**Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2024-2025** **Stage « filé »**

**Classe de terminale** **Fiche numéro 1**

**Parution lundi 4 novembre** **Retour attendu pour le lundi 25 novembre**

***Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.***

Dans cette fiche, un raisonnement est régulièrement utilisé pour démontrer qu'une proposition $P_n$, dépendant d'un entier $n \geq n_0$, où $n_0$ est un entier fixé, est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. Il s'agit du *raisonnement par récurrence* :

- On vérifie que la proposition $P_n$ est vraie pour $n = n_0$ (initialisation) ;
- On montre que si la proposition $P_n$ est vraie pour un entier $n$, alors la proposition $P_{n+1}$ est encore vraie (hérédité).

On peut alors en déduire que la proposition $P_n$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

On rappelle aussi les théorèmes suivants :

Théorème de la convergence monotone : toute suite croissante majorée est convergente.
toute suite décroissante minorée est convergente.

Théorème de comparaison des limites : soit $(u_n)$ et $(v_n)$ des suites convergeant respectivement vers les réels $L$ et $L'$.
Si pour tout entier naturel $n$, $u_n \leq v_n$, alors $L \leq L'$.

## Exercice 1 : suites « télescopiques » et applications

**1.** Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la propriété suivante :

Propriété : soit une suite $(u_n)$ et soit la suite $(v_n)$ de terme général $v_n = u_n - u_{n+1}$.
Soit $n_0$ un entier naturel et la suite $(S_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ ($n \geq n_0$) par $S_n = \sum_{k=n_0}^{k=n} v_k$.
Alors pour tout entier naturel $n$ ($n \geq n_0$), $S_n = u_{n_0} - u_{n+1}$ .

*Remarque : une fois démontrée, la propriété précédente permettra d'écrire :*

$S_n = u_{n_0} - u_{n_0+1} + u_{n_0+1} - u_{n_0+2} + \quad \dots \quad + u_{n-1} - u_n + u_n - u_{n+1} = u_{n_0} - u_{n+1}$

*Le terme $u_k$ de la suite « télescope », c'est-à-dire heurte symboliquement le terme $-u_k$ et leur somme donne 0.*
*D'où le nom de « suite télescopique » donné à toute suite construite sur le principe de la suite $(v_n)$..*

**2. a.** Déterminer un couple $(a, b)$ de nombres réels tel que pour tout entier naturel $k$ non nul, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{k+1}$.

**b.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, exprimer $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}$ en fonction de l'entier $n$.

**c.** Calculer, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k(k-1)}$.

**3. a.** Prouver que pour tout entier naturel $k$ supérieur ou égal à 2, $\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$.

**b.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on définit $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ . Montrer que $\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

**4.** Etudier le sens de variation de la suite $(S_n)$ et en déduire que la suite $(S_n)$ converge vers un nombre réel $L$ vérifiant $L \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ .

**5.** Application : soit $b$ et $c$ des nombres réels positifs ou nuls. On définit la suite de terme général $T_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2+bk+c}$.

**a.** Démontrer que la suite $(T_n)$ est croissante.

**b.** En déduire que la suite $(T_n)$ est convergente.

**c.** Soit $p$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Démontrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, n^p \geq n^2$. En déduire que la suite de terme général $R_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^p}$ est convergente.

## Exercice 2 – Sommes et limites

Rappels :

- Pour comparer deux expressions, on étudie souvent le signe de la différence.
- Si une factorisation semble impossible on peut se ramener à étudier le sens de variation d'une fonction pour en déduire son signe.

Soit les suites définies sur $\mathbf{N}^*$ :

$(u_n)$ de terme général $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ et $(v_n)$ de terme général. $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. **a.** Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$.
   **b.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
   **c.** En déduire que la suite $(u_n)$ converge et donner un majorant de sa limite.
2. **a.** Montrer que pour tout réel positif $u, \ln(1+u) \leq u$.
   **b.** En déduire que pour tout entier naturel non nul $k$, $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.
   **c.** Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $v_n \geq \ln(1+n)$ et en déduire le comportement à l'infini de la suite $(v_n)$.

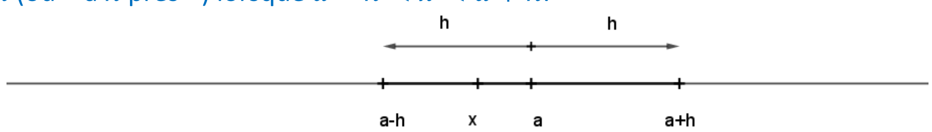
## Exercice 3 – Limites de suites et valeurs approchées

Définitions :

- on dit qu'une suite $(u_n)$ converge vers un nombre réel $a$ lorsque tout intervalle ouvert contenant $a$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- un intervalle $I$ est dit ouvert centré en $a$ lorsqu'il existe un réel $h$ strictement positif tel que $I = ]a-h, a+h[$.

Propriété : soit $a$ un réel et $h$ un réel strictement positif, $x \in ]a-h, a+h[$ équivaut à $|a-x| < h$.

Définition : soit $a$ et $x$ deux nombres réels et soit $h$ un réel strictement positif. On dit que $a$ est une valeur approchée de $x$ à la précision $h$ (ou « à $h$ près ») lorsque $a - h < x < a + h$.




On obtient un encadrement de x de longueur $2h$.
Cela signifie que la distance entre les réels $a$ et $x$ est inférieure ou égale à $h$, c'est-à-dire $|a-x| < h$.
Comme $|a-x| = |x-a|$, cela signifie aussi que $x$ est une valeur approchée de $a$ à $h$ près.

Dans les études de suites convergentes, terme général et limite sont valeurs approchées l'un de l'autre et il est important de connaitre la précision de ces approximations.

Soit la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (n \in \boldsymbol{N}^*)$

1. Démontrer que la suite$(u_n)$ converge vers 1.
2. Est-il vrai que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 21, le nombre 1 est une valeur approchée de $u_n$ à $0{,}05$ près ?
3. Soit $r$ un nombre réel strictement positif donné. Déterminer un entier naturel $n_0$, dont on donnera une expression en fonction de $r$, tel que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à $n_0$, 1 est une valeur approchée de $u_n$ à $r$ près ?

## Exercice 4 – Suites adjacentes

Quelques principes de base et points de vigilance dans le traitement d'inégalités :

(1) Pour comparer deux nombres on peut étudier le signe de leur différence.
(2) On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant le même nombre aux deux membres de cette inégalité.
(3) On change le sens d'une inégalité en multipliant les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif.
(4) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

**Définition :** deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont dites adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n - v_n) = 0$.

1. L'objectif de cette question est de **démontrer le théorème** suivant : « deux suites adjacentes convergent vers la même limite ».
   On considère pour cela deux suites adjacentes $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que $(u_n)$ est croissante, $(v_n)$ est décroissante.
   **a.** Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et en déduire que tous ses termes sont positifs.
   **b.** En déduire que les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes, qu'elles ont même limite $l$, et que pour tout entier $n$, $u_n \leq l \leq v_n$.

On peut donc maintenant énoncer et appliquer le théorème :
**théorème** : deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

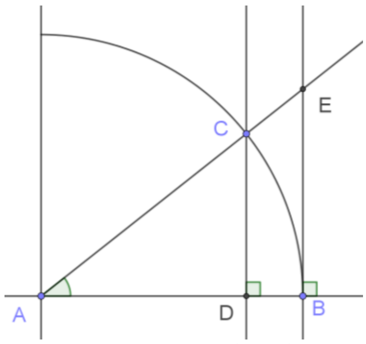
**2.** Soit les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{pour tout entier n,} \;\; u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 4 \\ \text{pour tout entier n,} \;\; v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{2}. \end{cases}$$

- **a.** Montrer que la suite de terme général $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
- **b.** Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.
- **c.** Montrer que la suite de terme général $t_n = \frac{u_n+2v_n}{3}$ est constante. En déduire la limite commune aux suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

## Exercice 5 – Inégalité de Huygens

Propriété : soit $P$ et $Q$ deux fonctions polynômes. $P$ et $Q$ sont égales (c'est-à-dire pour tout réel $x$, $P(x) = Q(x)$) si et seulement si $P$ et $Q$ ont même degré et les mêmes coefficients.




L'objectif de l'exercice est de **démontrer** l'inégalité de Huygens, propriété affirmant que pour tout réel $x$ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \leq \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x$.
Cela signifie que, dans la figure ci-contre, la longueur $x$ de l'arc BC est inférieure ou égale à la moyenne pondérée de la longueur CD affectée du coefficient 2 et de la longueur BE affectée du coefficient 1.

1. Justifier l'interprétation géométrique de l'inégalité.
2. Soit $f$ la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$.
   - **a.** Déterminer la dérivée $f'$ de la fonction $f$.
   - **b.** Montrer qu'il existe un polynôme $P(X)$ de degré 3 tel que, pour tout réel $x$ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = \frac{P(\cos x)}{(\cos x)^2}$.
   - **c.** Montrer que 1 est une racine de $P$ et déterminer les réels $a, b$ et $c$ tels que, pour tout réel $X$, $P(X) = (X-1)(aX^2 + bX + c)$.
   - **d.** En déduire une factorisation $P(\cos x)$ et le signe de $f'(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   - **e.** Déterminer les variations puis le signe de la fonction $f$ et conclure.

## Exercice 6 – Fonctions convexes

Définition : on dit qu'une fonction $f$ est convexe sur un intervalle $I$ lorsque pour tous points A et B (d'abscisses respectives $a$ et $b$ appartenant à $I$) de la courbe représentative $C_f$ de cette fonction dans un repère, le segment [AB] est situé au-dessus de $C_f$ sur l'intervalle $[a, b]$.
Propriété : Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $I$. La fonction $f$ est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde $f''$ est positive sur $I$.

1. Soit $f$ une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle $I$. On suppose que $f''$ est positive sur $I$. Montrer que la courbe représentative de $f$ sur $I$ dans un repère est située au-dessus de toutes ses tangentes.
2. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.
   - **a.** Etudier la convexité de la fonction $f$ définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$.
   - **b.** En déduire l'inégalité de Bernoulli :

     pour tout réel $x \in [-1, +\infty[$, pour tout entier $n \geq 2$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
3. Inégalité arithmético-quadratrique. Montrer que pour tous réels $a$ et $b$ positifs, $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

(On pourra s'intéresser auparavant à la fonction carré).