ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2024-2025 — **Stage « filé »**

Classe terminale — **Fiche numéro 2**

Parution lundi 16 décembre — **Retour attendu pour le lundi 20 janvier**

Exercice 1 – Encore un peu de récurrence

Raisonnement par récurrence : utilisé pour démontrer qu'une proposition P_n, dépendant d'un entier $n \geq n_0$, où n_0 est un entier fixé, est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. Il s'agit du *raisonnement par récurrence* :

- On vérifie que la proposition P_n est vraie pour $n = n_0$ (initialisation) ;
- On montre que si la proposition P_n est vraie pour un entier n, alors la proposition P_{n+1} est encore vraie (hérédité).

On peut alors en déduire que la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est majorée si et seulement si il existe un nombre réel M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.
Théorème : Toute suite croissante et majorée est convergente.

1. **a**. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n strictement positif, $\sum_{i=1}^{i=n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
   b. En déduire que toute somme $\sum_{i=m}^{i=n} i^3$ de cubes d'entiers naturels non nuls consécutifs n'est pas un nombre premier.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{N}^*$ par $f(1) = 3$ et, pour tout entier n strictement positif, $f(2n) = (f(n))^2$ et $f(2n+1) = 3f(2n)$.
   a. Calculer les premières valeurs de la suite de terme général $f(n)$.
   b. Émettre une conjecture et la démontrer.

1. **a.** Notons P_n l'affirmation « $\sum_{i=1}^{i=n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ »

   Initialisation : $\sum_{i=1}^{i=1} i^3 = 1$ et $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$ donc l'affirmation P_1 est vraie.

   Hérédité : si, pour un entier $n \geq 1$, P_n est vraie, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{i=n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ montrons que P_{n+1} est vraie c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{i=n+1} i^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

   $$\sum_{i=1}^{i=n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{i=n} i^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4(n+1)) = \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2$$

   Soit $\sum_{i=1}^{i=n+1} i^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ c'est-à-dire P_{n+1} est vraie.
   Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n strictement positif, $\sum_{i=1}^{i=n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

   b. Soit m et n deux entiers tels que $1 < m < n$, $\sum_{i=m}^{i=n} i^3 = \sum_{i=1}^{i=n} i^3 - \sum_{i=1}^{i=m-1} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{m(m-1)}{2}\right)^2$

   Soit $\sum_{i=m}^{i=n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2}\right)$.

   Le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair donc $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2}$ et $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2}$ sont des entiers.

   De plus comme $1 < m < n$, $\frac{m(m-1)}{2} > 0$ et $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} > \frac{n(n+1)}{2} > \frac{1\times 2}{2}$ donc $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} > 1$

   Et $-\frac{m(m-1)}{2} > -\frac{n(n-1)}{2}$ donc $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} > \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}$. Or $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$

   Donc $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} > 1$.

$\sum_{i=m}^{i=n} i^3$ est donc le produit de deux nombres entiers strictement supérieurs à 1 : ce n'est donc pas un nombre premier.

Si $m = 1$ et $m < n$, alors $\sum_{i=m}^{i=n} i^3 = \sum_{i=1}^{i=n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et, comme $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier (démontré précédemment) supérieur strictement à 1 (car $\frac{n(n+1)}{2} > \frac{1\times 2}{2}$), $\sum_{i=m}^{i=n} i^3$ est donc aussi le produit de deux nombres entiers strictement supérieurs à 1 : ce n'est donc pas un nombre premier.

Si $m = 1 = n$ alors $\sum_{i=m}^{i=n} i^3 = 1$ qui n'est pas un nombre premier.

2. **a.** $f(2) = (f(1))^2 = 3^2, f(3) = f(2\times 1+1) = 3f(2) = 27 = 3^3, f(4) = (f(2))^2 = (3^2)^2 = 3^4$…

b. On a donc envie de conjecturer que pour tout entier naturel non nul n, $f(n) = 3^n$.

On va le démontrer en effectuent un raisonnement par récurrence intégrant la parité de l'entier considéré.

On note P_n l'affirmation « $f(n) = 3^n$ »

Initialisation : pour $n = 1$, $f(1) = 3$ donc l'affirmation P_1 est vraie.

Hérédité : si, pour un entier $n \geq 1$, P_k est vraie pour tout entier $k \leq n$, alors montrons que, quelle que soit la parité de n, P_{n+1} est encore vraie.

- Si n est pair alors il existe un entier p tel que $n = 2p$. On a donc $n+1 = 2p+1$
  et $f(n+1) = f(2p+1) = 3f(2p) = 3\times 3^{2p}$ d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $2p \leq n$.
  On a donc $f(n+1) = 3^{2p+1} = 3^{n+1}$ et P_{n+1} est encore vraie.
- Si n est impair alors il existe un entier p tel que $n = 2p+1$. On a donc $n+1 = 2p+2$
  et $f(n+1) = f(2(p+1)) = (f(p+1))^2 = (3^{p+1})^2$ d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $p+1 \leq n$.
  On a donc $f(n+1) = 3^{2(p+1)} = 3^{2p+2} = 3^{n+1}$ et P_{n+1} est encore vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence pour tout entier $n \geq 1$, $f(n) = 3^n$.

Exercice 2 – Recherche d'extremum

Propriété : soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$ et $x_0 \in]a,b[$. La fonction f admet un extremum en x_0 si sa dérivée s'annule **en changeant de signe** en x_0.

Soit $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan. On définit la fonction f du plan dans l'ensemble des nombres réels, associant à tout point M de coordonnées $(x\,,y)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, le nombre réel $f(M) = x^4 + y^4$.
Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1. On se propose de déterminer les valeurs extrémales de la fonction f sur le cercle (C) et dans le disque fermé D délimité par (C).

1. Montrer que pour tout point M de coordonnées $(x\,,y)$ appartenant au cercle (C), $f(M) = 2x^4 - 2x^2 + 1$.
2. En déduire les valeurs extrémales de $f(M)$ sur le cercle (C) et les points en lesquels ces extremums sont atteints.
3. Déterminer les valeurs extrémales de f sur le disque fermé D.

1. Pour un point M de coordonnées (x,y) appartenant au cercle (C), on a la relation : $x^2 + y^2 = 1$.
Donc $f(M) = x^4 + (1-x^2)^2 = 2x^4 - 2x^2 + 1$.

2. Pour un point M du cercle (C), l'abscisse x est un nombre réel de l'intervalle $[-1\,;1]$.
On étudie les variations de la fonction $g : x \to 2x^4 - 2x^2 + 1$ dans l'intervalle $[-1\,;1]$.

Le calcul de la dérivée de la fonction g donne : $\forall x \in [-1;1], g'(x) = 8x^3 - 4x$, d'où $g'(x) = 4x(2x^2-1)$ soit $g'(x) = 4x(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$.

x	-1		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		1
x		-		-	0	+		+	
$2x^2 - 1$		+	0	-		-	0	+	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
g	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

Le maximum de la fonction f sur le cercle (C) est 1 et ce maximum est atteint aux points de coordonnées $(1{,}0), (0{,}1), (0, -1), (-1\,; 0)$.
Le minimum de la fonction f sur le cercle (C) est $\frac{1}{2}$ et ce maximum est atteint aux points de coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3. Pour tout point M du disque D, $f(M) \geq 0$ et $f(0) = 0$ donc le minimum de f est 0 atteint en l'origine.
Pour tout point $M(x, y)$ du disque D, $x^2 + y^2 \leq 1$ donc $y^2 \leq 1 - x^2$. Et par croissance de la fonction « carré » sur $[0, +\infty[$, $y^4 \leq (1 - x^2)^2$. D'où $f(M) \leq g(x)$ avec égalité pour les points M du cercle (C).
Donc le maximum de f est 1.

Exercice 3 – Ensemble de cercles tangents à deux cercles

Préambule :
On donne deux cercles C_1 et C_2 de centres respectifs O_1 et O_2, de rayons respectifs r_1 et r_2 tels que $r_1 \leq r_2$.

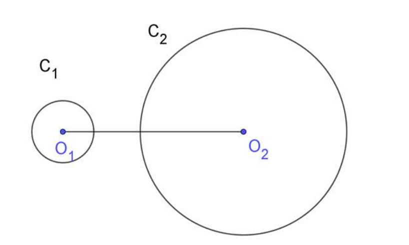
Figure 1


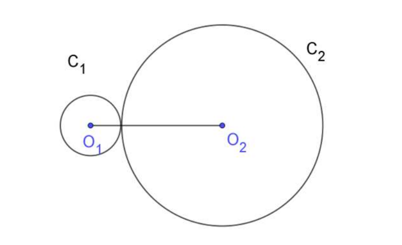
Figure 2


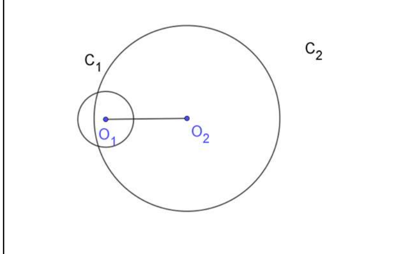
Figure 3


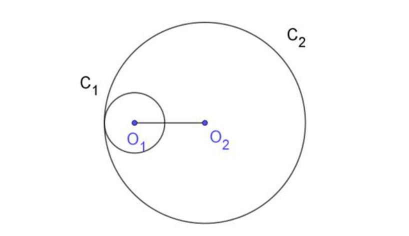
Figure 4


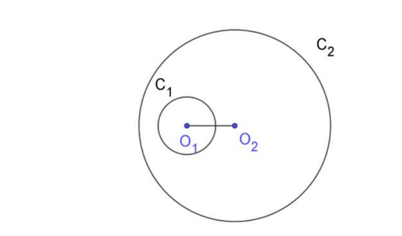
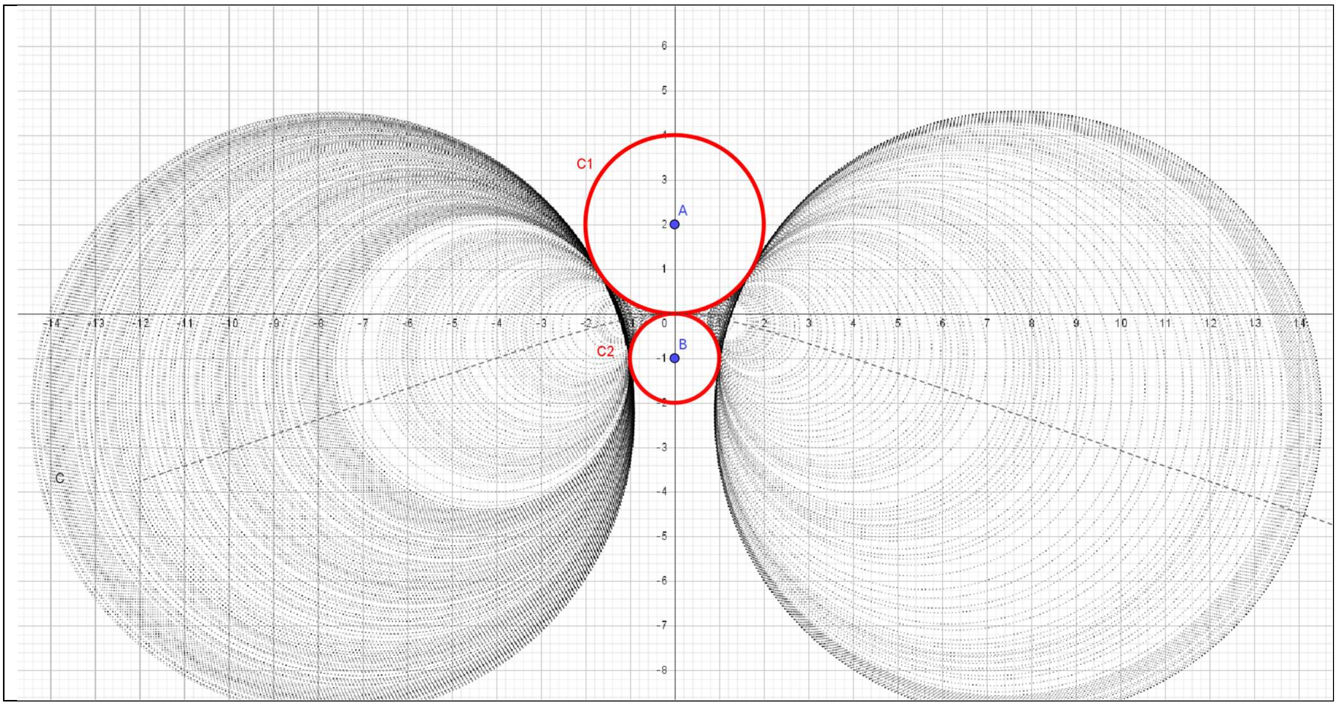
Figure 5


Figure 1 : $O_1O_2 > r_1 + r_2$ et les cercles n'ont pas de point commun.
Figure 2 : $O_1O_2 = r_1 + r_2$ et les cercles sont tangents extérieurement et n'ont qu'un point commun.
Figure 3 : $r_2 - r_1 < O_1O_2 < r_1 + r_2$ et les cercles sont sécants en deux points.
Figure 4 : $O_1O_2 = r_2 - r_1$ et les cercles sont tangents intérieurement et n'ont qu'un point commun.
Figure 5 : $O_1O_2 < r_2 - r_1$ et les cercles n'ont pas de point commun.

Point méthode :
Soit S un système d'équations, on obtient un système équivalent à S en remplaçant :
- une des équations par une combinaison linéaire d'une ou plusieurs autres équations ;
- une inconnue par son expression en fonction des autres inconnues.

On se place dans un repère orthonormé du plan. Soit le cercle C_1 de centre le point $A(0{,}2)$ et de rayon 2 et le cercle C_2 de centre le point $B(0, -1)$ et de rayon 1.
On se propose de déterminer le lieu des centres des cercles qui sont à la fois tangents extérieurement au cercle C_1 et au cercle C_2.
La figure ci-dessous obtenue avec un logiciel de géométrie montre une partie de l'ensemble des cercles tangents extérieurement à C_1 et à C_2.



1. **a.** Soit D un point du plan, r un nombre réel positif et soit C le cercle de centre D et de rayon r.
Montrer que C est tangent extérieurement à C_1 et à C_2 si et seulement si $DA = r + 2$ et $DB = r + 1$.

b. On nomme (x, y) les coordonnées du point D.
En déduire que le cercle C est tangent extérieurement à C_1 et à C_2 si et seulement si
$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = (r+2)^2 \\ x^2 + (y+1)^2 = (r+1)^2 \end{cases}.$$

2. Montrer les équivalences suivantes :
$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = (r+2)^2 \\ x^2 + (y+1)^2 = (r+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y = r \\ x^2 = 8y^2 - 8y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y = r \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{2}} \end{cases}$$

3. Soit la fonction f définie dans $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

a. Montrer que si D est un point de la courbe Γ, alors D est effectivement le centre d'un cercle tangent extérieurement à C_1 et à C_2. Donner alors la réponse à la question posée en tête de l'exercice.

b. Etudier la parité de la fonction f.

c. Etudier le sens de variation de la fonction f.

d. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\sqrt{2}} \right) \right) = 0$ (On dira que la droite d_1 d'équation : $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\sqrt{2}}$ est une asymptote oblique à la courbe Γ en $+\infty$)

e. Construire la courbe Γ, la droite d_1 et la droite d_2 d'équation $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{2}}$ (on pourrait démontrer de même que d_2 est une asymptote oblique à Γ en $-\infty$)

1. **a.** En appliquant la propriété donnée en préambule, on a directement :
Le cercle C est tangent extérieurement au cercle C_1 si et seulement si $DA = r + 2$ et le cercle C est tangent extérieurement au cercle C_2 si et seulement si $DB = r + 1$.
Donc Le cercle C est tangent extérieurement aux cercles C_1 et C_2 si et seulement si $DA = r + 2$ et $DB = r + 1$.

b. Les nombres réels DA, DB et r étant positifs, on a les équivalences suivantes :
$DA = r + 2 \Leftrightarrow DA^2 = (r+2)^2$ et $DB = r + 1 \Leftrightarrow DB^2 = (r+1)^2$
En appliquant la formule donnant le carré de la distance dans un repère orthonormé,
$DA = r + 2 \Leftrightarrow DA^2 = (r+2)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = (r+2)^2$
$DB = r + 2 \Leftrightarrow DB^2 = (r+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = (r+1)^2$
On en déduit la propriété demandée.

2. En remplaçant la première équation du système par la différence des deux équations, on obtient

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2=(r+2)^2 \\ x^2+(y+1)^2=(r+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2-(y+1)^2=(r+2)^2-(r+1)^2 \\ x^2+(y+1)^2=(r+1)^2 \end{cases}$$

Or la première équation s'écrit $y^2-4y+4-y^2-2y-1=r^2+4r+4-r^2-2r-1$
soit $-6y+3=2r+3$ c'est-à-dire $-3y=r$.

On a donc bien $\begin{cases} x^2+(y-2)^2=(r+2)^2 \\ x^2+(y+1)^2=(r+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y=r \\ x^2+(y+1)^2=(r+1)^2 \end{cases}$.

En remplaçant r par $-3y$ dans la deuxième égalité on obtient $x^2+(y+1)^2=(-3y+1)^2$
ce qui donne en développant : $x^2+y^2+2y+1=9y^2-6y+1$ soit $x^2=8y^2-8y$
D'où l'équivalence :

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2=(r+2)^2 \\ x^2+(y+1)^2=(r+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y=r \\ x^2=8y^2-8y \end{cases}.$$

L'équation $x^2=8y^2-8y$ s'écrit aussi $8y^2-8y-x^2=0$ et est donc une équation du second degré d'inconnue y.
Le discriminant est $\Delta=64+32x^2$ est de signe strictement positif quel que soit le nombre réel x.
L'équation admet donc deux solutions réelles données par les formules :

$$y_1=\frac{8-\sqrt{64+32x^2}}{16}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{2}} \text{ et } y_2=\frac{8+\sqrt{64+32x^2}}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}.$$

r étant un réel positif, la relation $-3y=r$ implique que y est négatif. Or $y_1\leq 0$ car $1+\frac{x^2}{2}>1$ alors que $y_2>0$.
D'où l'équivalence :

$$\begin{cases} -3y=r \\ x^2=8y^2-8y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y=r \\ y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{2}} \end{cases}$$

NB. Le cas $x=0$, donne $y=0$ donc $r=0$. On se trouve alors dans le cas limite d'un cercle de rayon nul que l'on pourra assimiler à un point.

3. a. Si un point $\mathrm{D}(x;y)$ appartient à la courbe Γ, alors $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}$. Posons alors $r=-3y$. Comme y est négatif ou nul, r est positif ou nul. On définit le cercle C de centre D et de rayon r.
D'après les équivalences établies aux questions **1. b.** et **2.**, on en déduit $\mathrm{DA}=r+2$ et $\mathrm{DB}=r+1$. Donc le cercle C est tangent extérieurement à C_1 et à C_2.
L'ensemble des centres des cercles tangents extérieurement à C_1 et à C_2 est donc la courbe Γ.

b. L'ensemble $\mathbf{R}$ est symétrique par rapport à zéro et,

$\forall x\in\mathbf{R}, f(-x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{(-x)^2}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}=f(x)$. f est donc une fonction paire.

c. On peut appliquer le théorème de dérivée d'une fonction composée de deux fonctions dérivables.

$\forall x\in\mathbf{R}, f'(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{\frac{2x}{2}}{2\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}=\frac{-x}{4\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}$. On en déduit que $f'(x)$ a le même signe que $-x$.

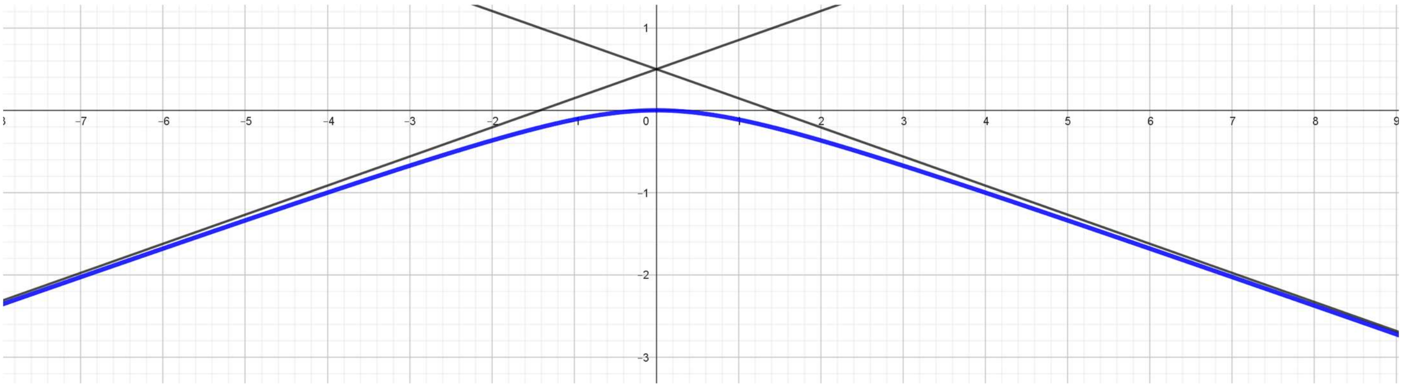
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	0	↘	

d. $f(x)-\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}+\frac{x}{2\sqrt{2}}=\frac{\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}\right)\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}\right)}{\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}=\frac{\frac{x^2}{8}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}{\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}$

Par somme, composée de fonction usuelles on obtient : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}=+\infty$ et par inverse, on en déduit

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)\right)=0$

e. Tracé de la courbe Γ qui est le lieu des centres des cercles tangents à C_1 et à C_2 ainsi que les droites d_1 et d_2.



Exercice 4 – Une équation fonctionnelle pour définir le logarithme népérien

La fonction logarithme népérien a été définie en classe comme fonction réciproque de la fonction exponentielle et elle a pour dérivée la fonction inverse.
On sait que pour tous nombres strictement positifs a et b, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln e = 1$.
On montre que ces deux propriétés caractérisent en fait la fonction logarithme népérien.
On admettra que si deux fonctions f et g ont la même fonction dérivée alors il existe un réel k tel que pour tout réel x, $f(x) = g(x) + k$.

On cherche toutes les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ et telles que pour tous nombres réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$(1) \quad f(ab) = f(a) + f(b).$$

1. Calculer $f(1)$.
2. Pour tout nombre réel $a > 0$, on considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(ax) - f(x)$ où f est une fonction dérivable vérifiant (1). Que peut-on dire des variations de la fonction g ?
3. Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$.
4. Si on pose $f'(1) = k$, montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, $f(x) = k\ln x$.
5. Conclure sur la caractérisation de la fonction logarithme népérien.

1. Si on écrit l'égalité (1) pour $a = b = 1$, on obtient $f(1) = 2f(1)$ d'où $f(1) = 0$.
2. D'après l'égalité (1), pour tout réel $x > 0$, $g(x) = f(a) + f(x) - f(x) = f(a)$ donc g est une fonction constante.
3. Comme somme et composition de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a $g'(x) = af'(ax) - f'(x)$.
4. Comme g est une fonction constante, on en déduit que pour tout réel $x > 0$, $af'(ax) - f'(x) = 0$
   En particulier, pour tout nombre réel $a > 0$, $af'(a) - f'(1) = 0$ soit, si on pose $f'(1) = k$, $f'(a) = \frac{k}{a}$.
   La fonction f a donc même dérivée que la fonction $h: x \mapsto k\ln x$.
   Or $f(1) = 0 = h(1)$, on en déduit que $f = h$
5. Si on a de plus $f(e) = 1$ alors $k\ln e = 1$ soit $k = 1$ et f est la fonction logarithme népérien.

Exercice 5 – Propriétés des combinaisons

<u>Propriétés :</u>
(1) pour tous entiers k et n tels que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
(2) pour tous entiers k et n tels que $0 < k \leq n-1$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.
(3) pour tout entier n, pour tous réels a et b, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
Il y a plusieurs façons de démontrer ces propriétés (raisonnement par récurrence, dénombrement dans des tirages de boules ou des chemins…). Ces méthodes peuvent être reprises pour démontrer d'autres propriétés des combinaisons.

On veut montrer que pour tout entier n,

(i) $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$ (ii) $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ (iii) $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

a. Démontrer par récurrence la relation (i) en s'appuyant sur les propriétés (1) et (2).

b. Démontrer la relation (ii) en s'appuyant sur la propriété (3).

c. Démontrer la relation (iii) en dénombrant des tirages de boules.

d. En considérant la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, démontrer que pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}$.

a. Pour $n = 0$, l'égalité est vraie puisqu'elle s'écrit $1 = 1$.

Si l'égalité est vraie au rang $n-1$, alors $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$

Soit, en s'appuyant sur la propriété (2) :

$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \left(\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right) + \left(\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right) + \cdots + \left(\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right) + \binom{n}{n}$

Or $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n-1}{0}$ et $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n-1}{n-1}$

D'où $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2\binom{n-1}{0} + 2\binom{n-1}{1} + 2\binom{n-1}{2} + \cdots + 2\binom{n-1}{n-2} + 2\binom{n-1}{n-1} = 2\sum_{k=0}^{k=n-1} \binom{n}{k}$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$

Et l'égalité est encore vraie au rang n donc pour tout entier n.

b. En s'appuyant sur la propriété (3), $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k 1^{n-k} \binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0$.

Remarque : cette méthode est aussi valable pour démontrer l'égalité (i).

c. $\binom{2n}{n}$ correspond au nombre de tirages de n boules dans une urne contenant n boules noires et n boules blanches.

Chacun de ces tirages peut être constitué de k boules noires et $n-k$ boules blanches, k variant de 0 à n.

Pour k fixé, il y a $\binom{n}{k}$ façons de tirer les k boules noires et $\binom{n}{n-k}$ façons de tirer les $n-k$ boules blanches donc il y a $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ tirages de ce type. D'après la propriété (1), ce nombre s'écrit aussi $\binom{n}{k}^2$.

D'où $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

d. Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = (1+x)^n$. Cette fonction est dérivable sur **R** et pour tout réel x, on a $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ et on a alors $f'(1) = n2^{n-1}$.

D'autre part, d'après la propriété (3), $f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k$

d'où $f'(x) = \sum_{k=1}^{k=n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$ et, en particulier, $f'(1) = \sum_{k=1}^{k=n} k \binom{n}{k} 1^{k-1} = \sum_{k=1}^{k=n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k}$.

On a donc bien $\sum_{k=0}^{k=n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

En géométrie vectorielle, on rappelle que :

- la colinéarité de deux vecteurs permet de démontrer un alignement de points ;
- la nullité d'un produit scalaire permet de démontrer une orthogonalité ;
- le centre de gravité d'un triangle ABC (point de concours des médianes) est le point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Exercice 6 – Le cercle des neuf points ou « cercle d'Euler »

Soit ABC un triangle. On appelle :

- A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB] ;
- D, E et F les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A, B et C ;
- G le centre de gravité du triangle ABC.

a. On note O le centre du cercle $\mathcal{C}_1$ circonscrit au triangle ABC et H le point défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC et que $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$. Qu'en déduit-on pour les points O, G et H ?

b. On note I, M, N et P les milieux respectifs des segments [OH], [HA], [HB] et [HC]. On appelle $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre I de rayon la moitié du rayon du cercle $\mathcal{C}_1$.

Démontrer que $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{IA'}$. En déduire que le segment [MA'] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}_2$.

c. Montrer que le point D appartient au cercle $\mathcal{C}_2$.

d. Donner neuf points situés sur le cercle $\mathcal{C}_2$ (il s'agit naturellement de nommer neuf points de la figure définis sans référence au cercle…)

a. Montrons que H appartient à la hauteur issue de A en calculant $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

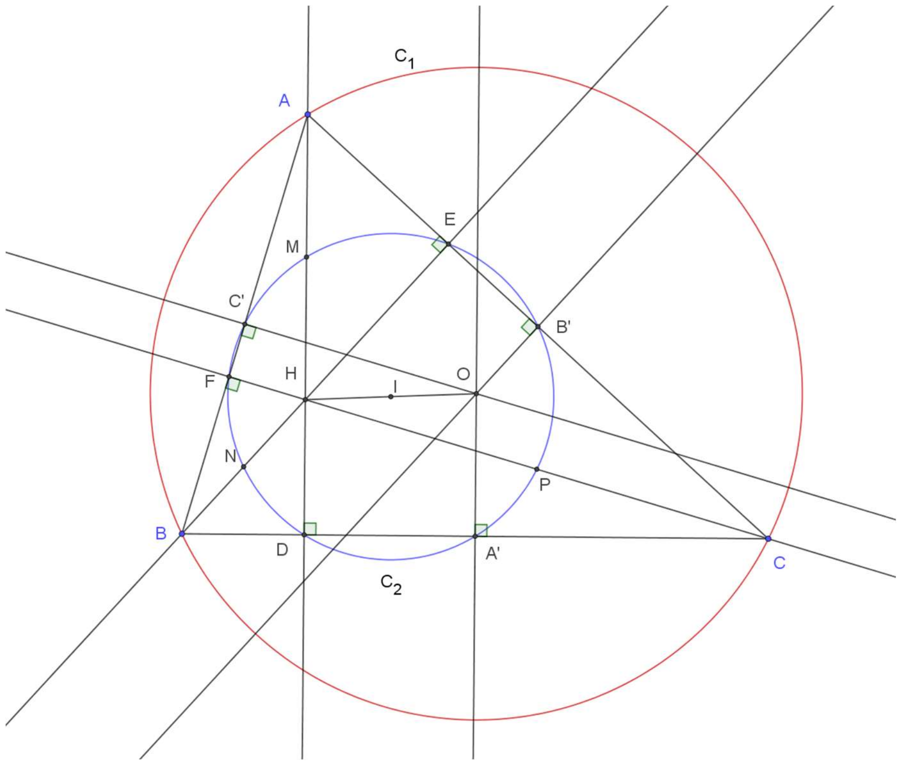
donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).(-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OB}^2 = OC^2 - OB^2 = 0.$

On en déduit que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires et que H appartient à la hauteur issue de A dans le triangle ABC. On démontrerait de même que H appartient aux deux autres hauteurs.

H est donc bien l'orthocentre du triangle ABC.

De plus G étant le centre de gravité du triangle ABC, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

soit $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ c'est-à-dire $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. On en déduit que $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$.



b. I et M sont les milieux respectifs de [OH] et [HA] donc $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

Comme A' est le milieu de [BC], $\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Or I est le milieu de [OH] donc $2\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{HO} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

et donc $\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

On en déduit que I est le milieu du segment [A'M].

De plus $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{IA'}$ donc $IM = IA' = \frac{1}{2}OA$. Comme O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, OA en est le rayon et $\frac{1}{2}OA$ est le rayon du cercle $\mathcal{C}_2$. Les points M et A' sont donc des points de ce cercle et, comme I est le milieu du segment [A'M], le segment [A'M] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}_2$.

c. [A'M] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}_2$ et le triangle MDA' est rectangle en D par définition de D donc le cercle $\mathcal{C}_2$ passe par le point D.

d. On démontrerait de même qu'au b. que les points N, P, B' et C'sont des points du cercle $\mathcal{C}_2$ et on démontrerait comme au c. que les points E et F sont des points du cercle $\mathcal{C}_2$.
Sur le cercle $\mathcal{C}_2$, on a donc les neuf points D, E, F, M, N, P, A', B' et C'.

N.B. Michel Collet et Georges Griso, dans leur ouvrage consacré au cercle d'Euler, dénombrent jusqu'à 42 points liés à la figure et appartenant au cercle d'Euler. 42 définitions, 42 noms de points, mais combien de points ?

Exercice 7 – Tétraèdre orthocentrique
Soit ABCD un tétraèdre.
a. Démontrer que les arêtes (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2$.
b. Démontrer que si les arêtes (AB) et (CD) sont orthogonales ainsi que les arêtes (AC) et (BD) alors les arêtes (AD) et (BC) le sont aussi.
On dit alors que le tétraèdre ABCD est *orthocentrique*.
c. Démontrer que si ABCD est un tétraèdre orthocentrique et si A' est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) alors A' est l'orthocentre du triangle BCD.

a. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$.
Or $\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2$ équivaut successivement à $\mathrm{AC}^2-\mathrm{AD}^2=\mathrm{BC}^2-\mathrm{BD}^2$ soit $\overrightarrow{\mathrm{AC}}^2-\overrightarrow{\mathrm{AD}}^2=\overrightarrow{\mathrm{BC}}^2-\overrightarrow{\mathrm{BD}}^2$
c'est-à-dire $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)$ soit $\overrightarrow{\mathrm{DC}}.\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{DC}}.\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)$
c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathrm{DC}}.\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)=0$ ce qui s'écrit aussi $\overrightarrow{\mathrm{DC}}.\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}\right)=0$ soit $\overrightarrow{\mathrm{DC}}.2\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$
c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$.
On en déduit que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2$.
b. Si les arêtes (AB) et (CD) sont orthogonales ainsi que les arêtes (AC) et (BD) alors $\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2$ et
$\mathrm{AB}^2+\mathrm{DC}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{CB}^2$ d'où $\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2$ ce qui signifie que $\mathrm{AB}^2+\mathrm{DC}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{DB}^2$ qui équivaut à l'orthogonalité des droites (AD) et (BC).
c. Si A' est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) alors le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$ est orthogonal à tout vecteur de ce plan.
Pour montrer que A' est alors l'orthocentre du triangle BCD, il suffit de montrer que A' est sur deux des hauteurs de ce triangle et pour cela que $\overrightarrow{\mathrm{CA'}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BA'}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$.
Or $\overrightarrow{\mathrm{CA'}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{AA'}}\right).\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{AA'}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}}$
Le premier produit scalaire est nul car le tétraèdre étant orthocentrique, les arêtes (AC) et (BD) sont orthogonales.
Le deuxième produit scalaire est nul car $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$ est orthogonal à tout vecteur du plan (BCD).
Donc $\overrightarrow{\mathrm{CA'}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$. On démontre de même que $\overrightarrow{\mathrm{BA'}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$.
On en déduit que A' est bien l'orthocentre du triangle BCD.