Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 **Stage « filé »**

Classe de première **Fiche numéro 3**

Parution lundi 24 janvier **Retour attendu pour le mercredi 9 février**

Exercice 1 Inégalités

Rappels sur les inégalités :

(1) Pour comparer deux nombres on peut étudier le signe de leur différence.

(2) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

a. Montrer que pour tout réel a strictement positif, $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

b. Soit x, y et z trois nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} > \pi$.

Définition 1 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ($\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$).

On note p le réel $p = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ si les points B et C sont distincts du point A et $p = 0$ sinon.

(On admet que p ne dépend pas des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$)

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre p.

Définition 2 : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux lorsque soit l'un des vecteurs est le vecteur nul soit les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.

(On admet que l'orthogonalité ne dépend pas des représentants choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$)

Pour calculer un produit scalaire dans un problème de géométrie plane, il faut principalement avoir en tête les deux expressions :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ si les points B et C sont distincts du point A ;

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Pour démontrer des orthogonalités, il est souvent utile de se référer :

- au théorème 1 : « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ » ;
- à des décompositions de vecteurs grâce à la relation de Chasles ;
- aux propriétés opératoires du produit scalaire.

Exercice 2 Produit scalaire et orthogonalité

1. Démonstration du théorème 1 :
   a. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux, montrer que $\vec{u}.\vec{v} = 0$ (on distinguera le cas où l'un au moins des vecteurs est nul).
   b. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
   Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous les deux non nuls, montrer qu'ils sont orthogonaux.
   Que se passe-t-il si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul ?
2. Application 1 : soit ABCD un carré. On place deux points P et Q respectivement sur les segments [AB] et [AD] tels que $\mathrm{AP} = \mathrm{AQ}$.
   Montrer que la médiane issue de A dans le triangle ADP est une hauteur du triangle ABQ.
3. Application 2 : soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R, A et B deux points de $\mathcal{C}$ tels que [AB] n'est pas un diamètre de $\mathcal{C}$ et D le point diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$.
   Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{BA}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0$. Qu'en déduit-on pour le triangle ABD ?

Exercice 3 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. On appelle *puissance du point M par rapport au cercle* $\mathcal{C}$ le nombre $\mathrm{p(M)} = \mathrm{MO}^2 - \mathrm{R}^2$

a. Montrer que si on considère un point M et une droite du plan passant par M tels que la droite d coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points A et B, alors $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{p(M)}$.
(on pourra introduire le point D diamétralement opposé au point A sur le cercle $\mathcal{C}$ et se servir du résultat de la question 3 de l'exercice 2).

b. Montrer que si une droite d passant par M est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en T alors $\mathrm{MT}^2 = p(\mathrm{M})$.

c. Etudier le signe de $p(\mathrm{M})$ suivant la position du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$.

d. Soit $\mathcal{C}'$ un cercle de centre O' et de rayon R'. On suppose que les deux cercles ont des centres distincts. Déterminer l'ensemble des points M du plan ayant même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Traiter le cas particulier où les deux cercles ont même rayon.

Exercice 4 Centre du cercle inscrit

Définition : On appelle cercle inscrit dans un polygone un cercle tangent à chacun des côtés du polygone.

Propriétés :

- Les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes.
- Le point de concours des bissectrices d'un triangle est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

Montrer qu'un vecteur est nul revient à montrer que sa norme vaut zéro.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u}$ et pour tout vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est un vecteur de norme 1.

Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle inscrit. On note I le centre du cercle $\mathcal{C}$ et on note a, b, c les longueurs respectives des segments [BC], [CA], [AB].

Le cercle $\mathcal{C}$ est tangent aux segments [BC], [CA], [AB] respectivement en M, N, P.

On veut montrer que $a\overrightarrow{\mathrm{IM}} + b\overrightarrow{\mathrm{IN}} + c\overrightarrow{\mathrm{IP}} = \vec{0}$

a. On pose $\vec{u} = \frac{1}{\mathrm{IM}}\overrightarrow{\mathrm{IM}}$, $\vec{v} = \frac{1}{\mathrm{IN}}\overrightarrow{\mathrm{IN}}, \vec{w} = \frac{1}{\mathrm{IP}}\overrightarrow{\mathrm{IP}}$ et $\vec{V} = a\overrightarrow{\mathrm{IM}} + b\overrightarrow{\mathrm{IN}} + c\overrightarrow{\mathrm{IP}}$.
Exprimer $\|\vec{V}\|^2$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et du rayon r du cercle $\mathcal{C}$.

b. En déduire que $\|\vec{V}\| = 0$.

Exercice 5 Recherche de nombres premiers dans certaines suites

Définition : un entier naturel est un nombre premier lorsqu'il admet exactement deux diviseurs positifs, 1 et lui-même.

Pour factoriser un polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, on peut :

- chercher ses racines et, si elles existent, écrire $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ dans le cas de deux racines distinctes x_1 et x_2 ou $P(x) = a(x - x_0)^2$ dans le cas d'une racine double x_0 ;
- faire apparaitre une identité remarquable comme $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ ou $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$.

a. En 1772, Leonhard Euler annonce que le polynôme $P(n) = n^2 + n + 41$ prend pour valeur un nombre premier pour tout n inférieur ou égal 40. Le vérifier.

b. Pour quels nombres entiers naturels n le nombre $N_1 = n^4 - 20n^2 + 75$ est-il un nombre premier ?

c. Pour quels nombres entiers naturels n le nombre $N_2 = n^4 - 3n^2 + 9$ est-il un nombre premier ?

Exercice 6 Droites et paraboles

Lorsque le plan est muni d'un repère, chercher les points $M(x, y)$ d'intersection entre deux ensembles définis chacun par une équation revient souvent à chercher les réels x vérifiant les deux équations.

Pour toute droite d de pente p, il existe un réel q tel que l'équation réduite de d soit $y = px + q$. La valeur de q est déterminée en remplaçant x et y par les coordonnées d'un point connu de la droite d.
Pour déterminer que deux ensembles sont égaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on peut montrer que si un objet est dans $\mathcal{A}$ alors il est dans $\mathcal{B}$ et que, réciproquement, si un objet est dans $\mathcal{B}$ alors il est dans $\mathcal{A}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère :

- la représentation graphique $\mathcal{P}$ de la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$;
- pour tout réel m, la droite d_m d'équation $y = x + m$.

a. Construire la courbe $\mathcal{P}$.
b. Déterminer, suivant la valeur de m, le nombre de points d'intersection de $\mathcal{P}$ et d_m.
c. Lorsque $\mathcal{P}$ et d_m ont deux points d'intersection A et B, déterminer le lieu géométrique du milieu I du segment [AB], c'est-à-dire l'ensemble de tous les points I quand m prend toutes les valeurs donnant au moins un point d'intersection entre $\mathcal{P}$ et d_m.
d. Lorsque $\mathcal{P}$ et d_m ont un seul point d'intersection, que représente la droite d_m pour la fonction f ?

Exercice 7 Orthocentre et hyperbole

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, si A , B et C sont trois points du plan tels que $A \neq B$:

- un point $M(x, y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ;
- un point $M(x, y)$ appartient à la droite passant par C et perpendiculaire à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

C'est en traduisant sur les coordonnées (déterminant ou produit scalaire nul) qu'on obtient une équation de chacune de ces droites.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ et trois points deux à deux distincts A, B et C d'abscisses respectives a, b et c (non nulles) de cette hyperbole.
a. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur d_A issue du point A dans le triangle ABC.
b. En déduire une équation de la hauteur d_B issue du point B dans le triangle ABC.
c. Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC appartient à l'hyperbole $\mathcal{H}$.

Exercice 8 Racine double d'un polynôme et dérivation

Soit un polynôme P. Un nombre réel a est racine double de P lorsqu'il existe un polynôme R tel que,
pour tout réel x, $P(x) = (x - a)^2 R(x)$ et $R(a) \neq 0$
On a vu dans la fiche 2 que pour tous réels x et a et pour tout entier naturel $n \geq 2$,
$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$.
Si P et Q sont des polynômes de degré p et q, alors le polynôme PQ défini par, pour tout réel x, $PQ(x) = P(x)Q(x)$ est de degré $p + q$.
Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et mêmes coefficients.

a. Montrer que pour tout réel a et pour tout polynôme P, il existe un polynôme Q tel que $P(x) = P(a) + (x - a)Q(x)$.
b. Montrer qu'alors $P'(a) = Q(a)$.
c. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un réel a soit une racine double du polynôme P.
d. Montrer que le polynôme P défini par $P(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$ admet 1 comme racine double et résoudre l'équation $P(x) = 0$ puis factoriser $P(x)$.