Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 | **Stage « filé »**

Classe de première | **Fiche numéro 2**

Parution mercredi 18 novembre | **Retour attendu pour le lundi 6 décembre**

Exercice 1 Polynômes et calculs de sommes

Une fonction P pour laquelle il existe un triplet de réels (a, b, c) tel que $a \neq 0$ et, pour tout réel x,

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

est dite fonction polynôme de degré 2.

Propriété : Les *coefficients* a, b, c sont alors uniques.

On définirait plus généralement les fonctions polynômes de degré n, entier naturel quelconque, et on parviendrait à la même propriété d'unicité des coefficients, utilisée par exemple dans la suite.

Ainsi une fonction polynôme de degré n est une fonction P pour laquelle il existe un $(n+1)$-uplet de réels $(a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0)$ tel que $a_n \neq 0$, tel que pour tout réel x, $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.

1 *a.* Soit a un nombre réel non nul et P le polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$. On suppose que P admet deux racines (solutions de l'équation $P(x) = 0$) x_1 et x_2. Exprimer $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$ en fonction de a, b et c.

b. Soit P le polynôme défini par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a un nombre réel non nul. On suppose que P admet trois racines x_1, x_2 et x_3. Exprimer $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ et $x_1x_2x_3$ en fonction de a, b, c et d.

2. *a.* Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que, pour tout réel , $P(x+1) - P(x) = x$. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de la somme $1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

b. Déterminer un polynôme Q de degré 3 tel que, pour tout réel x, $Q(x+1) - Q(x) = x^2$. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de la somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

c. En utilisant une démarche analogue à celle des questions précédentes, montrer que, pour tout entier naturel n , on a $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

1. *a.* Comme P a deux racines x_1 et x_2, on peut écrire $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ soit, en développant, $P(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2) + ax_1x_2$. En appliquant la propriété citée, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} a = a \\ -a(x_1 + x_2) = b \\ ax_1x_2 = c \end{cases}$$ soit $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$ et $\boldsymbol{x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$.

b.

On procède de même avec le polynôme P tel que $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ qui s'écrit aussi

$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3) + a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - ax_1x_2x_3$.

La propriété étendue nous donne le système :

$$\begin{cases} a = a \\ -a(x_1 + x_2 + x_3) = b \\ a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = c \\ -ax_1x_2x_3 = d \end{cases}$$ soit $\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}}$, $\boldsymbol{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}}$ et $\boldsymbol{x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}}$.

2. *a.* Le polynôme P est de degré 2 donc il existe un triplet (a, b, c) de réels tel que $a \neq 0$ et, pour tout réel x, $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Alors, $P(x+1) - P(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c)$

Soit, $P(x+1) - P(x) = ax^2 + (2a+b)x + b + c - (ax^2 + bx + c) = 2ax + a + b$.

Dire que pour tout réel x, $P(x+1) - P(x) = x$ revient donc à dire que $\begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$.

Le polynôme défini par $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ répond donc à la question.

Remarque : il y a en fait une infinité de polynômes répondant à la question puisque le réel c peut être quelconque. On choisit le plus simple ici $c = 0$.

Alors $1 + 2 + 3 + \cdots + n = P(2) - P(1) + P(3) - P(2) + P(4) - P(3) + \cdots + P(n+1) - P(n)$

Soit $1 + 2 + 3 + \cdots + n = P(n+1) - P(1) = \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) - 0$

Soit, en factorisant par $(n+1)$, $\boldsymbol{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$.

b. On pose de même $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Alors $Q(x+1)-Q(x)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d-(ax^3+bx^2+cx+d)$
Soit $Q(x+1)-Q(x)=\ a(x^3+3x^2+3x+1)+b(x^2+2x+1)+cx+c+d-(ax^3+bx^2+cx+d)$
Soit $Q(x+1)-Q(x)=3a\,x^2+(3a+2b)x+a+b+c$

La condition $Q(x+1)-Q(x)=x^2$ se traduit donc par le système $\begin{cases} 3a=1 \\ 3a+2b=0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$, système qu'on résout en prenant les équations les unes après les autres pour calculer successivement a, b, c.

Le polynôme défini par $Q(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x$ répond à la question (comme tout polynôme $Q(x)+d$)

Alors $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=Q(2)-Q(1)+Q(3)-Q(2)+\cdots+Q(n+1)-Q(n)=Q(n+1)-Q(1)$

Soit $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)-0=\frac{n+1}{6}(2(n+1)^2-3(n+1)+1)$

Soit $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n+1}{6}(2(n^2+2n+1)-3n-2)=\frac{n+1}{6}(2n^2+n)$

Soit $\mathbf{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

c. On cherche cette fois-ci un polynôme R de degré 4 tel que pour tout réel x, $R(x+1)-R(x)=x^3$.
En posant $R(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, on obtient :

$$R(x+1)-R(x)=\ a(x+1)^4+b(x+1)^3+c(x+1)^2+d(x+1)+e-(\,ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)$$

Soit, en développant et en réduisant,

$$R(x+1)-R(x)=4ax^3+(6a+3b)x^2+(4a+3b+2c)x+(a+b+c+d)$$

La condition $R(x+1)-R(x)=x^3$ se traduit donc par le système $\begin{cases} 4a=1 \\ 6a+3b=0 \\ 4a+3b+2c=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases}$.

On procède comme dans ma question précédente et le polynôme défini par $R(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2$ répond à la question.

Alors $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=R(2)-R(1)+R(3)-R(2)+\cdots+R(n+1)-R(n)=R(n+1)-R(1)$ soit $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}(n+1)^4-\frac{1}{2}(n+1)^3+\frac{1}{4}(n+1)^2=\frac{1}{4}(n+1)^2[(n+1)^2-2(n+1)+1]$ soit $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}(n+1)^2[(n+1)-1]^2=\frac{1}{4}(n+1)^2n^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

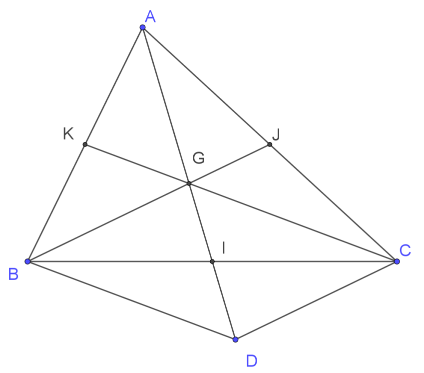
Exercice 2 Médianes concourantes et droite d'Euler

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :
- caractérisation du milieu I d'un segment [AB] par l'une des égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ ou, pour un point M du plan, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.
- parallélisme de droites ou alignement de points par la colinéarité de deux vecteurs
- parallélogramme par l'égalité de deux vecteurs
- relation de Chasles…

Théorème : les médianes d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est appelé centre de gravité du triangle et il est situé au tiers de chaque médiane, en partant de la base.

1. Démonstration du théorème : soit ABC un triangle et soit I, J, K les milieux respectifs des segments [BC], [CA], [AB]. On note G le point d'intersection des médianes (BJ) et (CK) et D le symétrique de A par rapport à G.
a. Montrer que le quadrilatère BDCG est un parallélogramme.
b. En déduire que G est situé sur (AI) et préciser la position de G sur chaque médiane.
c. Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$.
2. Soit respectivement O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et soit H le point du plan défini par $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
a. Montrer que (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
b. Que représente le point H pour le triangle ABC ?
3. Montrer que les points O, H et G sont alignés.

1.a. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$. Or G et J sont les milieux respectifs de [DA] et [CA] d'où $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AJ} = 2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AJ}\right) = 2\overrightarrow{GJ}$.
On en déduit que les droites (DC) et (GJ) sont parallèles. Comme les points B, G et J sont alignés, (DC) et (BG) sont parallèles.
On démontrerait de même que les droites (BD) et (CG) sont parallèles.
Le quadrilatère BDCG est donc un parallélogramme.
b. Les diagonales du parallélogramme BDCG se coupent en leur milieu.
Le milieu I du segment [BC] est donc aussi le milieu du segment [GD]. En particulier le point I appartient à la droite (GD) qui est aussi la droite (AG), ce qui implique que les points A, G et I sont alignés.



Les trois médianes sont donc bien concourantes en G et $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{IG} + 2\overrightarrow{IG} = 3\overrightarrow{IG}$ car I est le milieu de [GD] et G est le milieu de [AD]. On en tire la relation $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$, ce qui précise la position du point G sur la médiane [AI]. On démontrerait une position analogue sur les deux autres médianes.
c. Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$
Or $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI} = -\overrightarrow{GA}$ donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.
2. *a.* L'égalité $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ s'écrit aussi $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}$ car I est le milieu de [BC].
On en déduit que (AH) et (OI) sont parallèles. Or (OI) est la médiatrice de [BC] par définition du point O donc (AH) est perpendiculaire à (BC). La droite (AH) est donc la hauteur issue du point A dans le triangle ABC.
b. On démontrerait de même que (BH) et (CH) sont aussi des hauteurs. Le point H est donc l'orthocentre du triangle ABC.
3. De plus comme $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ pour tout point M, en particulier $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, on en déduit que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
On peut donc affirmer que les points O, H et G sont alignés.

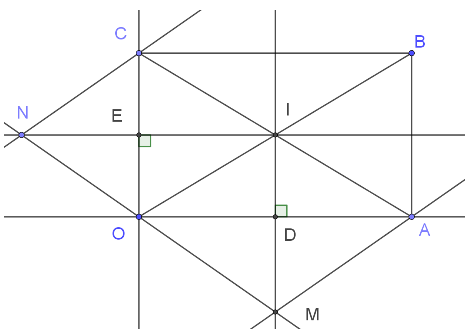
Exercice 3 Alignement et parallélisme en géométrie analytique

Se placer dans un repère permet de résoudre certains exercices de géométrie en :
- traduisant un alignement ou un parallélisme en termes de colinéarité de vecteurs ;
- utilisant le déterminant de deux vecteurs ;
- traduisant sur ses coordonnées l'appartenance d'un point à une droite.

Le repère peut alors être donné dès le départ ou introduit « judicieusement » pour travailler avec des coordonnées simples à déterminer.

Soit OABC un rectangle de centre I et soit D et E les milieux respectifs de [OA] et [OC]. On considère deux points M et N situés respectivement sur les droites (ID) et (IE).
Montrer que si les points O, M et N sont alignés alors les droites (AM) et (CN) sont parallèles.
On peut se placer pour cela dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dans lequel les coordonnées du point A sont $(a, 0)$ et celles du point C sont $(0, c)$.

Par définition du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on a $\overrightarrow{OA} = a\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OC} = c\vec{\jmath}$ d'où puisque OABC est un rectangle donc un parallélogramme : $\overrightarrow{OB} = a\vec{\imath} + c\vec{\jmath}$.
Les coordonnées de B sont donc (a, c) et celles du milieu I de la diagonale [OB] sont $\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$.
Comme OABD est un rectangle, les points D et E sont les milieux respectifs de [OA] et [OC]. On a donc D$\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ et E$\left(0, \frac{c}{2}\right)$.
La droite (ID) a alors pour équation $x = \frac{a}{2}$ et la droite (IE) a pour équation



$y = \frac{c}{2}$. On en déduit successivement les coordonnées suivantes :
$\mathrm{M}\left(\frac{a}{2}, y_{\mathrm{M}}\right)$, $\mathrm{N}\left(x_{\mathrm{N}}, \frac{c}{2}\right)$, $\overrightarrow{OM}\left(\frac{a}{2}, y_{\mathrm{M}}\right)$, $\overrightarrow{ON}\left(x_{\mathrm{N}}, \frac{c}{2}\right)$. Comme les points O, M et N sont alignés, le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ est nul soit $y_{\mathrm{M}} \times x_{\mathrm{N}} = \frac{a}{2} \times \frac{c}{2}$.
On obtient de plus $\overrightarrow{AM}\left(-\frac{a}{2}, y_{\mathrm{M}}\right)$ et $\overrightarrow{CN}\left(x_{\mathrm{N}}, -\frac{c}{2}\right)$.

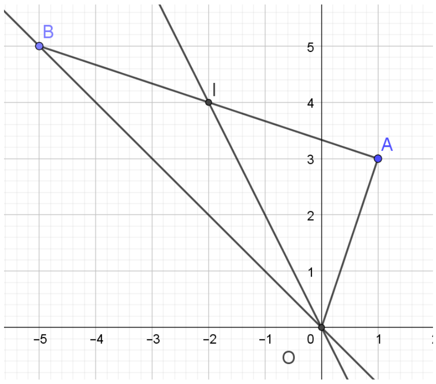
Le déterminant de ces deux vecteurs est égal à $y_M x_N - \left(-\frac{a}{2}\right) \times \left(-\frac{c}{2}\right) = y_M x_N - \frac{a}{2} \times \frac{c}{2} = 0$ d'après les lignes précédentes. Les droites (AM) et (CN) sont donc bien parallèles.

Exercice 4 Équations de droites

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le point $\mathrm{A}(1,3)$.
Déterminer la nature du triangle OAB où B est un point de la droite d'équation $x + y = 0$ et où la médiane issue de O dans le triangle OAB est la droite d'équation $2x + y = 0$.
2. Deux points distincts O et A du plan étant donnés et deux droites distinctes D_1 et D_2 passant par O étant données, est-il toujours possible de trouver un point B tel que B appartienne à D_1 et que D_2 soit la médiane issue de O dans le triangle OAB ? Si B existe, à quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les droites D_1 et D_2, le triangle OAB est-il rectangle en A ?

1. On commence par déterminer les coordonnées (x_B, y_B)du point B.
Comme B appartient à la droite d'équation $x + y = 0$, $y_B = -x_B$.
De plus le milieu I de [AB] dont les coordonnées sont donc $\left(\frac{1+x_B}{2}, \frac{3-x_B}{2}\right)$ est un point de la médiane issue de O dans OAB. Ses coordonnées vérifient donc l'équation $2x + y = 0$, ce qui donne $2\frac{1+x_B}{2} + \frac{3-x_B}{2} = 0$ soit $x_B = -5$.

On en déduit le point $B(-5{,}5)$.
La figure ci-contre donne l'idée d'un triangle rectangle en A.
Pour le vérifier, on calcule la norme des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées respectives $(1{,}3)$, $(-5{,}5)$ et $(-6{,}2)$ ce qui donne $OA = \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{10}$, $OB = \|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{50}$ et $BA = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{40}$.
Comme $50 = 10 + 40$, la réciproque du théorème de Pythagore permet d'affirmer que le triangle OAB est rectangle en A.



2. On reprend un raisonnement analogue en se plaçant dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dans lequel on a $A(\,0, y_A)$.
Comme les droites D_1 et D_2 passent par O, il existe deux réels distincts a et b tels que D_1 ait pour équation $y = ax$ et D_2 ait pour équation $y = bx$.
On note (x_B, y_B) les coordonnées de B. Le point B appartient à D_1 équivaut à $y_B = ax_B$.
Le milieu I de $[AB]$ a alors pour coordonnées $\left(\frac{x_B}{2}, \frac{y_A + ax_B}{2}\right)$. Le point I appartient à D_2 équivaut à $\frac{y_A + ax_B}{2} = b\frac{x_B}{2}$ soit $y_A = (b-a)x_B$. Comme $a \neq b$, le point B existe et a pour coordonnées $\left(\frac{y_A}{b-a}, \frac{ay_A}{b-a}\right)$.
Comme la droite (OA) est l'axe des ordonnées, le triangle OAB est rectangle en A si et seulement si la droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses c'est-à-dire $y_B = y_A$ c'est-à-dire $\frac{a}{b-a} = 1$ soit $b = 2a$.

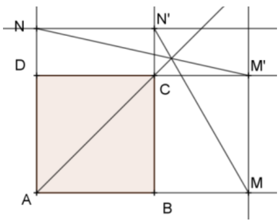
Exercice 5 Famille de droites

En géométrie analytique, il est indispensable de savoir :
- traduire sur une équation de droite les éléments caractéristiques d'une droite (vecteur directeur, coefficient directeur, appartenance d'un point …) ;
- trouver à partir d'une équation de droite ces mêmes éléments caractéristiques.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour tout réel m, on considère l'ensemble D_m des points $M(x, y)$ tels que : $(m-1)x - 2my + 2m + 1 = 0$.
1. Vérifier que pour tout réel m, D_m est une droite.
2. Pour quelle valeur de m, la droite D_m est-elle parallèle à l'axe des abscisses ? à l'axe des ordonnées ?
3. Montrer que toutes les droites D_m passe par un même point I dont on donnera les coordonnées.
4. Pour quelle valeur de m la droite D_m a 1 comme coefficient directeur ? A-t-on pour tout réel p une droite D_m de coefficient directeur p ?
5. Soit $A(2, -1)$ et $B(-2{,}5)$. Pour quelle valeur de m la droite D_m a-t-elle même ordonnée à l'origine que la droite (AB) ?

1. D_m est une droite si et seulement si les coefficients de x et y dans l'équation (E) ne sont pas tous les deux nuls. Or $m-1=0$ équivaut à $m=1$ mais alors $2m \neq 0$ et $2m=0$ équivaut à $m=0$ mais alors $m-1 \neq 0$. L'ensemble D_m est donc bien toujours une droite.
2. La droite D_m est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si le coefficient de x dans l'équation (E) est nul soit $m-1=0$ c'est-à-dire $m=1$.Une équation de D_1 est $-2y+3=0$ ou $y=\frac{3}{2}$.
La droite D_m est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si le coefficient de y dans l'équation (E) est nul soit $m=0$. Une équation de D_0 est $-x+1=0$ ou $x=1$.
3. Si le point I existe, il appartient aux droites D_0 et D_1. Il suffit alors de vérifier que, pour tout réel m, le couple $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ est solution de (E).
Or, pour tout réel m, $(m-1)\times 1-2m\times\frac{3}{2}+2m+1=m-1-3m+2m+1=0$.
Toutes les droites D_m passent donc bien par le point $I\left(1,\frac{3}{2}\right)$.
4. Si $m \neq 0$, l'équation (E) s'écrit $y=\frac{m-1}{2m}x+\frac{2m+1}{2m}$ et le coefficient directeur de la droite D_m est $p=\frac{m-1}{2m}$.
$p=1$ équivaut $m-1=2m$ soit $m=-1$.
Soit p un réel, $p=\frac{m-1}{2m}$ équivaut, pour $m \neq 0$, à $(2p-1)m=-1$. Au réel p on pourra associer une droite D_m si et seulement si $p \neq \frac{1}{2}$.
5. Un point $M(x,y)$ du plan appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x-2,y+1)$ et $\overrightarrow{AB}(-4{,}6)$ sont colinéaires c'est-à-dire leur déterminant est nul ce qui s'écrit $6(x-2)-(-4)(y+1)=0$.
Cette équation s'écrit aussi $y=-\frac{3}{2}x+2$. L'ordonnée à l'origine de la droite (AB) est donc 2.
La droite D_m a donc même ordonnée à l'origine que la droite (AB) si et seulement si $\frac{2m+1}{2m}=2$ soit $m=\frac{1}{2}$.

Exercice 6 Droites concourantes



Deux droites du plan sont parallèles ou sécantes. Lorsque trois droites ont un point commun, on dit qu'elles sont *concourantes* (ce terme a été utilisé dans un exercice précédent).
On considère un carré ABCD de côté 1, et le repère d'origine A et d'axes (AB) et (AD) (avec l'orientation nécessaire). Les points M et N ont pour couples de coordonnées $(a,0)$ et $(0,b)$ respectivement. Les points M' et N' sont les points de couples de coordonnées $(a,1)$ et $(1,b)$ respectivement.
1. À quelle condition (sur a et b) les droites (MN') et (NM') sont-elles parallèles ?
2. Montrer que, si cette condition n'est pas réalisée, les droites (MN'), (NM') et (AC) sont concourantes.

1. Le point M' a pour coordonnées $(a,1)$ et le point N a pour coordonnées $(0,b)$. La pente de la droite (M'N) est donc $\frac{1-b}{a}$. Les coordonnées de M sont $(a,0)$ et celles de N' sont $(1,b)$. La pente de la droite (MN') est donc $\frac{b}{1-a}$.
Ces pentes sont identiques si $(1-b)(1-a)=ab$, c'est-à-dire $a+b=1$.
2. Si cette condition n'est pas réalisée, on peut chercher les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites, dont des équations sont : $y-b=\frac{1-b}{a}x$ et $y=\frac{b}{1-a}(x-a)$. Le système $\begin{cases}(1-b)x-ay+ab=0\\ bx-(1-a)y-ab=0\end{cases}$ a une solution (x,y) qui vérifie $x-y=0$ (par « addition » membre à membre). Le point correspondant appartient donc à la droite (AC). Les trois droites sont concourantes.

Exercice 7 Algorithme de Babylone

On rappelle (vu dans la fiche 1) que pour comparer deux nombres, on étudie le signe de la différence et que pour tous nombres positifs a et b, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
Le nombre $\sqrt{2}$ est un irrationnel mais des Babyloniens (vers 1800-1500 avant J.C.) connaissaient un procédé d'approximation de ce nombre par des rationnels.

La tablette Ybc 7289 qui donne les premières décimales de $\sqrt{2}$

1. Montrer que, pour tout réel a strictement positif, le nombre $\sqrt{2}$ est compris entre a et $\frac{2}{a}$ et que la moyenne arithmétique $\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$ de ces nombres est supérieure à $\sqrt{2}$.
2. En déduire un procédé d'approximation de $\sqrt{2}$.

3. En partant de $a = 2$, déterminer les cinq premiers encadrements de $\sqrt{2}$ par des rationnels et l'amplitude du dernier encadrement.

1. Pour l'encadrement de $\sqrt{2}$, on distingue deux cas.
Si $0 < a < \sqrt{2}$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (puisque les nombres considérés sont strictement positifs) et $\frac{2}{a} > \frac{2}{\sqrt{2}}$ (puisque 2 est positif). Ceci s'écrit $\frac{2}{a} > \sqrt{2}$. On a donc $a < \sqrt{2} < \frac{2}{a}$.
Si $a > \sqrt{2}$, alors $\frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (puisque les nombres considérés sont strictement positifs) et $\frac{2}{a} < \frac{2}{\sqrt{2}}$ (puisque 2 est positif). Ceci s'écrit $\frac{2}{a} < \sqrt{2}$. On a donc $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < a$.
Dans les deux cas $\sqrt{2}$ est compris entre a et $\frac{2}{a}$.
Comme on a vu que pour tous nombres positifs a et b, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, on obtient si $b = \frac{2}{a}$, $\sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$.
2. La moyenne arithmétique de a et $\frac{2}{a}$ est comprise entre ces deux nombres et, d'après la question précédente supérieure à $\sqrt{2}$.
Donc si $0 < a < \sqrt{2}$, alors $a < \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) < \frac{2}{a}$ et si $a > \sqrt{2}$, alors $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \leq a$.
Cela permet d'obtenir un procédé d'approximation de $\sqrt{2}$ en prenant à chaque nouvelle étape du procédé :
- L'encadrement $a < \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$ si $0 < a < \sqrt{2}$;
- L'encadrement $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$ si $a > \sqrt{2}$.
3. Si on prend au départ $a = 2$, on est dans le cas où $1 < \sqrt{2} < a$.
.Le deuxième encadrement obtenu est alors $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$ soit $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$.
Comme $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$, on reprend l'encadrement $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$ avec $a = \frac{3}{2}$.
Alors $\frac{2}{a} = \frac{4}{3}$ et $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9+8}{6}\right) = \frac{17}{12}$ et le troisième encadrement obtenu est $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$.
On recommence avec $a = \frac{17}{12}$. Alors $\frac{2}{a} = \frac{24}{17}$ et $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408}$ d'où un quatrième encadrement $\frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{577}{408}$.
On recommence avec $a = \frac{577}{408}$.