ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2025-2026 | **Stage « filé »**

Classe de seconde | **Fiche numéro 2**

Parution lundi 19 janvier | **Retour attendu pour le lundi 10 février**

Exercice 1 – Histoires de carrés

Définition 1 : un nombre entier a est un multiple d'un nombre entier b s'il existe un nombre entier k tel que $a = bk$. On dit aussi alors que b est un diviseur de a.

Définition 2 : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Propriété : pour tous réels a et b, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

1. **a.** Soit x un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Montrer que la phrase « la somme des carrés des entiers consécutifs $x-1, x, x+1$ est égale à la somme des carrés des deux entiers consécutifs suivants $x+2, x+3$ » se traduit par l'équation $x(x-10) = 11$.
   b. Montrer que cette équation a une unique solution dans $\mathbf{N}$.
2. **a.** Calculer les sommes $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$ et $5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2$.
   b. Plus généralement, soit n un entier naturel.
   Calculer la somme $(4n+1)^2 - (4n+2)^2 - (4n+3)^2 + (4n+4)^2$.
   c. En déduire la valeur du nombre :

$$N = (1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) + \cdots + (2\,021^2 - 2\,022^2 - 2\,023^2 + 2\,024^2) + 2\,025^2 - 2\,026^2$$

1. **a.** La phrase donnée se traduit par $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 + (x+3)^2$
   soit $x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9$
   soit $3x^2 + 2 = 2x^2 + 10x + 13$
   soit $x^2 - 10x = 11$ c'est-à-dire $x(x-10) = 11$.
   b. On en déduit que x est un diviseur de 11. Comme 11 est un nombre premier $x = 1$ (ce qui est impossible car alors $x - 10 < 0$) ou $x = 11$. Le problème a donc une unique solution $x = 11$ et on peut vérifier que $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.
2. **a.** $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = (1^2 - 2^2) + (4^2 - 3^2) = (1-2)(1+2) + (4-3)(4+3) = -3 + 7 = 4$
   $5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 = (5^2 - 6^2) + (8^2 - 7^2) = (5-6)(5+6) + (8-7)(8+7) = -11 + 15 = 4$
   b. Soit n un entier naturel et soit $S = (4n+1)^2 - (4n+2)^2 - (4n+3)^2 + (4n+4)^2$. Alors
   $S = ((4n+1)^2 - (4n+2)^2) + ((4n+4)^2 - (4n+3)^2)$
   $S = \big((4n+1) - (4n+2)\big)\big((4n+1) + (4n+2)\big) + \big((4n+4) - (4n+3)\big)\big((4n+4) + (4n+3)\big)$
   $S = -(8n+3) + (8n+7) = 4$.
   c. Comme $2\,024 = 4 \times 506$, la somme N est la somme de 506 termes tous égaux à 4 et des nombres $2\,025^2$ et $-2\,026^2$
   soit $N = 2\,024 + 2\,025^2 - 2\,026^2 = 2\,024 - (2\,026 - 2\,025)(2\,026 + 2\,025) = 2\,024 - 4\,051$
   soit $N = -2\,027$.

Exercice 2 – Calcul littéral et géométrie

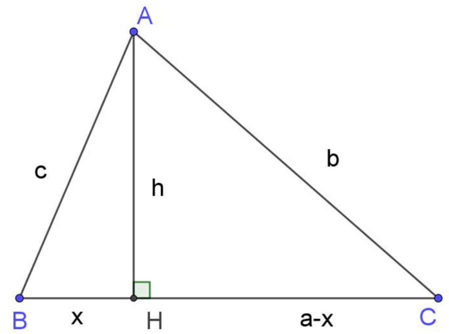
Propriété : pour tous réels a et b :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Cette propriété est très utile aussi bien pour factoriser que pour développer.
On peut notamment faire des « factorisations forcées » pour se ramener à l'une de ces égalités pour factoriser une expression.

Soit ABC un triangle. On note p le demi-périmètre du triangle. On note $\mathrm{BC} = a, \mathrm{CA} = b, \mathrm{AB} = c$.
On veut montrer que l'aire S du triangle ABC est $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. (*)

1. Démontrer que $16\,p(p-a)(p-b)(p-c) = ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)$.
2. On suppose que le triangle ABC est rectangle en A.
   a. Exprimer l'aire S en fonction de b et c.
   b. En déduire que, dans le cas d'un triangle rectangle, la relation (*) est bien vérifiée.

3. On suppose que le triangle ABC a tous ses angles aigus. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A et on pose $\mathrm{AH} = h$ et $BH = x$.
   a. Exprimer de deux façons différentes le nombre h^2 à l'aide des nombres a, b, c, x.
   b. En déduire une expression du nombre x en fonction des nombres a, b, c puis une expression du nombre h^2 uniquement en fonction des nombres a, b, c.
   c. Démontrer que $S^2 = \frac{1}{16}\left(4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)\right)$ puis que $S^2 = \frac{1}{16}(b^2 - (a - c)^2)((a + c)^2 - b^2)$.
   d. En déduire que $S^2 = \frac{1}{16}(2p - 2a)(2p - 2c)(2p - 2b)2p$ et conclure.

1. Par définition $p = \frac{a+b+c}{2}$ donc $p - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}$. De même $p - b = \frac{a+c-b}{2}$ et $p - c = \frac{a+b-c}{2}$.
   Donc $16\,p(p - a)(p - b)(p - c) = (a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)$
   soit $16\,p(p - a)(p - b)(p - c) = \big((b + c) + a\big)\big((b + c) - a\big)(a - (b - c))(a + (b - c))$
   soit $16\,p(p - a)(p - b)(p - c) = ((b + c)^2 - a^2)(a^2 - (b - c)^2)$.
2. a. Si le triangle ABC est rectangle en A alors son aire est $S = \frac{bc}{2}$.
   b. Si le triangle ABC est rectangle en A alors $a^2 = b^2 + c^2$ donc
   $(b + c)^2 - a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - a^2 = 2bc$ et $a^2 - (b - c)^2 = a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc) = 2bc$.
   Donc $16\,p(p - a)(p - b)(p - c) = 4b^2c^2 = 4 \times 4S^2$ d'où $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$.
   On a donc bien, dans ce cas particulier, $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$.
3. a. En se plaçant dans les triangles ABH et ACH rectangles en H, le théorème de Pythagore nous permet d'écrire :
   $h^2 = c^2 - x^2$ et $h^2 = b^2 - (a - x)^2 = b^2 - a^2 - x^2 + 2ax$.
   b. Les deux précédentes égalités entrainent :
   $c^2 - x^2 = b^2 - a^2 - x^2 + 2ax$
   D'où $2ax = a^2 + c^2 - b^2$ soit $x = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$.
   On en déduit que $h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2 = \frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$



   c. L'aire S du triangle ABC est alors telle que $S = \frac{ah}{2}$ d'où $S^2 = \frac{a^2h^2}{4} = \frac{1}{16}(4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2)$
   soit $S^2 = \frac{1}{16}((2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2) = \frac{1}{16}\big(2ac - (a^2 + c^2 - b^2)\big)\big(2ac + (a^2 + c^2 - b^2)\big)$
   soit $S^2 = \frac{1}{16}\big(b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac)\big)\big((a^2 + c^2 + 2ac) - b^2\big) = \frac{1}{16}(b^2 - (a - c)^2)((a + c)^2 - b^2)$.
   d. En reprenant les expressions obtenues à la question 1, on peut écrire :
   $b^2 - (a - c)^2 = \big(b - (a - c)\big)\big(b + (a - c)\big) = (b + c - a)(b + a - c) = 2(p - a)2(p - c)$
   et $(a + c)^2 - b^2 = \big((a + c) - b\big)\big((a + c) + b\big) = (a + c - b)(a + c + b) = 2(p - b)2p$.
   On en déduit que $S^2 = \frac{1}{16} \times 16(p - a)(p - c)(p - b)p$ soit $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$.

Remarque : cette formule s'appelle la formule de Héron, du grec Héron d'Alexandrie, mathématicien du 1Er siècle après J.C. Cette formule est aussi valable si le triangle a un angle obtus.

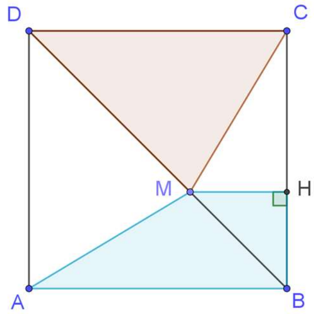
Exercice 3 – Fonction et équation

Définition : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. Si on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes respectives dans un repère du plan, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

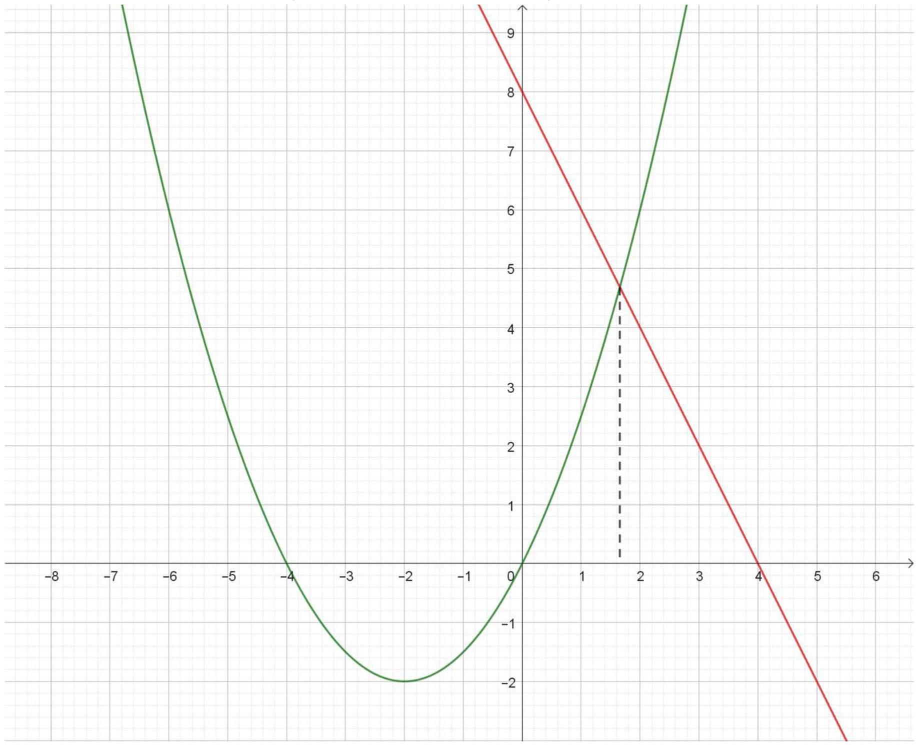
Soit ABCD un carré dont le côté mesure 4. On considère un point M de la diagonale [BD] et H son projeté orthogonal sur (BC) c'est-à-dire le pied de la hauteur issue de M dans le triangle BCM.
L'objectif de l'exercice est de déterminer la position si elle existe, du point M tel que l'aire du trapèze ABHM et l'aire du triangle DMC soient égales.
On note $\mathrm{BH} = x$.

1. Dans quel intervalle varie x ?
2. Déterminer, en fonction de x, l'aire du trapèze ABHM et l'aire du triangle DMC.
3. On pose, pour tout nombre réel x, $f(x) = \frac{x(x+4)}{2}$ et $g(x) = 2(4 - x)$. En représentant les fonctions f et g, à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, émettre une conjecture sur l'existence d'une position du point M telle que l'aire du trapèze ABHM soit égale à l'aire du triangle DMC.

4. **a.** Démontrer que le problème posé revient à résoudre l'équation $x(x+4) = 4(4-x)$.
   b. Montrer que cette équation s'écrit aussi $(x+4)^2 - 32 = 0$ et résoudre algébriquement le problème posé.



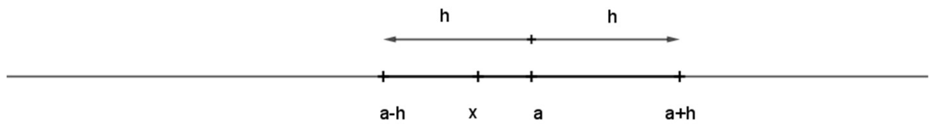
1. Quand M varie sur la diagonale $[BD]$ le point H varie sur le segment $[BC]$ donc x varie dans l'intervalle $[0,4]$.
2. Le triangle BHM est rectangle en H. De plus, comme $[BD]$ est la diagonale du carré, $\widehat{MBH} = \widehat{DBC} = 45°$ donc le triangle BHM est rectangle isocèle en H.
   On en déduit que $MH = BH = x$.
   L'aire du trapèze $ABHM$, qui est rectangle en H et en B, est donc
   $\mathcal{A}_1 = \frac{(AB+MH)HB}{2} = \frac{(4+x)x}{2}$.
   L'aire du triangle DMC est $\mathcal{A}_2 = \frac{DC \times CH}{2} = \frac{4(4-x)}{2} = 2(4-x)$.
3. D'après la question précédente, et pour $x \in [0,4]$, $\mathcal{A}_1 = f(x)$ et $\mathcal{A}_2 = g(x)$. La position du point M cherchée est donc l'abscisse, comprise entre 0 et 4, du point d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



   On peut conjecturer que le problème a bien une solution qui vaut approximativement 1,7.
4. **a.** L'équation $f(x) = g(x)$ s'écrit $\frac{x(x+4)}{2} = 2(4-x)$ soit $x(x+4) = 4(4-x)$.
   b. En développant, l'équation s'écrit $x^2 + 4x = 16 - 4x$ soit $x^2 + 8x - 16 = 0$
   soit $(x+4)^2 - 16 - 16 = 0$ soit $(x+4)^2 - 32 = 0$.
   Comme $32 = 2 \times 16 = \left(4\sqrt{2}\right)^2$, $(x+4)^2 - 32 = 0$ équivaut à $\left(x+4-4\sqrt{2}\right)\left(x+4+4\sqrt{2}\right) = 0$
   soit $x = -4 + 4\sqrt{2}$ ou $x = -4 - 4\sqrt{2}$. Seul le nombre $= -4 + 4\sqrt{2}$ est compris entre 0 et 4.
   Les deux aires sont donc égales si et seulement si $x = -4 + 4\sqrt{2}$.
   On peut constater que $x = -4 + 4\sqrt{2} \approx 1{,}66$.

Exercice 4 – Encadrements et valeurs approchées

Définition : soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif. On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a - h \leq x \leq a + h$.



On obtient un encadrement de x de longueur $2h$.
Soit a, b, c et d des nombres réels
Théorème 1 : si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
(si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ donc, comme $b - a = (b+c) - (a+c)$, $(b+c) - (a+c) \geq 0$

soit $(b+c) \geq (a+c)$)
Théorème 2 :
Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$
Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$
Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.
Théorème 3 :
Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.
Théorème 4 :
Si $0 \leq a \leq b$ alors $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Dans tout exercice portant sur des inégalités, on se ramène souvent à l'un au moins de ces théorèmes.

1. On sait que $1{,}73$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-2} près, que $1{,}41$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près et que $3{,}14$ est une valeur approchée de π à 10^{-2} près. Traduire ces informations par des encadrements.
2. En déduire un encadrement puis une valeur approchée de $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.
3. Donner un encadrement de $-\pi$ puis un encadrement de $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\pi$. Peut-on, avec les valeurs approchées prises au départ, comparer les nombres $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ et π ?
4. Reprendre les questions en prenant comme données de départ :
   $1{,}7321$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-4} près, que $1{,}4141$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près et que $3{,}1416$ est une valeur approchée de π à 10^{-4} près.

1. D'après les rappels en début d'exercice, $1{,}73$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-2} près se traduit par l'encadrement $1{,}73-0{,}01 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}73+0{,}01$ soit $1{,}72 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}74$.
   De même, $1{,}41-0{,}01 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}41+0{,}01$ soit $1{,}40 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}42$
   et $3{,}14-0{,}01 \leq \pi \leq 3{,}14+0{,}01$ soit $3{,}13 \leq \pi \leq 3{,}15$.
2. D'après le théorème 1, on en déduit que $1{,}72+1{,}40 \leq \sqrt{3}+\sqrt{2} \leq 1{,}74+1{,}42$ soit $3{,}12 \leq \sqrt{3}+\sqrt{2} \leq 3{,}16$.
   Comme $\frac{3{,}12+3{,}16}{2} = 3{,}14$ et $3{,}14-3{,}12 = 0{,}02$, on en déduit que $3{,}14$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ à 2×10^{-2} près.
3. D'après le théorème 2, $-3{,}13 \geq -\pi \geq -3{,}15$ soit $-3{,}15 \leq -\pi \leq -3{,}13$.
   En appliquant ensuite le théorème 1, on obtient $3{,}12-3{,}15 \leq \sqrt{3}+\sqrt{2}-\pi \leq 3{,}16-3{,}13$
   soit $-0{,}03 \leq \sqrt{3}+\sqrt{2}-\pi \leq 0{,}03$. Cet encadrement par deux nombres de signes contraires ne permet pas de comparer les nombres $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ et π.
4. $1{,}7321$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-4} près se traduit par $1{,}7320 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}7322$
   $1{,}4141$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près se traduit par $1{,}4140 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}4142$
   et, par addition membre à membre, on déduit de ces deux encadrements l'encadrement
   $1{,}7320+1{,}4140 \leq \sqrt{3}+\sqrt{2} \leq 1{,}7322+1{,}4142$ soit $3{,}1460 \leq \sqrt{3}+\sqrt{2} \leq 3{,}1464$
   D'autre part, $3{,}1416$ est une valeur approchée de π à 10^{-4} près se traduit par $3{,}1415 \leq \pi \leq 3{,}1417$ d'où $-3{,}1417 \leq -\pi \leq -3{,}1415$.
   Par somme, on en déduit que $3{,}1460-3{,}1417 \leq \sqrt{3}+\sqrt{2}-\pi \leq 3{,}1464-3{,}1415$
   soit $0{,}0043 \leq \sqrt{3}+\sqrt{2}-\pi \leq 0{,}0049$.
   En particulier, on en déduit que $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\pi > 0$ c'est-à-dire $\sqrt{3}+\sqrt{2} > \pi$.

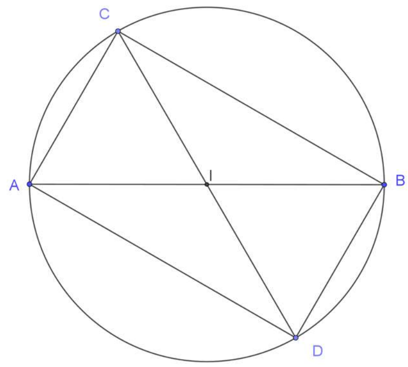
Exercice 5 – Triangle rectangle et cercle

Pour déterminer la nature d'un triangle ou d'un quadrilatère, on fait appel aux caractérisations d'un triangle particulier (isocèle, équilatéral, rectangle, isocèle rectangle) ou d'un quadrilatère particulier (parallélogramme, rectangle, losange, carré) en étant le plus précis possible.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre I. On considère deux points A et B diamétralement opposés sur ce cercle et un point C, distinct de A et B, sur le cercle $\mathcal{C}$.
On veut **démontrer** la nature du triangle ABC.

1. Soit D le point diamétralement opposé à C sur $\mathcal{C}$. Déterminer la nature du quadrilatère ADBC.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

1. Puisque $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ de centre I, I est le milieu de $[AB]$. Par définition de D, I est aussi le milieu de $[CD]$. Le quadrilatère $ADBC$ a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. C'est donc un parallélogramme.



De plus, comme C et A sont deux points de $\mathcal{C}$, $IA = IC$. On en déduit que les diagonales du quadrilatère $ADBC$ ont même longueur.

Au final, le quadrilatère $ADBC$ est un rectangle.

2. Puisque $ABDC$ est un rectangle, ses angles aux sommets sont droits.
   En particulier, le triangle ABC est rectangle en C.
3. Le théorème que l'on peut énoncer est :

Si le cercle circonscrit à un triangle a pour diamètre l'un des côtés du triangle, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé à ce côté.