



Exercice 1 Palindromes multiples de 55

On dit qu'un nombre entier m est un multiple d'un entier p s'il existe un entier k tel que $m = kp$. On peut dire aussi que l'entier p divise m , mais attention à ne pas écrire de *quotient*, on sortirait de l'arithmétique.

On s'intéresse aux nombres entiers N qui s'écrivent avec 6 chiffres dans le système décimal, et qui sont des *palindromes*, terme signifiant que leur écriture est symétrique, comme 123 321 ou 428 824. Parmi ces nombres, combien y en a-t-il qui sont multiples de 55 ?

Exercice 2 Exercice pas commode

Cet exercice propose quelques utilisations du *Principe des tiroirs* (ou *Principe de Dirichlet*, d'après Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, mathématicien allemand, on trouve aussi l'expression anglaise *pigeonhole principle*). Lorsqu'on range n objets dans un meuble ayant moins de n tiroirs, l'un des tiroirs contient au moins deux objets.

Ce principe est un outil puissant dans des raisonnements en mathématiques.

Justifier les affirmations suivantes :

- Sachant qu'un individu n'a jamais plus de 350 000 cheveux sur la tête, au moins deux personnes habitant Paris ont le même nombre de cheveux.
- Soit a , b et c trois nombres entiers. Montrer que le produit $(a - b)(b - c)(c - a)$ est un nombre pair.
- Si on considère 12 nombres entiers distincts compris entre 1 et 99, on peut en trouver deux tels que leur différence (positive) soit un nombre jumeau (un nombre à deux chiffres identiques).
- Soit n un entier supérieur ou égal à 1, alors dans tout sous-ensemble E de $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ contenant $n + 1$ éléments, il existe deux entiers distincts a et b tels que a divise b . (on pourra remarquer que tout élément de $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ peut s'écrire de manière unique $2^r p$ où r est un entier positif ou nul et p un entier impair).

Exercice 3 À la recherche de contre-exemples

En mathématiques, on énonce des *définitions* et on établit des *théorèmes*. Tout théorème énonce une vérité qui vaut pour tous les types d'objets concernés. Une affirmation mathématique qui a l'allure d'un théorème n'en est pas un si un des objets dont elle traite apporte la contradiction. On dit qu'on a affaire à un contre-exemple.

- Est-il vrai que tout quadrilatère du plan ayant trois côtés de même longueur est un losange ?
- Pierre de Fermat, mathématicien français, pensait que, pour tout entier n , le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$ est un nombre premier. La suite commence bien : 3, 5, 17, 257, 65 537, mais...
- À la lumière de ce qu'on a vu au collège, on pourrait penser que les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes. En considérant un tétraèdre dont les quatre sommets sont des sommets d'un cube, montrer que c'est faux.

Exercice 4. Relations métriques dans un triangle rectangle

Dans un problème faisant intervenir des relations métriques dans un triangle rectangle, on pense évidemment au théorème de Pythagore mais on peut aussi faire appel :

- aux triangles semblables ou aux triangles isométriques ;
- à des calculs d'aires
- à une transformation conservant les distances (symétrie, translation, rotation)

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A et O le milieu du segment [BC].

Montrer que :

- $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times CB$.
- $AH^2 = BH \times CH$.
- $AH \times BC = AB \times AC$.
- $OA = \frac{1}{2}BC$.

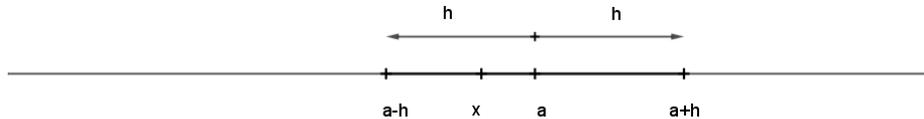
Exercice 5. Inégalités, encadrements et valeur approchée

Trois principes de base :

- (1) Pour comparer deux nombres on peut étudier le signe de leur différence.
- (2) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.
- (3) Pour étudier le signe d'une expression, on peut l'écrire sous forme de produit ou de quotient.

Une définition :

Soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif. On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près) lorsque $a - h \leq x \leq a + h$.



Cela signifie que la distance entre les réels a et x est inférieure ou égale à h .

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$.

En déduire, sans utiliser de calculatrice, une valeur approchée de $\sqrt{1,000\,000\,1}$ à 10^{-14} près.

2. Comparer de même sur $]-1; +\infty[$ les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $g : x \mapsto 1 - x$ et $h : x \mapsto 1 - x + x^2$.

En déduire, sans outil numérique, les 15 premières décimales de $\frac{1}{1+10^{-8}}$.

Exercice 6. Comparaison de moyennes

1. Étude algébrique

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs, on appelle respectivement moyenne arithmétique, moyenne géométrique et moyenne harmonique les trois réels suivant :

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad g = \sqrt{ab} \quad \text{et} \quad h = \frac{2ab}{a+b}.$$

Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b , $m \geq g \geq h$.

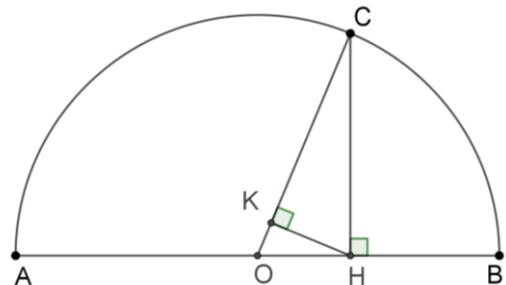
2. Étude géométrique

Dans la figure ci-contre, si on note $AH = a$ et $HB = b$, montrer que :

$$OC = \frac{a+b}{2}, \quad CH = \sqrt{ab} \quad \text{et} \quad CK = \frac{2ab}{a+b}.$$

(on pourra utiliser les résultats obtenus dans l'exercice sur les relations métriques dans un triangle rectangle).

Retrouver, grâce à la figure ci-contre, l'encadrement précédemment démontré algébriquement.



Exercice 7. Fonctions polynômes et équations

En cours, pour étudier la résolution d'une équation du second degré, on a « forcé » la factorisation de l'expression $ax^2 + bx + c$: $ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right]$ en ajoutant et en retranchant les mêmes termes pour faire apparaître une identité remarquable ou des expressions déjà connues. On peut reprendre le principe dans d'autres situations.

On sait que pour tout réel x , $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

On veut généraliser cette égalité, c'est-à-dire montrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

et que pour tous réels x et a et pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$

1. En remarquant que $x^3 - 1 = x^3 - x^2 + x^2 - x + x - 1$, montrer que pour tout réel x , $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

2. Factoriser de même $x^4 - 1$ puis $x^n - 1$.

En remarquant que $x^n - a^n = a^n \left(\left(\frac{x}{a} \right)^n - 1 \right)$, montrer que pour tous réels x et a ($a \neq 0$) et pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$

3. Le nombre positif x est tel que $x + \frac{1}{x} = 5$.

Calculer $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x^4 + \frac{1}{x^4}$ et $x^5 + \frac{1}{x^5}$.