

Exercice 1 Inégalités et calcul littéral

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.

Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

Propriétés :

(1) Pour tous réels a et b strictement positifs, si $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

(2) Pour tout réels a, b, c et d positifs, si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $ac \leq bd$.

1. a. Démontrer que, pour tous réels x, y strictement positifs, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.
b. Soit x, y, z des réels strictement positifs, développer et réduire le produit $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$.
c. En déduire que si x, y, z sont des réels strictement positifs tels que $x + y + z \leq 3$, alors $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$.
2. Soit a, b, c trois nombres réels de l'intervalle $]0, 1]$.
a. Montrer que $(ab - 1)(bc - 1)(ca - 1) \leq 0$.
b. En déduire que $a + b + c + \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc$.

Exercice 2 – Racines et coefficients d'un trinôme

Propriété : Soit a et b deux nombres réels tels que $a + b = s$ et $ab = p$. Alors a et b sont les solutions de l'équation $x^2 - sx + p = 0$.

Deux amis discutent sur les travaux entrepris dans le séjour rectangulaire de l'appartement de 60 m² de l'un d'entre eux :

- Tiens, tu as posé du papier peint au plafond et une corniche tout autour de ce plafond. Cela t'a-t-il coûté cher ?
- Ah, secret ! Je te dirai seulement que le prix au mètre de la corniche était deux fois plus élevé que le prix au mètre carré du papier peint mais que j'ai payé exactement la même somme pour les deux matériaux.

Après un instant de réflexion, l'ami remarque :

- Tu ferais mieux d'examiner de près ta facture.

Expliquer pourquoi.

Exercice 3 – Recherche de nombres premiers dans certaines suites

Définition : un entier naturel est un nombre premier lorsqu'il admet exactement deux diviseurs positifs, 1 et lui-même.

Pour factoriser un polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, on peut :

- chercher ses racines et, si elles existent, écrire $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ dans le cas de deux racines distinctes x_1 et x_2 ou $P(x) = a(x - x_0)^2$ dans le cas d'une racine double x_0 ;
- faire apparaître une identité remarquable comme $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ ou $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$.

- a. En 1772, Leonhard Euler annonce que le polynôme $P(n) = n^2 + n + 41$ prend pour valeur un nombre premier pour tout entier naturel n inférieur strictement à 40. Le vérifier.
- b. Pour quels nombres entiers naturels n le nombre $N_1 = n^4 - 20n^2 + 75$ est-il un nombre premier ?
- c. Pour quels nombres entiers naturels n le nombre $N_2 = n^4 - 3n^2 + 9$ est-il un nombre premier ?

Exercice 4 – Tangentes et paraboles

Propriété 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère. Soit a un réel de l'intervalle I et A le point de C_f d'abscisse a . Si f est dérivable en a , alors C_f admet au point A une tangente d'équation $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Propriété 2 : Les points d'intersections des courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g sont les points de ces courbes dont les abscisses sont solutions de $f(x) = g(x)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 4$ et $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Soit a un nombre réel. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a .
b. Déterminer, si elles existent, les tangentes à $\mathcal{P}$ passant par l'origine du repère.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = -x^2 + 6x - 2$ et $\mathcal{P}'$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a. Déterminer les coordonnées des points d'intersections éventuels des deux paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
b. Soit b un nombre réel. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{P}'$ au point $B(b, g(b))$.
c. En déduire s'il existe une tangente commune à ces deux paraboles.
3. On dit que deux courbes sont orthogonales lorsqu'elles admettent au moins un point commun et, qu'en ce(s) point(s), elles ont des tangentes perpendiculaires.
Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = -x^2 + \frac{7}{2}x + 1$ et $\mathcal{P}''$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$ sont orthogonales.

Exercice 5 – Nombres pentagonaux

Définition : on dit qu'une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = r$.

Méthode : démontrer qu'une suite est arithmétique revient donc à démontrer que, pour tout entier naturel n , la différence $u_{n+1} - u_n$ entre deux termes consécutifs de la suite ne dépend pas de n .

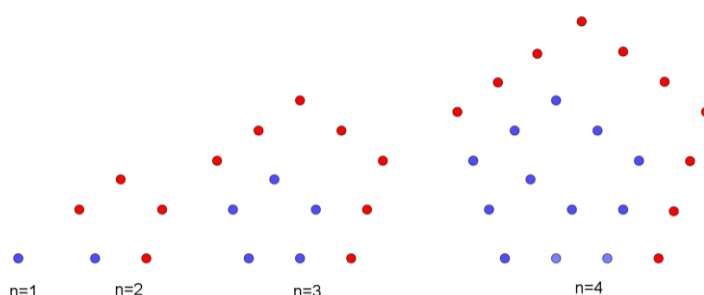
Propriétés :

- (1) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Alors, pour tout entier naturel n , $u_n = u_1 + (n - 1)r$.
- (2) Soit (u_n) une suite arithmétique. Alors, pour tout entier naturel non nul n , $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$.

Partant d'un point (étape 1), on construit successivement des pentagones réguliers en ajoutant un point sur la ligne du bas comme sur la figure ci-contre.

On note u_n le nombre de points (rouges ou bleus) obtenus à l'étape n . Le nombre u_n est appelé *nombre pentagonal*.

1. Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4 .
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $u_{n+1} = u_n + 3n + 1$.
3. Déterminer la nature de la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.
4. En exprimant, pour $n > 1$ la somme $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$ de deux manières différentes, déduire une expression explicite de u_n en fonction de n .
5. Quel est le nombre pentagonal u_{2025} ?



Exercice 6 – Produit scalaire et orthogonalité

Définition 1 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ($\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$).

On note p le réel

- $p = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ si les points B et C sont distincts du point A
- $p = 0$ sinon.

(On admet que p ne dépend pas des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre p .

Définition 2 : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux lorsque soit l'un des vecteurs est le vecteur nul soit les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.

(On admet que l'orthogonalité ne dépend pas des représentants choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

Pour calculer un produit scalaire dans un problème de géométrie plane, il faut principalement avoir en tête les deux expressions :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ si les points B et C sont distincts du point A ;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) .

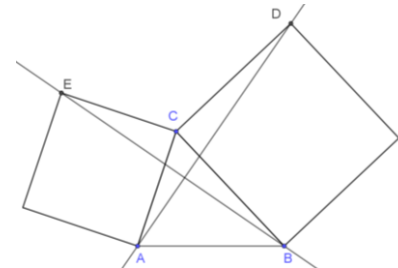
Pour démontrer des orthogonalités, il est souvent utile de se référer :

- au théorème 1 : « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ » ;
- à des décompositions de vecteurs grâce à la relation de Chasles ;
- aux propriétés opératoires du produit scalaire.

1. Soit ABC un triangle.

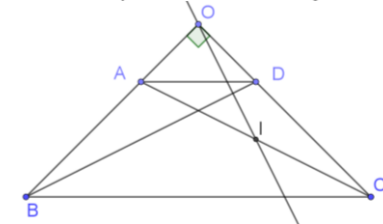
À l'extérieur de ce triangle on construit deux carrés comme sur la figure ci-contre.

- Montrer que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}$.
- En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont orthogonaux.
- Que peut-on en déduire pour les droites (AD) et (EB) ?



2. Soit $ABCD$ un trapèze isocèle dont les côtés non parallèles sont perpendiculaires en un point O , comme sur la figure ci-contre et soit I le milieu de $[AC]$.

- Exprimer $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$.
- En déduire que $2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$.
- Démontrer que les droites (OI) et (BD) sont perpendiculaires.



Exercice 7 – Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R . On appelle *puissance du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$* le nombre $p(M) = MO^2 - R^2$

- Montrer que si on considère un point M et une droite du plan passant par M tels que la droite d coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points A et B , alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = p(M)$.
(on pourra introduire le point D diamétralement opposé au point A sur le cercle $\mathcal{C}$).
- Montrer que si une droite d passant par M est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en T alors $MT^2 = p(M)$.
- Etudier le signe de $p(M)$ suivant la position du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$.
- Soit $\mathcal{C}'$ un cercle de centre O' et de rayon R' . On suppose que les deux cercles ont des centres distincts. Déterminer l'ensemble des points M du plan ayant même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Traiter le cas particulier où les deux cercles ont même rayon.