ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

n Pépinière académique de mathématiques

Année 2024-2025 — **Stage « filé »**

Classe de première — **Fiche numéro 2**

Parution lundi 25 novembre — **Retour attendu pour le lundi 16 décembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 – Un peu d'arithmétique

Définition 1 : on dit qu'un nombre entier m est un multiple d'un entier p s'il existe un entier k tel que $m = kp$.

On peut dire aussi que l'entier p divise m, mais attention à ne pas écrire de *quotient*, car on sortirait de l'arithmétique.

Définition 2 : on dit que deux entiers naturels sont premiers entre eux lorsque qu'ils ne possèdent que 1 comme diviseur commun dans l'ensemble des entiers naturels.

1. **a.** La *somme des carrés* de 5 entiers positifs consécutifs est égale à 1815. Quel est le plus grand de ces entiers ?

b. Démontrer que la somme des carrés de 5 entiers consécutifs quelconques est toujours divisible par 5.

2. **a.** Démontrer que si n et m sont deux entiers naturels multiples d'un entier naturel d alors $m + n$ et $m - n$ sont des multiples de d.

3. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, n et $n + 1$ sont premiers entre eux

Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, la somme de k entiers impairs consécutifs ne peut être un nombre premier.

(On pourra utiliser la propriété : pour tout entier naturel non nul k, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{k(k+1)}{2}$)

Exercice 2 – Polynômes composés

Définition : Soit n un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré n, une fonction P pour laquelle il existe des réels $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout réel x, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Les réels $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de P.

Propriété : soit P et Q deux fonctions polynômes. P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$) si et seulement si P et Q ont même degré et les mêmes coefficients.

Soit P un polynôme, on considère le polynôme Q défini par, pour tout réel x, $Q(x) = P(P(x))$.

Déterminer les réels a, b et c tels que le polynôme Q défini par, pour tout réel x, $Q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 13$ soit ainsi associé à un polynôme P à coefficients entiers.

Exercice 3 – Inégalités et racines carrées

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.

Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

Propriété : Soit a et b deux réels positifs, $a \leq b$ si et seulement si $a^2 \leq b^2$.

1. Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

a. Montrer que $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

b. Montrer que $\frac{2}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

c. Comparer $\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

2. **a.** Représenter graphiquement les deux fonctions f et g définies par, pour tout réel x de $[0, +\infty[$:

$f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x + \frac{1}{4}$ et conjecturer le nombre de points communs aux deux courbes.

b. Vérifier cette conjecture algébriquement.

Exercice 4 – Médianes concourantes et droite d'Euler

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

- caractérisation du milieu I d'un segment $[\mathrm{AB}]$ par l'une des égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}}$

- si I est le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$ alors pour tout point M du plan, $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$.

- parallélisme de droites ou alignement de points par la colinéarité de deux vecteurs
- parallélogramme par l'égalité de deux vecteurs
- relation de Chasles…

Théorème : les médianes d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est appelé centre de gravité du triangle et il est situé au tiers de chaque médiane, en partant de la base.

1. Démonstration du théorème : soit ABC un triangle et soit $\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}$ les milieux respectifs des segments $[\mathrm{BC}], [\mathrm{CA}], [\mathrm{AB}]$. On note G le point d'intersection des médianes (BJ) et (CK) et D le symétrique de A par rapport à G.
   a. Montrer que le quadrilatère BDCG est un parallélogramme.
   b. En déduire que G est situé sur (AI) et préciser la position de G sur chaque médiane.
   c. Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)$.
2. Soit respectivement O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et H le point du plan défini par $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$.
   a. Montrer que (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
   b. Que représente le point H pour le triangle ABC ?
3. Montrer que les points O, H et G sont alignés.

Exercice 5 – Alignement, parallélisme en géométrie analytique

Se placer dans un repère permet de résoudre certains exercices de géométrie en :
- traduisant un alignement ou un parallélisme en termes de colinéarité de vecteurs ;
- utilisant le déterminant de deux vecteurs ;
- traduisant sur ses coordonnées l'appartenance d'un point à une droite.

Le repère peut alors être donné dès le départ ou introduit « judicieusement » pour travailler avec des coordonnées simples à déterminer.

Soit ABC un triangle non aplati et soit A', B', C' les milieux respectifs des segments $[\mathrm{BC}], [\mathrm{CA}], [\mathrm{AB}]$. On considère un point D distinct des points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ et on note E et F les symétriques de D par rapport respectivement aux points A' et B'.

On se place dans le repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{\mathrm{BE}}$.
2. Démontrer que les droites (AF) et (BE) sont confondues si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
3. On note G le symétrique du point D par rapport au point C'.
   a. À quelles conditions les droites $(\mathrm{AE}), (\mathrm{BF})$ et (CG) sont-elles deux à deux distinctes.
   b. Démontrer que ces droites sont alors concourantes.

Exercice 6 – Famille de droites

En géométrie analytique, il est indispensable de savoir :
- traduire par une équation de droite les éléments caractéristiques d'une droite (vecteur directeur, coefficient directeur, appartenance d'un point …) ;
- trouver à partir d'une équation de droite ces mêmes éléments caractéristiques.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour tout réel m, on considère l'ensemble D_m des points $M(x, y)$ tels que : $(m+2)x + (m-2)y - 8 = 0$.

1. Vérifier que pour tout réel m, D_m est une droite.
2. Pour quelle valeur de m, la droite D_m est-elle parallèle à l'axe des abscisses ? à l'axe des ordonnées ?
3. Montrer que toutes les droites D_m passent par un même point I dont on donnera les coordonnées.
4. Pour quelle valeur de m le nombre -3 est-il le coefficient directeur de la droite D_m ? A-t-on pour tout réel p une droite D_m de coefficient directeur p ?
4. Soit $A(-3,2)$ et $B(1,6)$. Pour quelle valeur de m la droite D_m a-t-elle même ordonnée à l'origine que la droite (AB) ?