Pépinière académique de mathématiques

Année 2023-2024 **Stage « filé »**

Classe terminale **Fiche numéro 2**

Parution lundi 18 décembre **Retour attendu pour le lundi 15 janvier**

Exercice 1 – Recherche d'extremum

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point et l'existence d'une tangente à sa courbe, on se ramène parfois à la définition :

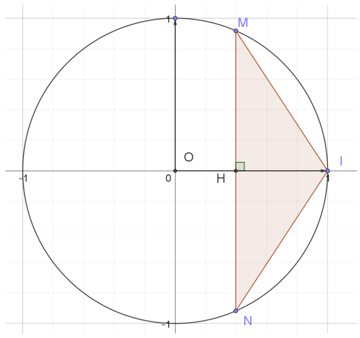
Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et soit a un réel de I. On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre l tel que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$.

Si cette limite existe mais est infinie, on dit que la fonction n'est pas dérivable en a mais sa courbe admet une tangente verticale.

Propriété : soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$ et $x_0\in\,]a,b[$. La fonction f admet un extremum en x_0 si et seulement si sa dérivée s'annule **en changeant de signe** en x_0.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le cercle C de centre O et de rayon 1 ainsi que le point I(1,0). Soit $\mathrm{M}(x,y)$ un point quelconque de C et N son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
On veut déterminer la position du point M telle que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle MNI soit maximale

1. Après avoir exprimé y en fonction de x, exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de x (par symétrie, on pourra se limiter au cas où $y>0$).
2. Soit f la fonction définie sur $[-1{,}1]$ par $f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$.
   a. Etudier la dérivabilité de la fonction f en -1 et en 1. En déduire une équation des tangentes à C aux points d'abscisses -1 et 1.
   b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' de f sur l'intervalle $]-1{,}1[$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.
   c. Tracer la courbe C.
3. Résoudre le problème posé au départ.



1. Soit H le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses, l'aire du triangle MNI est, par symétrie, le double de l'aire du triangle MHI.
   Donc $\mathcal{A}=2\times\frac{\mathrm{HM}\times\mathrm{HI}}{2}=\mathrm{HM}\times\mathrm{HI}$
   L'appartenance du point M au cercle C se traduit par $\mathrm{OM}^2=1$ soit $x^2+y^2=1$. Si $y>0$ cette égalité s'écrit $y=\sqrt{1-x^2}$ d'où $\mathrm{HM}=\sqrt{1-x^2}$.
   De plus $\mathrm{HI}=|x_{\mathrm{I}}-x_{\mathrm{H}}|=|1-x|=1-x$ puisque $-1<x<1$.
   Au final $\mathcal{A}=(1-x)\sqrt{1-x^2}$.
2. a. Pour étudier la dérivabilité en -1 de f, on étudie la limite en 0 du taux

$t_1(h)=\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ lorsque h tend vers 0 en étant positif (pour rester dans $[-1{,}1]$). Comme $f(-1)=0$,
$t_1(h)=\frac{(1-(-1+h))\sqrt{1-(-1+h)^2}}{h}=\frac{(2-h)\sqrt{2h-h^2}}{h}=\frac{(2-h)\sqrt{h}\sqrt{2-h}}{h}=\frac{(2-h)\sqrt{2-h}}{\sqrt{h}}$.
$\lim\limits_{h\to 0}(2-h)\sqrt{2-h}=2\sqrt{2}$, $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{h}=0$ et $\sqrt{h}>0$ donc $\lim\limits_{h\to 0}t_1(h)=+\infty$. On en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en -1 mais que sa courbe admet au point d'abscisse -1 une tangente verticale.
Pour étudier la dérivabilité en 1 de f, on étudie la limite en 0 du taux $t_2(h)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ lorsque h tend vers 0 en étant négatif (pour rester dans $[-1{,}1]$). Comme $f(1)=0$,
$t_2(h)=\frac{(1-(1+h))\sqrt{1-(1+h)^2}}{h}=\frac{-h\sqrt{-2h-h^2}}{h}=-\sqrt{-2h-h^2}$.
$\lim\limits_{h\to 0}t_2(h)=0$. On en déduit que la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1)=0$ ce qui signifie que sa courbe admet au point d'abscisse 1 une tangente horizontale.

b. Sur $]-1{,}1[$ la fonction f est dérivable (par produit et composition) et, pour tout $x\in\,]-1{,}1[$,

$f'(x) = -\sqrt{1-x^2} + (1-x) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(-(1-x^2) - x(1-x)\right) = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2x+1)(x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Sur $]-1{,}1[$, $f'(x)$ a le signe de $-(2x+1)$ car $x < 1$ et $\sqrt{1-x^2} > 0$.

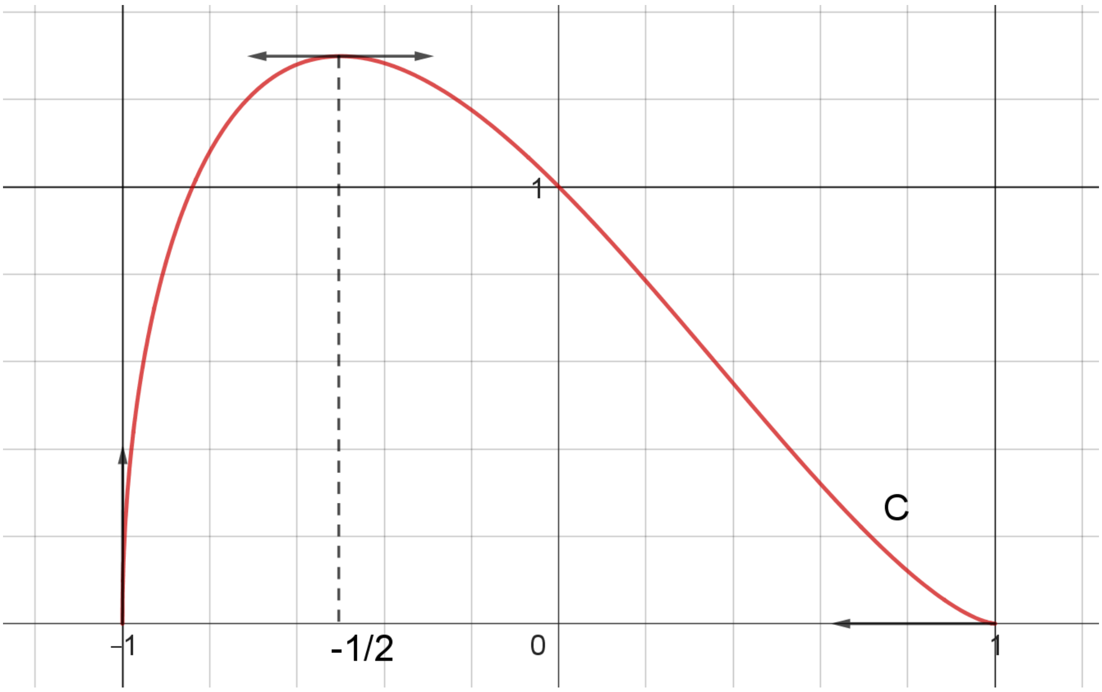
Or $-(2x+1) > 0$ si et seulement si $x < -\frac{1}{2}$.

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

On en déduit le tableau de variation ci-contre.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

c.



3. L'aire $\mathcal{A}$, c'est-à-dire la fonction f est maximale lorsque $x = -\frac{1}{2}$. Cette aire maximale vaut $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Remarque : l'aire maximale correspond au cas où le triangle MNI est équilatéral. Dans les problèmes d'optimisation, maxima ou minima sont souvent obtenus dans le cas de figures régulières.

Exercice 2 – Suites croissantes majorées.

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est majorée si et seulement si il existe un nombre réel M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.

Théorème : Toute suite croissante et majorée est convergente.

Soit une suite (u_n) dont les termes sont positifs ou nuls, majorée par un nombre réel positif M.

Pour tout entier naturel n, on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2^k}$.

1. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}, S_n \leq M \times \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$.
3. Démontrer que la suite (S_n) est majorée.
4. En déduire la convergence de la suite (S_n).
5. On considère la suite (u_n) définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$.
   - **a.** Vérifier que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.
   - **b.** En déduire que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

1. $\forall n \in \mathbf{N}, S_{n+1} - S_n = \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}}$; u_{n+1} est positif ou nul par hypothèse et $2^{n+1} > 0$, donc $S_{n+1} - S_n \geq 0$ ce qui justifie la croissance de la suite (S_n).
2. Pour tout entier naturel n, soit la proposition P_n : « $S_n \leq M \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ ».

Initialisation :

Par convention, $S_0 = \frac{u_0}{2^0} = u_0$ et $M\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{2^k} = M \times \frac{1}{2^0} = M$; par hypothèse $u_0 \leq M$, donc P_0 est vérifiée.
Hérédité : Si pour un entier naturel n, P_n est vérifiée alors montrons que P_{n+1} est encore vérifiée.
$S_{n+1} = S_n + \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}}$; par hypothèse de récurrence $S_n \leq M\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ et de plus $\frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} \leq \frac{M}{2^{n+1}}$.
Par addition des termes des inégalités de même sens, on obtient : $S_n + \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} \leq M\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} + \frac{M}{2^{n+1}}$,c'est-à-dire $S_{n+1} \leq M\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k}$ ce qui est la proposition P_{n+1}.
Conclusion : pour tout entier naturel n, la proposition P_n est vraie.

3. On utilise la propriété de somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$:

$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$; donc $\forall n \in \mathbf{N},\ S_n \leq 2M\left[1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right]$ d'où $\forall n \in \mathbf{N},\ S_n \leq 2M$.

Le nombre réel $2M$ est un majorant de la suite (S_n).

4. La suite (S_n) est croissante et majorée, donc converge vers un réel L tel que $L \leq 2M$.
5. **a.** Si n est un entier naturel pair, alors $u_n = 1$; si n est un entier naturel impair, alors $u_n = 0$.

Donc la suite (u_n) vérifie : pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.

b. La suite (u_n) vérifie les hypothèses requises pour conclure d'après la question 4. que la suite (S_n) est convergente.

$\forall m \in \mathbf{N}, S_{2m} = S_{2m+1} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{m+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{m+1}\right)$.

$0 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{m+1} = 0$; on en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{4}{3}$

Exercice 3 – Suite implicite

Dans de nombreux exercices, les suites sont définies par une expression dite explicite, une expression algébrique ou une expression contenant des fonctions usuelles. Les termes d'une suite dite implicite n'ont pas d'expression algébrique connue, mais sont définies par une propriété comme, par exemple, être solution d'une équation.

Les connaissances nécessaires pour l'exercice suivant sont les propriétés de l'exponentielle et du logarithme, le théorème des valeurs intermédiaires et ses divers corollaires, et des théorèmes sur les limites de suites.

Pour tout entier naturel n non nul, soit la fonction f_n définie dans $\mathbf{R}$ par $f_n(x) = e^{nx} - x - 2$.
On désigne par C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrer qu'il existe un unique point A du plan, indépendant de l'entier n, appartenant à toutes les courbes C_n.
2. Montrer que la fonction f_n admet en $-\infty$ une limite que l'on déterminera.
3. Montrer que la fonction f_n admet en $+\infty$ une limite que l'on déterminera.
4. Établir le tableau des variations de la fonction f_n.
5. **a.** Exprimer en fonction de l'entier naturel n, le minimum M_n de la fonction f_n.
   b. Montrer que la suite (M_n) est convergente et préciser sa limite.
   c. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, M_n < 0$.
6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbf{R}$ exactement deux solutions, l'une strictement positive que l'on notera u_n , l'autre négative que l'on notera v_n.
7. **a.** Démontrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in [0; +\infty[, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
8. **a.** Justifier que la suite (u_n) est convergente.
   b. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).

1. Raisonnons par analyse et synthèse : s'il existe un point A commun à toutes les courbes C_n, alors ce point A appartient aux courbes C_1 et C_2 Etudions les points d'intersection de C_1 et C_2 . Leurs abscisses sont les solutions de l'équation $f_1(x) = f_2(x)$ soit $\mathrm{e}^x - x - 2 = \mathrm{e}^{2x} - x - 2$ qui équivaut à $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}$ soit, puisque $\mathrm{e}^x \neq 0$, $\mathrm{e}^x = 1$ c'est-à-dire $x = 0$.

De plus $f_1(0) = f_2(0) = -1$. Le point A $(0, -1)$ est donc le seul point commun aux courbes C_1 et C_2.

Etudions si A appartient à toutes les courbes C_n : $\forall n \in \mathbf{N}^*, f_n(0) = \mathrm{e}^{n\times 0} - 0 - 2 = 1 - 2 = -1$, donc A $\in C_n$.
Conclusion : il existe un unique point, le point A $(0, -1)$ appartenant à toutes les courbes C_n.

2. $n > 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} nx = -\infty$; or $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{nx} = 0$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x-2) = +\infty$. On en déduit $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$.

3. On se trouve en présence d'une indétermination de type somme : $+\infty$ et $-\infty$.
$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}^*, f_n(x) = nx\left(\frac{\mathrm{e}^{nx}}{nx} - \frac{1}{n}\right) - 2$. $n > 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} nx = +\infty$. Or $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{nx}}{nx} = +\infty$
On en déduit successivement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{nx}}{nx} - \frac{1}{n}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} nx\left(\frac{\mathrm{e}^{nx}}{nx} - \frac{1}{n}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} nx\left(\frac{\mathrm{e}^{nx}}{nx} - \frac{1}{n}\right) - 2 = +\infty$
On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

4. $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $f_n$est dérivable par opérations sur des fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbf{R}, f_n'(x) = n e^{nx} - 1$.
$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow n e^{nx} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{nx} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow nx = \ln\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\ln(n)}{n}$
$f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow n e^{nx} > 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{nx} > \frac{1}{n} \Leftrightarrow nx > \ln\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow x > -\frac{\ln(n)}{n}$ par stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$
Tableau des variations de f_n :

	$-\infty$		$-\frac{\ln(n)}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$f_n\left(-\frac{\ln(n)}{n}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. a. D'après le tableau des variations, $M_n = f_n\left(-\frac{\ln(n)}{n}\right) = \mathrm{e}^{-n\times\frac{\ln(n)}{n}} + \frac{\ln(n)}{n} - 2 = \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n} - 2$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = -2$

c. Etudions les variations de la fonction g définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} - 2$.

g est dérivable et $\forall x \in [1; +\infty[, g'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{-\ln(x)}{x^2}$
$\forall x \in [1, +\infty[, \ln(x) \geq 0$ et $x^2 > 0$ donc $g'(x) \leq 0$. La fonction g est donc décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$; par conséquent, $\forall x \in [1, +\infty[, g(x) \leq g(1)$ avec $g(1) = -1$.
On en conclut que pour tout entier naturel n non nul, $\mathrm{M_n} = \mathrm{g(n)}$ est strictement négatif.

6. On vérifie les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaires :
Sur l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{\ln(n)}{n}\right]$, la fonction f_n est continue, strictement décroissante et $0 \in \left[M_n, \lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)\right[$.
Donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution notée v_n dans l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{\ln(n)}{n}\right]$.
Sur l'intervalle $\left[-\frac{\ln(n)}{n}, +\infty\right[$, la fonction f_n est continue, strictement croissante et $0 \in \left[M_n, \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[$.
Donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution notée u_n dans l'intervalle $\left[-\frac{\ln(n)}{n}, +\infty\right[$.
De plus $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $-\frac{\ln(n)}{n} \leq 0$ donc $v_n \leq 0$. Dans l'intervalle $\left[-\frac{\ln(n)}{n}, 0\right]$, $f_n(x) < 0$ car $f_n(0) < 0$ et f_n croissante donc $u_n \in \left[-\frac{\ln(n)}{n}, 0\right]$ et par suite $u_n > 0$.

7. a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $\forall x \in [0; +\infty[, f_{n+1}(x) - f_n(x) = \mathrm{e}^{(n+1)x} - x - 2 - \mathrm{e}^{nx} + x + 2 = \mathrm{e}^{nx}(\mathrm{e}^x - 1)$.
$\mathrm{e}^{nx} > 0$ donc la différence a le signe de $(\mathrm{e}^x - 1)$. Puisque $\mathrm{e}^0 = 1$ et par stricte croissance sur $\mathbf{R}$ de la fonction exponentielle, $\forall x \in [0; +\infty[, \mathrm{e}^x \geq 1$ donc $\mathrm{e}^x - 1 \geq 0$ et par suite $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$.
Donc $\forall x \in [0; +\infty[, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $u_n > 0$ donc en lui appliquant l'inégalité précédente $f_{n+1}(u_n) \geq f_n(u_n)$ c'est-à-dire $f_{n+1}(u_n) \geq 0$.
Or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, donc $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$. Puisque la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $u_n \geq u_{n+1}$ ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

8. **a.** On a démontré que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Donc d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite L telle que $L \geq 0$.
   b. $L \geq 0$. On veut prouver que $L = 0$; raisonnons par l'absurde en supposant $L > 0$.

Puisque la suite (u_n) est décroissante, $\forall n \in \mathbf{N}^*, \mathrm{L} \leq u_n$ et par croissance de la fonction $f_n$sur l'intervalle $[0, +\infty[$, on en déduit que $\forall n \in \mathbf{N}^*, f_n(\,L) \ \leq f_n(\,u_n)$ d'où $f_n(\,\mathrm{L}) \ \leq 0$.
Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(\,L) = \mathrm{e}^{(n+1)L} - L - 2$. Puisque $L > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)L = +\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{(n+1)L} = +\infty$ ce qui conduit à $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(\mathrm{L}) = +\infty$.
Par définition d'une limite égale à $+\infty$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes vérifient $f_n(L) > 0$, ce qui contredit $\forall n \in \mathbf{N}^*, f_n(\,L) \ \leq 0$. On prouve ainsi que $L = 0$.

Exercice 4 – Une équation fonctionnelle pour définir le logarithme népérien

La fonction logarithme népérien a été définie en classe comme fonction réciproque de la fonction exponentielle et elle a pour dérivée la fonction inverse.
On sait que pour tous nombres strictement positifs a et b, $\ln(\,ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln e = 1$.
On montre que ces deux propriétés caractérisent en fait la fonction logarithme népérien.

On cherche toutes les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ et telles que pour tous nombres réels $a > 0$ et $b > 0$:

(1) $f(ab) = f(a) + f(b)$.

1. Calculer $f(1)$.
2. Pour tout nombre réel $a > 0$, on considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(ax) - f(x)$ où f est une fonction dérivable vérifiant (1). Que peut-on dire des variations de la fonction g ?
3. Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$.
4. Si on pose $f'(1) = k$, montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, $f(x) = k \ln x$.
5. Conclure sur la caractérisation de la fonction logarithme népérien.

1. Si on écrit l'égalité (1) pour $a = b = 1$, on obtient $f(1) = 2f(1)$ d'où $f(1) = 0$.
2. D'après l'égalité (1), pour tout réel $x > 0$, $g(x) = f(a) + f(x) - f(x) = f(a)$ donc g est une fonction constante.
3. Comme somme et composition de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a $g'(x) = af'(ax) - f'(x)$.
4. Comme g est une fonction constante, on en déduit que pour tout réel $x > 0$, $af'(ax) - f'(x) = 0$
   En particulier, pour tout nombre réel $a > 0$, $af'(a) - f'(1) = 0$ soit, si on pose $f'(1) = k$, $f'(a) = \frac{k}{a}$.
   La fonction f a donc même dérivée que la fonction $h\colon x \mapsto k \ln x$. Or $f(1) = 0 = h(1)$, on en déduit que $f = h$
5. Si on a de plus $f(e) = 1$ alors $k \ln e = 1$ soit $k = 1$ et f est la fonction logarithme népérien.

Exercice 5 – Propriétés des combinaisons

Propriétés :

(1) pour tous entiers k et n tels que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

(2) pour tous entiers k et n tels que $0 < k \leq n-1$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

(3) pour tout entier n, pour tous réels a et b, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Il y a plusieurs façons de démontrer ces propriétés (raisonnement par récurrence, dénombrement dans des tirages de boules ou des chemins…). Ces méthodes peuvent être reprises pour démontrer d'autres propriétés des combinaisons.

On veut montrer que pour tout entier n,

(i) $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$ (ii) $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ (iii) $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

a. Démontrer par récurrence la relation (i) en s'appuyant sur les propriétés (1) et (2).
b. Démontrer la relation (ii) en s'appuyant sur la propriété (3).
c. Démontrer la relation (iii) en dénombrant des tirages de boules.

d. En considérant la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, démontrer que pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$.

a. Pour $n = 0$, l'égalité est vraie puisqu'elle s'écrit $1 = 1$.
Si l'égalité est vraie au rang $n-1$, alors $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$
Soit, en s'appuyant sur la propriété (2) :
$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \left(\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right) + \left(\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right) + \cdots + \left(\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right) + \binom{n}{n}$
Or $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n-1}{0}$ et $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n-1}{n-1}$
D'où $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2\binom{n-1}{0} + 2\binom{n-1}{1} + 2\binom{n-1}{2} + \cdots + 2\binom{n-1}{n-2} + 2\binom{n-1}{n-1} = 2\sum_{k=0}^{k=n-1} \binom{n}{k}$
D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$
Et l'égalité est encore vraie au rang n donc pour tout entier n.

b. En s'appuyant sur la propriété (3), $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k 1^{n-k} \binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0$.
Remarque : cette méthode est aussi valable pour démontrer l'égalité (i).

c. $\binom{2n}{n}$ correspond au nombre de tirages de n boules dans une urne contenant n boules noires et n boules blanches.
Chacun de ces tirages peut être constitué de k boules noires et $n-k$ boules blanches, k variant de 0 à n.
Pour k fixé, il y a $\binom{n}{k}$ façons de tirer les k boules noires et $\binom{n}{n-k}$ façons de tirer les $n-k$ boules blanches donc il y a $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ tirages de ce type. D'après la propriété (1), ce nombre s'écrit aussi $\binom{n}{k}^2$.
D'où $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

d. Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = (1+x)^n$. Cette fonction est dérivable sur **R** et pour tout réel x, on a $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ et on a alors $f'(1) = n2^{n-1}$.
D'autre part, d'après la propriété (3), $f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k$
d'où $f'(x) = \sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$ et, en particulier, $f'(1) = \sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k} 1^{k-1} = \sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k}$.
On a donc bien $\sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Exercice 6 – Fonction vectorielle de Leibniz

L'objectif de cet exercice est d'étudier une fonction vectorielle, dite de Leibniz, et la notion de barycentre ainsi que ses applications à la géométrie (points alignés, droites concourantes).
Définition : Soit n points du plan notés $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et n réels notés $a_1, a_2, \ldots, a_n$. On appelle *fonction vectorielle de Leibniz* la fonction $\vec{f}$ qui à tout point M du plan associe le vecteur :

$$\vec{f}(M) = a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{MA_n} = \sum_{i=1}^{i=n} a_i\overrightarrow{MA_i}$$

Partie A – Cas général

1. **a.** On pose $m = \sum_{i=1}^{i=n} a_i$. Montrer que si O est un point fixé du plan alors, pour tout point M du plan, $\vec{f}(M) = \vec{f}(O) + m\overrightarrow{MO}$.
   b. Démontrer que si $\sum_{i=1}^{i=n} a_i \neq 0$, alors il existe un unique point G du plan tel que $\vec{f}(G) = \vec{0}$.

Ce point G est alors appelé le barycentre des points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots, (A_n, a_n)$ et on appelle masse du système de ces n points pondérés la somme $m = \sum_{i=1}^{i=n} a_i$ de leurs coefficients.

2. **a.** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{A_1G}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{A_1A_i}$ pour $2 \leq i \leq n$.

b. Soit ABC un triangle, construire, s'ils existent, le barycentre G_1 des points pondérés $(A,1),(B,3)$, le barycentre G_2 des points pondérés $(A,3),(B,2),(C,1)$ et le barycentre G_3 des points pondérés $(A,2),(B,-1),(C,2)$

3. Montrer que si λ est un réel non nul et si G est le barycentre des points pondérés $(A_1,a_1),(A_2,a_2)$, …, (A_n,a_n) alors G est aussi le barycentre des points pondérés $(A_1,\lambda a_1),(A_2,\lambda a_2),,\dots,(A_n,\lambda a_n)$.

On admet la propriété dite *d'associativité du barycentre* : le barycentre de n points pondérés ne change pas lorsqu'on remplace k d'entre eux, dont la somme m' de leurs coefficients est non nulle, par leur barycentre A affecté du coefficient m'.
Grâce à des regroupements judicieux de points pondérés, cette propriété permet de démontrer que des droites sont concourantes ou que des points sont alignés.

Partie B – Cas particuliers

1. Soit a et b deux réels tels $a+b\neq 0$. Montrer que si G est barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b), alors G est aligné avec A et B.
2. Trouver deux réels a et b tels que le milieu I d'un segment [AB] soit le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b). Les réels a et b sont-ils uniques ?
3. Soit ABC un triangle. Soit I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB],[BC]$ et $[CA]$ et soit G le barycentre des points pondérés $(A,1),(B,1),(C,1)$. En utilisant la propriété d'associativité du barycentre, retrouver le fait que les médianes du triangle ABC sont concourantes.
4. Soit ABC un triangle. On considère le point I défini par $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, et les points J et K, milieux respectifs de $[BC]$ et $[AJ]$. Montrer que le point C est aligné avec les points I et J.

Partie A

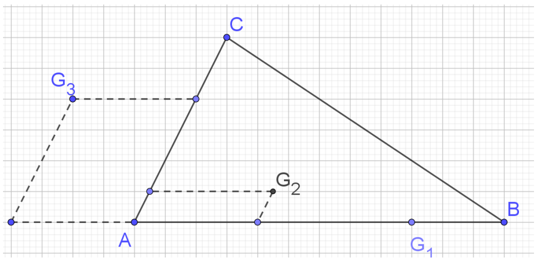
1. **a.** Soit O un point du plan. D'après la relation de Chasles,

$$\vec{f}(M)=\sum_{i=1}^{i=n}a_i\overrightarrow{MA_i}=\sum_{i=1}^{i=n}a_i\overrightarrow{MO}+\sum_{i=1}^{i=n}a_i\overrightarrow{OA_i}=\left(\sum_{i=1}^{i=n}a_i\right)\overrightarrow{MO}+\sum_{i=1}^{i=n}a_i\overrightarrow{OA_i}=m\overrightarrow{MO}+\vec{f}(O)$$

b. $\vec{f}(G)=\vec{0}$ équivaut, d'après la question précédente, à $m\overrightarrow{GO}+\vec{f}(O)=\vec{0}$ soit $m\overrightarrow{OG}=\vec{f}(O)$.
Comme $m\neq 0$, cela s'écrit $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{m}\overrightarrow{f(O)}$. O et $\vec{f}(O)$ sont fixés donc il existe bien un unique point G du plan tel que $\vec{f}(G)=\vec{0}$.

2. **a.** $\vec{f}(G)=\vec{0}$ s'écrit $a_1\overrightarrow{GA_1}+a_2\overrightarrow{GA_2}+\ \dots+a_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$
soit $a_1\overrightarrow{GA_1}+a_2(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A_2})+\ \dots+a_n(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{A_1A_n})=\vec{0}$
soit $\left(\sum_{i=1}^{i=n}a_i\right)\overrightarrow{GA_1}+a_2\overrightarrow{A_1A_2}+\ \dots+a_n\overrightarrow{A_1A_n}=\vec{0}$
soit, puisque $\sum_{i=1}^{i=n}a_i\neq 0$, $\overrightarrow{A_1G}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{i=n}a_i}(a_2\overrightarrow{A_1A_2}+\ \dots+a_n\overrightarrow{A_1A_n})=\frac{1}{m}(a_2\overrightarrow{A_1A_2}+\ \dots+a_n\overrightarrow{A_1A_n})$.

b. $1+3=4$ et $4\neq 0$ donc le barycentre G_1 existe et, d'après la question précédente, $\overrightarrow{AG_1}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, ce qui permet de construire le point G_1.
$2+1+3=6$ et $6\neq 0$ donc le barycentre G_2 existe et, d'après la question précédente,
$\overrightarrow{AG_2}=\frac{2}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$, ce qui permet de construire le point G_2.



$2-1+2=3$ et $3\neq 0$ donc le barycentre G_3 existe et, d'après la question précédente,
$\overrightarrow{AG_3}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, ce qui permet de construire le point G_3.

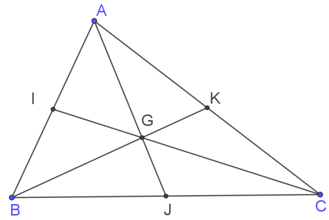
3. Si λ est un réel non nul et si G est le barycentre des points pondérés $(A_1,a_1),(A_2,a_2)$, …, (A_n,a_n), alors $\lambda\sum_{i=1}^{i=n}a_i\overrightarrow{GA_i}=\lambda\vec{0}=\vec{0}$. Or, $\lambda\sum_{i=1}^{i=n}a_i\overrightarrow{GA_i}=\sum_{i=1}^{i=n}\lambda a_i\overrightarrow{GA_i}$ donc le point G est aussi le barycentre des points pondérés $(A_1,\lambda a_1),(A_2,\lambda a_2)$, …, $(A_n,\lambda a_n)$.

Partie B

1. Si G est barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b), alors, d'après la question A.2.a., $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et donc G est bien aligné avec A et B.

2. Le point I est le milieu de $[AB]$ lorsque $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. On cherche donc a et b tels que $\frac{b}{a+b} = \frac{1}{2}$ soit $2b = a + b$ soit $a = b$. On peut prendre $a = b = 1$ mais il y a une infinité de couples (a, b) qui conviennent : tous les couples (a, a) où a est un réel non nul.
   Remarque : on dit alors que I est l'isobarycentre des points A et B.

3. Comme I est le milieu de $[AB]$, I est barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 1)$. D'autre part, G est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$. L'associativité du barycentre permet d'écrire que G est le barycentre des points pondérés $(I, 2)$ et $(C, 1)$ et donc G appartient à la droite (CI) médiane issue de C dans le triangle ABC.
   On démontrerait de même que G est le barycentre des points pondérés $(J, 2)$ et $(A, 1)$ et que G est le barycentre des points pondérés $(K, 2)$ et $(B, 1)$.
   Le point G est donc le point de concours des trois médianes du triangle ABC.



4. Comme $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2+1}\overrightarrow{AB}$, le point I est le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$.
   On peut aussi définir le point J comme barycentre de $(B, 1)$ et $(C, 1)$ et le point K comme barycentre de $(A, 1)$ et $(J, 1)$ ou de $(A, 2)$ et $(J, 2)$.
   L'associativité du barycentre permet d'écrire que K est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.
   L'associativité du barycentre permet alors aussi d'écrire que K est le barycentre des points pondérés $(I, 3)$ et $(C, 1)$.
   En particulier le point C est aligné avec les points K et I.