « le jeton extrait après k itérations est noir »
- V_k l'événement « le jeton extrait après k itérations est vert »
- G_n l'événement « on a gagné à un rang k inférieur ou égal à n »
- P_n l'événement « on a perdu à un rang k inférieur ou égal à n »

- On se place dans cette question dans le cas où $n = 2$.
 - Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre de probabilité.
 - Calculer la probabilité de chacun des événements V_2, G_2, P_2 .
- n désigne maintenant un entier naturel non nul quelconque. On note respectivement v_n, g_n, p_n la probabilité des événements V_n, G_n, P_n .
 - Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique ; établir l'expression du terme général en fonction de n .
 - Soit un entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$. Justifier que $p(B_k) = 0,1 \times 0,7^{k-1}$ et $p(N_k) = 0,2 \times 0,7^{k-1}$.
 - Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = \sum_{k=1}^n 0,1 \times 0,7^{k-1} \text{ et } p_n = \sum_{k=1}^n 0,2 \times 0,7^{k-1}.$$
 - Exprimer g_n et p_n en fonction de l'entier n .
 - Etudier la convergence des suites $(v_n), (g_n), (p_n)$.
- Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $g_n > 0,32$.

Exercice 7 – Orthogonalité dans un cercle

On peut démontrer une orthogonalité en prouvant qu'un produit scalaire est nul.

Les propriétés opératoires du produit scalaire alliées à la relation de Chasles sont souvent utiles pour calculer des produits scalaires.

On considère un cercle C de centre O et de rayon R et un point M intérieur au cercle. Par le point M , on mène deux droites perpendiculaires qui coupent le cercle en A et A' pour une droite, en B et B' pour l'autre droite. On note I le milieu de $[AB]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = MO^2 - R^2$.
(On pourra introduire le point C diamétralement opposé à A sur le cercle C).
2. Montrer que la droite (IM) est la hauteur issue de M dans le triangle $MA'B'$.

Exercice 8 – Histoires de tétraèdre

Propriété : soit A, B, C, D quatre points de l'espace tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Définition : on dit qu'une droite de l'espace est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

Propriété : si une droite de l'espace est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est perpendiculaire à ce plan.

Méthode : pour montrer que deux droites sont orthogonales, on peut :

- montrer que le produit scalaire de vecteurs directeurs de ces droites est nul ;
- montrer qu'une des droites est perpendiculaire à un plan contenant l'autre droite (en montrant qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan)..

Soit $OABC$ un tétraèdre tel que les triangles OAB, OAC et OBC sont isocèles rectangles en O . Soit I milieu de $[AB]$, H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OIC .

1. **a.** Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales.
b. Que représente le point H pour le tétraèdre $OABC$?
c. Montrer que le point H est l'orthocentre du triangle ABC .
2. On pose $OA = a$.
a. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.
b. En déduire que $OH = \frac{a}{\sqrt{3}}$.
3. Soit D le symétrique du point H par rapport à O .
a. Démontrer que $\left(O, \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$ est un repère orthonormal de l'espace.
b. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D et montrer que $ABCD$ est un tétraèdre régulier (toutes ses arêtes ont la même longueur).