Pépinière académique de mathématiques

**Année 2024-2025** **Stage « filé »**

**Classe de première** **Fiche numéro 1**

**Parution lundi 14 octobre** **Retour attendu pour le mardi 12 novembre**

***Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.***

**Exercice 1 Divers types de raisonnement**

En mathématiques, on énonce des *définitions* et on établit des *théorèmes*. Tout théorème énonce une vérité qui vaut pour tous les types d'objets concernés. On établit un théorème (ou une propriété) grâce à un *raisonnement* (une *démonstration*). Il existe divers types de raisonnements. Le plus souvent utilisé est le raisonnement déductif (construit à l'aide d'une suite d'implications) mais d'autres types de raisonnement peuvent parfois s'avérer plus appropriés.

L'objectif de cet exercice est de bien appréhender trois types de raisonnement : le raisonnement par contre-exemple, le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par disjonction de cas.

**1. Contre-exemple**

Une affirmation mathématique qui a l'allure d'un théorème n'en est pas un si un des objets dont elle traite apporte la contradiction. On dit qu'on a affaire à un contre-exemple : un exemple d'objet mathématique (nombres, figures géométriques, fonctions…) pour lequel l'affirmation est fausse.

Peut-on affirmer que :

**a.** un entier multiple de 6 et 4 est un multiple de 24 ?

**b.** si $x$ et $y$ sont deux réels tels que $x^2 < y^2$ alors $x < y$ ?

**c.** si $p$ et $q$ sont deux nombres premiers distincts alors $p + q$ est un nombre pair ?

**a.** L'affirmation est fausse car 12 est un multiple de 6 et de 4 mais pas de 24.

**b.** L'affirmation est fausse car $2^2 < (-3)^2$ car $4 < 9$ mais $2 \geq -3$

*Remarque : on démontre en revanche que, pour tous réels $x$ et $y$ positifs, si $x^2 < y^2$ alors $x < y$.*

**c.** L'affirmation est fausse car la somme de 2 et de tout autre nombre premier (qui est impair) est un nombre impair.

**2. Par l'absurde**

Utiliser un raisonnement par l'absurde pour démontrer la véracité d'une affirmation consiste à montrer que la négation de cette affirmation est fausse. Dans le cas d'une implication, cela revient à supposer que la conclusion est fausse pour aboutir à une contradiction.

**a.** *Principe des tiroirs* : Soit $n$ un entier naturel non nul. Montrer que si on doit ranger $n + 1$ chaussettes dans $n$ tiroirs alors un tiroir contient au moins 2 chaussettes.

**b.** Montrer que si un entier naturel non nul $n$ est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

**c.** Montrer que si $n$ est un entier dont le carré est impair alors $n$ est impair.

**a.** La négation de la proposition « un tiroir contient au moins 2 chaussettes » est « chaque tiroir contient au plus une chaussette ». Mais alors $n$ tiroirs contiendront à eux tous au plus $1 + 1 + \cdots + 1 = n$ chaussettes.

**b.** Si $n$ est le carré d'un entier naturel non nul, alors il existe un entier naturel non nul $p$ tel que $n = p^2$. Si $2n$ est le carré d'un entier, alors il existe un entier naturel $q$ tel que $2n = q^2$. Alors $2 = \frac{q^2}{p^2}$ d'où $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$ ce qui est impossible puisque $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

**c.** Considérons un entier $n$ dont le carré est impair. Si $n$ est pair alors il existe un entier $k$ tel que $n = 2k$. On a ainsi $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$, ce qui est un nombre pair, ce qui contredit le fait que le carré de $n$ est impair.

**3. Par disjonction des cas**

Le raisonnement par disjonction de cas est une forme de raisonnement mathématique qui consiste à décomposer la proposition que l'on cherche à démontrer en un nombre fini de cas (sous-propositions) vérifiés indépendamment, ces cas ne se chevauchant pas et couvrant à eux tous toutes les possibilités (on parle alors de *partition* des cas).

**a.** Montrer que pour tout entier $n$, $n(n^2+5)$ est un multiple de 3 (on étudiera les 3 cas correspondant aux restes possibles de la division euclidienne de $n$ par 3).

**b.** Montrer que pour tous réels $a$ et $b$, si $Max(a,b)$ désigne le plus grand des nombres $a$ et $b$, alors

$$Max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|).$$

**1. a.** Un entier est un multiple de 3 signifie qu'il est le produit de 3 par un entier.

De plus, le reste de la division euclidienne de $n$ par 3 vaut 0, 1 ou 2 (entier naturel inférieur strictement à 3).

- Si ce reste vaut 0, il existe un entier $k$ tel que $n = 3k$ et $N = n(n^2+5) = \mathbf{3}k((3k)^2+5) = 3K$ où $K = k((3k)^2+5)$ est un entier d'où $N$ est un multiple de 3.
- Si ce reste vaut 1, il existe un entier $k$ tel que $n = 3k+1$ et $N = n(n^2+5) = (3k+1)((3k+1)^2+5)$ soit $N = (3k+1)(9k^2+6k+6\,) = \mathbf{3}(3k+1)(3k^2+2k+2\,) = 3K'$ où $K' = (3k+1)(3k^2+2k+2\,)$ est un entier d'où $N$ est un multiple de 3.
- Si ce reste vaut 2, il existe un entier $k$ tel que $n = 3k+2$ et $n^2+5 = (3k+2)^2+5 = 9k^2+12k+9$ et $N = \mathbf{3}(3k+2)(3k^2+4k+3) = 3K''$ où $K'' = (3k+2)(3k^2+4k+3)$ est un entier d'où $N$ est un multiple de 3.

, Conclusion, tous les cas étant traités : $N$ est un multiple de 3.

**b.** Si $a \leq b$, alors $Max(a,b) = b$ et $\frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \frac{1}{2}(a+b+b-a) = b$

donc $Max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$.

Si $a > b$, alors $Max(a,b) = a$ et $\frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \frac{1}{2}(a+b+a-b) = a$

donc $Max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$.

Conclusion, tous les cas étant traités : $Max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$.

**Autour des inégalités**

Quelques principes de base dans le traitement d'inégalités :

(1) Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence.

(2) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

(3) Pour étudier le signe d'une expression, on peut l'écrire sous forme de produit ou de quotient.

**Exercice 2 – Certitude ?**

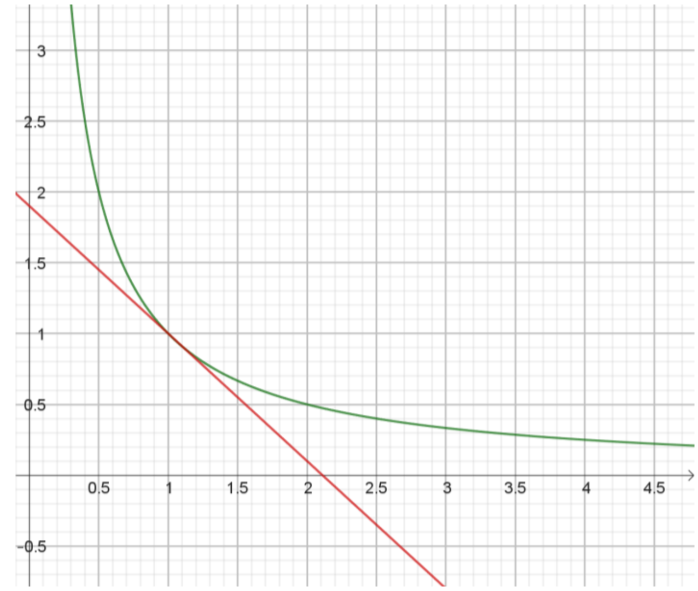
Les lectures graphiques de positions relatives de courbes donnent des approximations pouvant conduire à des conjectures. Le calcul algébrique assure des affirmations s'appuyant sur les propriétés des inégalités.

**1.** Représenter dans un même repère orthonormal les fonctions $f$ et $g$ définies sur $]0,+\infty[$ par :

$f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = -0{,}9x + 1{,}9$.

Quelle conjecture peut-on émettre quant à la position relative des deux courbes ?

**2.** Vérifier si cette conjecture est exacte.




1. La conjecture que la figure nous pousse à émettre est que la courbe de la fonction $f$ est située au-dessus de celle de la fonction $g$.
2. 2. Pour vérifier si cette conjecture est exacte on compare les nombres $f(x)$ et $g((x)$ pour un réel $x$ strictement positif quelconque.
   On étudie donc le signe de $\frac{1}{x} - (-0{,}9x + 1{,}9)$.
   Comme $x > 0$, cela revient à étudier le signe de $x\left(\frac{1}{x} - (-0{,}9x + 1{,}9)\right) = 0{,}9x^2 - 1{,}9x + 1$.
   Le discriminant du trinôme est
   $$\Delta = 1{,}9^2 - 4 \times 0{,}9 = 0{,}01$$
   $\Delta > 0$ donc le trinôme a deux racines, l'une étant 1 l'autre étant donc $\frac{1}{0{,}9} = \frac{10}{9}$. Ces racines sont bien positives donc la conjecture est fausse, ce que l'on peut voir sur l'agrandissement ci-dessous.


**Exercice 3 – Comparaison de moyennes**

**1.** Étude algébrique

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels strictement positifs, on appelle respectivement moyenne arithmétique, moyenne géométrique et moyenne harmonique les trois réels suivant :

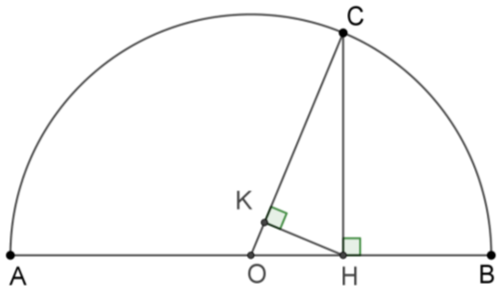
$m = \frac{a+b}{2}$, $g = \sqrt{ab}$ et $h = \frac{2ab}{a+b}$.

Montrer que pour tous réels strictement positifs $a$ et $b$, $m \geq g \geq h$.

**2.** Étude géométrique

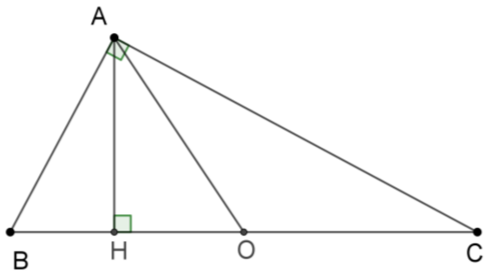
**a.** Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A et O le milieu du segment [BC]. Montrer que $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{BC}$ et $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{CH} \times \mathrm{CB}$ et que $\mathrm{AH}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{CH}$.

**b.** Dans la figure ci-contre, si on note $\mathrm{AH} = a$ et $\mathrm{HB} = b$, montrer que :
$\mathrm{OC} = \frac{a+b}{2}$, $\mathrm{CH} = \sqrt{ab}$ et $\mathrm{CK} = \frac{2ab}{a+b}$.
Retrouver, grâce à la figure ci-contre, l'encadrement précédemment démontré algébriquement.
(on pourra utiliser les résultats obtenus dans la question **2.a**)




**1.** Étude algébrique
On s'appuie sur le principe (1) puis sur le principe (3) :
$m - g = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ ce qui justifie l'inégalité $m \geq g$.
En appliquant l'inégalité précédemment démontrée aux nombres $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, on obtient $\sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}} \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$ c'est-à-dire $\sqrt{\frac{1}{ab}} \leq \frac{\frac{a+b}{ab}}{2}$ soit $\frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{a+b}{2ab}$. Comme tous les nombres intervenant ici sont positifs, on obtient en prenant les inverses de part et d'autre de la dernière inégalité : $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$.

**2.** Étude géométrique
**a.** Les triangles ABH et ABC sont semblables puisqu'ils ont deux angles de même mesure (ils sont rectangles et ont l'angle en B en commun). Donc $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ ce qui s'écrit aussi $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{BC}$.
On procède de même pour l'autre égalité en considérant les triangles ACH et ABC.
Les triangles ABH et ACH sont semblables. En effet le triangle ABC est rectangle en A.




donc $\widehat{\mathrm{ACH}} = \widehat{\mathrm{ACB}} = 90° - \widehat{\mathrm{ABC}} = 90° - \widehat{\mathrm{ABH}}$.
Les triangles ABH et ACH sont rectangles en H donc $\widehat{\mathrm{BAH}} = 90° - \widehat{\mathrm{ABH}} = \widehat{\mathrm{ACH}}$. Ils ont donc deux angles de même mesure.
On en déduit que $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AH}}$ soit $\mathrm{AH}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{CH}$.

**b.** On pose $\mathrm{AH} = a$ et $\mathrm{BH} = b$. On peut affirmer que $\mathrm{OC} \geq \mathrm{CH} \geq \mathrm{CK}$ car, dans un triangle rectangle, la longueur de l'hypoténuse est supérieure à celle de chacun des côtés de l'angle droit.
On remarque que $m = \mathrm{OA} = \mathrm{OC}$, $\mathrm{CH} = \sqrt{\mathrm{AH} \times \mathrm{BH}} = \sqrt{ab}$ (d'après la troisième égalité démontrée dans le a. et $\mathrm{CK} \times \mathrm{CO} = \mathrm{CH}^2$ (en se plaçant dans le triangle CHO pour appliquer la première égalité du a. Cette dernière égalité s'écrit aussi $\mathrm{CK} = \frac{\mathrm{CH}^2}{\mathrm{CO}}$ c'est-à-dire $\mathrm{CK} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = h$. L'encadrement $\mathrm{OC} \geq \mathrm{CH} \geq \mathrm{CK}$ donne donc $m \geq g \geq h$.

**Exercice 4 – Pas de racine mais une factorisation**
Définition : Soit $n$ un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré $n$, une fonction $P$ pour laquelle il existe des réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout réel $x$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.
Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de $P$.
Propriété : soit $P$ et $Q$ deux fonctions polynômes. $P$ et $Q$ sont égales (c'est-à-dire pour tout réel $x$, $P(x) = Q(x)$) si et seulement si $P$ et $Q$ ont le même degré et les mêmes coefficients.

Soit $p$ un nombre strictement positif et soit le polynôme $P(x) = x^4 + p^2$.
**1.** L'équation $P(x) = 0$ admet-elle des solutions dans $\mathbf{R}$ ?
**2.** Montrer qu'il existe deux nombres réels $a$ et $b$ tels que, pour tout réel $x$, $P(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + b)$ et retrouver le résultat du 1.

1. L'entier 4 étant pair, pour tout nombre réel $x$, $x^4 \geq 0$. De même et comme $p > 0$, $p^2 > 0$ donc $x^4 + p^2 > 0$ et l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution dans **R**.
2. Pour tout nombre réel $x$,
$(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + b) = x^4 + ax^3 + bx^2 - ax^3 - a^2x^2 - abx + bx^2 + abx + b^2$
Soit $(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + b) = x^4 + (2b - a^2)x^2 + b^2$
En appliquant la propriété rappelée ci-dessus, $P(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + b)$ si et seulement si
$\begin{cases} 1 = 1 \\ 2b - a^2 = 0 \\ b^2 = p^2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = p \text{ ou } b = -p \\ a^2 = 2b \end{cases}$. La deuxième équation impose $b \geq 0$ . Le système a donc pour solutions
$b = p$ , $a = \sqrt{2p}$ et $b = p$ , $a = -\sqrt{2p}$. Dans les deux cas, on obtient la factorisation
$$P(x) = \left(x^2 + \sqrt{2p}x + p\right)\left(x^2 - \sqrt{2p}x + p\right)$$
Le discriminant de $x^2 + \sqrt{2p}x + p$ comme de $x^2 - \sqrt{2p}x + p$ est $\Delta = 2p - 4p = -2p$ qui est un nombre strictement négatif. On retrouve donc bien que l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution dans **R**.

*Remarque : pour un polynôme, il ne faut donc pas confondre « ne pas avoir de racine » et « ne pas être factorisable »*

**Exercice 5 – Mise en équation**

1. Existe-t-il un nombre rationnel qui, ajouté à son inverse, donne $\frac{34}{15}$ ?
2. Existe-t-il un nombre rationnel qui, retranché à son inverse, donne $\frac{5}{3}$ ?

1. Le problème revient à chercher si l'équation $r + \frac{1}{r} = \frac{34}{15}$ admet une solution non nulle dans **Q**.
L'équation équivaut à $15r^2 + 15 = 34r$ soit $15r^2 - 34r + 15 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 34^2 - 4 \times 15^2 = 256 = 16^2$ et l'équation admet deux solutions $\frac{34-16}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ et son inverse $\frac{5}{3}$ (ce qui était prévisible étant donné la symétrie de l'équation).
2. Le problème revient cette fois-ci à chercher si l'équation $\frac{1}{r} - r = \frac{5}{3}$ admet une solution non nulle dans **Q**.
L'équation équivaut à $3 - 3r^2 = 5r$ soit $3r^2 + 5r - 3 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 5^2 + 4 \times 3^2 = 61$. L'équation a bien des solutions mais, comme $\Delta$ n'est pas un carré parfait, ces solutions ne sont pas rationnelles.

**Exercice 6 – Un peu de calcul vectoriel**

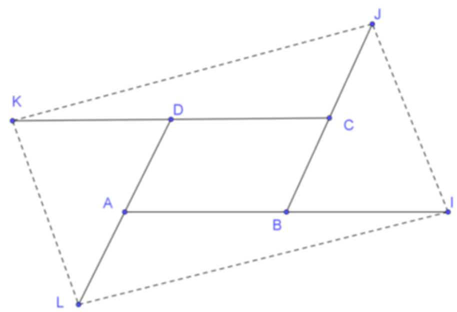
Le calcul vectoriel est un outil puissant qui permet notamment de caractériser certaines configurations :

- Le point $I$ est le milieu du segment [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- Le point $I$ est le milieu du segment [AB] si et seulement si, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)$
- Le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.
- Trois points $A, B$ et $C$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

La relation de Chasles permet de travailler sur les égalités vectorielles.

1. Soit ABCD un parallélogramme. On définit les points I, J, K et L par les égalités vectorielles :
$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK} = 2\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DL} = 2\overrightarrow{DA}$.
Montrer que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.
2. Soit ABC un triangle. On considère les points M et N définis par $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On note I et J les milieux respectifs de [NB] et [MC]
Montrer que les points A, I et J sont alignés.

1. On démontre que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$
$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$
Et
$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DK} = -2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CK} = -2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$
Or ABCD est un parallélogramme donc
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
D'où $\overrightarrow{LK} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$
Ce qui signifie que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.



**2.** On démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires.

Comme I est le milieu de [NB], $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\frac{1}{3}AC} + \overrightarrow{AB}\right)$

soit $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}\right)$

L'égalité $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ s'écrit aussi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Soit $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$

Alors $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = 3\overrightarrow{AI}$

On en déduit que les points A, I et J sont bien alignés.