ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2024-2025 **Stage « filé »**

Classe de première **Fiche numéro 1**

Parution lundi 14 octobre **Retour attendu pour le mardi 12 novembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 Divers types de raisonnement

En mathématiques, on énonce des *définitions* et on établit des *théorèmes*. Tout théorème énonce une vérité qui vaut pour tous les types d'objets concernés. On établit un théorème (ou une propriété) grâce à un *raisonnement* (une *démonstration*). Il existe divers types de raisonnements. Le plus souvent utilisé est le raisonnement déductif (construit à l'aide d'une suite d'implications) mais d'autres types de raisonnement peuvent parfois s'avérer plus appropriés.
L'objectif de cet exercice est de bien appréhender trois types de raisonnement : le raisonnement par contre-exemple, le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par disjonction de cas.

1. Contre-exemple

Une affirmation mathématique qui a l'allure d'un théorème n'en est pas un si un des objets dont elle traite apporte la contradiction. On dit qu'on a affaire à un contre-exemple : un exemple d'objet mathématique (nombres, figures géométriques, fonctions…) pour lequel l'affirmation est fausse.

Peut-on affirmer que :

a. un entier multiple de 6 et 4 est un multiple de 24 ?

b. si x et y sont deux réels tels que $x^2 < y^2$ alors $x < y$?

c. si p et q sont deux nombres premiers distincts alors $p + q$ est un nombre pair ?

2. Par l'absurde

Utiliser un raisonnement par l'absurde pour démontrer la véracité d'une affirmation consiste à montrer que la négation de cette affirmation est fausse. Dans le cas d'une implication, cela revient à supposer que la conclusion est fausse pour aboutir à une contradiction.

a. *Principe des tiroirs* : Soit n un entier naturel non nul. Montrer que si on doit ranger $n + 1$ chaussettes dans n tiroirs alors un tiroir contient au moins 2 chaussettes.

b. Montrer que si un entier naturel non nul n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

c. Montrer que si n est un entier dont le carré est impair alors n est impair.

3. Par disjonction des cas

Le raisonnement par disjonction de cas est une forme de raisonnement mathématique qui consiste à décomposer la proposition que l'on cherche à démontrer en un nombre fini de cas (sous-propositions) vérifiés indépendamment, ces cas ne se chevauchant pas et couvrant à eux tous toutes les possibilités (on parle alors de *partition* des cas).

a. Montrer que pour tout entier n, $n(n^2 + 5)$ est un multiple de 3 (on étudiera les 3 cas correspondant aux restes possibles de la division euclidienne de n par 3).

b. Montrer que pour tous réels a et b, si $Max(a, b)$ désigne le plus grand des nombres a et b, alors

$$Max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|).$$

Autour des inégalités

Quelques principes de base dans le traitement d'inégalités :

(1) Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence.

(2) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

(3) Pour étudier le signe d'une expression, on peut l'écrire sous forme de produit ou de quotient.

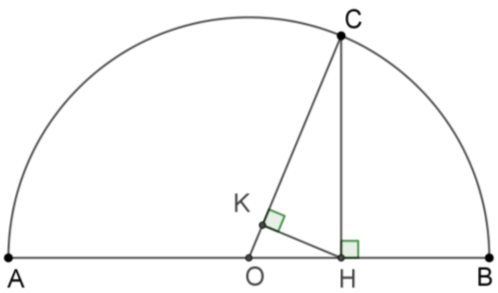
Exercice 2 – Certitude ?

Les lectures graphiques de positions relatives de courbes donnent des approximations pouvant conduire à des conjectures. Le calcul algébrique assure des affirmations s'appuyant sur les propriétés des inégalités.

1. Représenter dans un même repère orthonormal les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par :
$f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = -0{,}9x + 1{,}9$.
Quelle conjecture peut-on émettre quant à la position relative des deux courbes ?
2. Vérifier si cette conjecture est exacte.

Exercice 3 – Comparaison de moyennes
1. Étude algébrique
Soit a et b deux nombres réels strictement positifs, on appelle respectivement moyenne arithmétique, moyenne géométrique et moyenne harmonique les trois réels suivant :
$m = \frac{a+b}{2}$, $g = \sqrt{ab}$ et $h = \frac{2ab}{a+b}$.
Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b, $m \geq g \geq h$.
2. Étude géométrique
a. Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A et O le milieu du segment [BC].
Montrer que $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{BC}$ et $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{CH} \times \mathrm{CB}$ et que $\mathrm{AH}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{CH}$.

b. Dans la figure ci-contre, si on note $\mathrm{AH} = a$ et $\mathrm{HB} = b$, montrer que :
$\mathrm{OC} = \frac{a+b}{2}$, $\mathrm{CH} = \sqrt{ab}$ et $\mathrm{CK} = \frac{2ab}{a+b}$.
Retrouver, grâce à la figure ci-contre, l'encadrement précédemment démontré algébriquement.
(on pourra utiliser les résultats obtenus dans la question **2.a**)



Exercice 4 – Pas de racine mais une factorisation
Définition : Soit n un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré n, une fonction P pour laquelle il existe des réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout réel x, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de P.
Propriété : soit P et Q deux fonctions polynômes. P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$) si et seulement si P et Q ont le même degré et les mêmes coefficients.

Soit p un nombre strictement positif et soit le polynôme $P(x) = x^4 + p^2$.
1. L'équation $P(x) = 0$ admet-elle des solutions dans **R** ?
2. Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel x, $P(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + b)$ et retrouver le résultat du 1.

Exercice 5 – Mise en équation
1. Existe-t-il un nombre rationnel qui, ajouté à son inverse, donne $\frac{34}{15}$?
2. Existe-t-il un nombre rationnel qui, retranché à son inverse, donne $\frac{5}{3}$?

Exercice 6 – Un peu de calcul vectoriel
Le calcul vectoriel est un outil puissant qui permet notamment de caractériser certaines configurations :
- Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)$
- Le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.
- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

La relation de Chasles permet de travailler sur les égalités vectorielles.

1. Soit ABCD un parallélogramme. On définit les points I, J, K et L par les égalités vectorielles :
$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BJ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CK}} = 2\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DL}} = 2\overrightarrow{\mathrm{DA}}$.
Montrer que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.
2. Soit ABC un triangle. On considère les points M et N définis par $\overrightarrow{\mathrm{MB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. On note I et J les milieux respectifs de [NB] et [MC]
Montrer que les points A, I et J sont alignés.