ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 **Stage « filé »**

Classe de première **Fiche numéro 1**

Parution mercredi 6 octobre **Retour attendu pour le vendredi 22 octobre**

Exercice 1 Palindromes multiples de 55

On dit qu'un nombre entier m est un multiple d'un entier p s'il existe un entier k tel que $m = kp$. On peut dire aussi que l'entier p divise m, mais attention à ne pas écrire de *quotient*, on sortirait de l'arithmétique.

On s'intéresse aux nombres entiers N qui s'écrivent avec 6 chiffres dans le système décimal, et qui sont des *palindromes*, terme signifiant que leur écriture est symétrique, comme $123\,321$ ou $428\,824$. Parmi ces nombres, combien y en a-t-il qui sont multiples de 55 ?

Commençons par observer qu'un tel nombre ne peut avoir 0 pour chiffre des unités, car alors il l'aurait aussi comme chiffre des centaines de mille, ce qui n'est pas possible vu l'interdiction d'écrire des 0 inutiles. Multiple de 55, un tel nombre est donc multiple de 5, et comme son chiffre des unités n'est pas 0, c'est 5. Il existe donc des nombres entiers compris entre 0 et 9, appelons-les a et b, tels que

$N = 5 \times 10^5 + a \times 10^4 + b \times 10^3 + b \times 10^2 + a \times 10 + 5.$

Le reste de la division euclidienne de 10 par 11 est 10, le reste de la division euclidienne de 100 par 11 est 1, le reste de la division euclidienne de 1 000 par 11est 10, etc. On peut écrire :

$$N = 5 \times 99\,990 + 50 + a \times 9\,999 + a + b \times 990 + 10b + b \times 99 + b + a \times 10 + 5$$

Il existe donc un entier m tels que $N = 11 \times m$. Les solutions du problème sont donc à trouver parmi les cent nombres $5ab\,ba5$, écriture dans laquelle les chiffres a et b peuvent prendre toutes les valeurs de 0 à 9. Réciproquement, ces nombres conviennent, puisque $10\,010$ et $500\,005$ et $1\,100$sont des multiples de 11 et de 5.

Exercice 2 Exercice pas commode

Cet exercice propose quelques utilisations du *Principe des tiroirs* (ou *Principe de Dirichlet,* d'après Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, mathématicien allemand, on trouve aussi l'expression anglaise *pigeonhole principle*).Lorsqu'on range n objets dans un meuble ayant moins de n tiroirs, l'un des tiroirs contient au moins deux objets.
Ce principe est un outil puissant dans des raisonnements en mathématiques.

Justifier les affirmations suivantes :

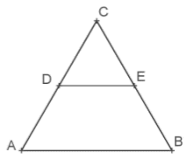
a) Sachant qu'un individu n'a jamais plus de 350 000 cheveux sur la tête, au moins deux personnes habitant Paris ont le même nombre de cheveux.
b) Soit a, b et c trois nombres entiers. Montrer que le produit $(a-b)(b-c)(c-a)$ est un nombre pair.
c) Si on considère 12 nombres entiers distincts compris entre 1 et 99, on peut en trouver deux tels que leur différence (positive) soit un nombre jumeau (un nombre à deux chiffres identiques).
d) Soit n un entier supérieur ou égal à 1, alors dans tout sous-ensemble E de $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ contenant $n+1$ éléments, il existe deux entiers distincts a et b tels que a divise b. (on pourra remarquer que tout élément de $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ peut s'écrire de manière unique $2^r p$ où r est un entier positif ou nul et p un entier impair).

a) Principe des tiroirs associés au nombres de cheveux et classement des parisiens en nombre bien plus grand que 350 000.
b) Principe des tiroirs : pour un entier, il n'y a que deux possibilités : pair ou impair. Donc si on prend trois entiers deux au moins ont la même parité et leur différence est paire. Le produit $(a-b)(b-c)(c-a)$ est donc pair.
c) Principe des tiroirs : parmi ces 12 nombres distincts, il en existe toujours deux qui ont le même reste dans la division euclidienne par 11. Leur différence est alors un multiple de 11 et comprise entre 1 et 99. C'est donc un nombre jumeau.
d) Principe des tiroirs : chaque élément de $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ peut s'écrire $2^r p$ où r est un entier positif ou nul et p un entier impair (vrai pour tout entier naturel) tel que $1 \leq p \leq 2n-1$, ce qui ne donne que n possibilités pour p.
Or l'ensemble E a $n+1$ éléments. Deux d'entre eux, a et b, sont donc associés au même entier p. Il existe donc deux entiers r et s distincts (par exemple $r < s$) tels que $a = 2^r p$ et $b = 2^s p$ et, comme $r < s$, a divise b.

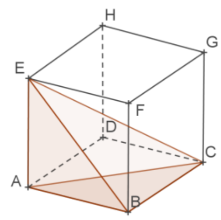
Exercice 3 À la recherche de contre-exemples

En mathématiques, on énonce des *définitions* et on établit des *théorèmes*. Tout théorème énonce une vérité qui vaut pour tous les types d'objets concernés. Une affirmation mathématique qui a l'allure d'un théorème n'en est pas un si un des objets dont elle traite apporte la contradiction. On dit qu'on a affaire à un contre-exemple.

1. Est-il vrai que tout quadrilatère du plan ayant trois côtés de même longueur est un losange ?
2. Pierre de Fermat, mathématicien français, pensait que, pour tout entier n, le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$ est un nombre premier. La suite commence bien : $3, 5, 17, 257, 65\,537$, mais…
3. À la lumière de ce qu'on a vu au collège, on pourrait penser que les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes. En considérant un tétraèdre dont les quatre sommets sont des sommets d'un cube, montrer que c'est faux.



1. Le quadrilatère ADEB a pour sommets les point A et B, sommets du triangle équilatéral ABC et D et E, milieux des côtés [CA] et [CB].
On a donc AD = DE = EB, mais le quatrième côté, [AB], n'a pas la même longueur.

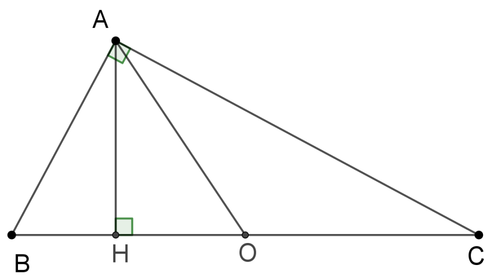


2. Leonhard Euler, mathématicien suisse, a montré que $2^{2^5} + 1$ est un multiple de 641. Le calcul est à la portée d'une calculatrice.
3. Les supports des arêtes [AE] et [CB] du tétraèdre ABCE ne sont pas coplanaires.

Exercice 4. Relations métriques dans un triangle rectangle

Dans un problème faisant intervenir des relations métriques dans un triangle rectangle, on pense évidemment au théorème de Pythagore mais on peut aussi faire appel :
- aux triangles semblables ou aux triangles isométriques ;
- à des calculs d'aires
- à une transformation conservant les distances (symétrie, translation, rotation)

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A et O le milieu du segment [BC].
Montrer que :
(1) $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{BC}$ et $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{CH} \times \mathrm{CB}$.
(2) $\mathrm{AH}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{CH}$.
(3) $\mathrm{AH} \times \mathrm{BC} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$.
(4) $\mathrm{OA} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}$.



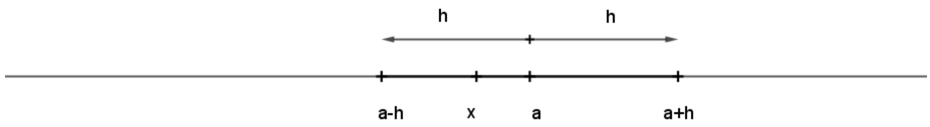
(1) Les triangles ABH et ABC sont semblables puisqu'ils ont deux angles de même mesure (ils sont rectangles et ont l'angle en B en commun). Donc $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ ce qui s'écrit aussi $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{BC}$.
On procède de même pour l'autre égalité en considérant les triangles ACH et ABC.
(2) Les triangles ABH et ACH sont semblables. En effet le triangle ABC est rectangle en A
donc $\widehat{\mathrm{ACH}} = \widehat{\mathrm{ACB}} = 90° - \mathrm{ABC} = \widehat{90° - \mathrm{ABH}}$.
Les triangles ABH et CBH sont rectangles en H donc $\widehat{\mathrm{BAH}} = 90° - \widehat{\mathrm{ABH}} = \widehat{\mathrm{ACH}}$. Ils ont donc deux angles de même mesure.
On en déduit que $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AH}}$ soit $\mathrm{AH}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{CH}$.
(3) On calcule de deux manières l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC : $\mathcal{A} = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}}{2} = \frac{\mathrm{AH} \times \mathrm{BC}}{2}$.
(4) On considère le symétrique D de A par rapport à O. O est alors le milieu commun à [AD] et [BC]. Le quadrilatère ABDC qui a de plus un angle droit est donc un rectangle. Ses diagonales ont donc même longueur, d'où

$$\mathrm{OA} = \frac{1}{2}\mathrm{AD} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}$$

Exercice 5. Inégalités, encadrements et valeur approchée

Trois principes de base :
(1) Pour comparer deux nombres on peut étudier le signe de leur différence.
(2) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.
(3) Pour étudier le signe d'une expression, on peut l'écrire sous forme de produit ou de quotient.

Une définition :
Soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif. On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près) lorsque $a-h \leq x \leq a+h$.



Cela signifie que la distance entre les réels a et x est inférieure ou égale à h.

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$.

En déduire, sans utiliser de calculatrice, une valeur approchée de $\sqrt{1{,}000\,000\,1}$ à 10^{-14} près.

2. Comparer de même sur $]-1;\,+\infty[$ les fonctions $f: x \longmapsto \frac{1}{1+x}$, $g: x \mapsto 1-x$ et $h: x \longmapsto 1-x+x^2$.

En déduire, sans outil numérique, les 15 premières décimales de $\frac{1}{1+10^{-8}}$.

1. On pose $A=\sqrt{1+x}$ et $B=1+\frac{x}{2}$. Les nombres A et B sont des nombres positifs donc les comparer revient à comparer leurs carrés (principe (2)) et, pour cela (principe (1)), à étudier le signe de la différence A^2-B^2.

Or $A^2-B^2=1+x-\left(1+x+\frac{x^2}{4}\right)=-\frac{x^2}{4}$. On en déduit que $A^2-B^2<0$ et donc, en s'appuyant successivement sur les deux principes de base, que $A<B$.

On pose $C=\sqrt{1+x}+\frac{x^2}{8}$. Les nombres B et C sont des nombres positifs donc les comparer revient à comparer leurs carrés et, pour cela, à étudier le signe de la différence B^2-C^2.

Or $B^2-C^2=\left(1+x+\frac{x^2}{4}\right)-\left(1+x+\frac{x^2}{4}\sqrt{1+x}+\frac{x^4}{64}\right)=\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}\sqrt{1+x}-\frac{x^4}{64}$

On s'appuie alors sur le principe (3) en mettant l'expression $\frac{x^2}{4}$ en facteur :

$B^2-C^2=\frac{x^2}{4}\left(1-\sqrt{1+x}-\frac{x^2}{16}\right)$.

Comme $x>0$, $1-\sqrt{1+x}<0$ et donc $1-\sqrt{1+x}-\frac{x^2}{16}$ d'où $B^2-C^2<0$ d'où l'on déduit comme précédemment que $B<C$.

On a donc bien, **pour tout réel x strictement positif, $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$.**

Pour $x=\ 0{,}000\,000\,1=10^{-7}$, l'encadrement précédent s'écrit : $1+\frac{10^{-7}}{2}-\frac{10^{-14}}{8}<\sqrt{1{,}000\,000\,1}<1+\frac{10^{-7}}{2}$.

On en déduit que $1+\frac{10^{-7}}{2}=1{,}000\,000\,05$ est une valeur approchée à 10^{-14} près de $\sqrt{1{,}000\,000\,1}$.

C'est même une valeur approchée à 10^{-14} près par excès.

2. On pose cette fois-ci $A=\frac{1}{1+x}$, $B=1-x$, $C=1-x+x^2$.

On applique le principe (1) : $A-B=\frac{1}{1+x}-(1-x)$ puis le principe (3) : $A-B=\frac{1-(1-x)(1+x)}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}$ et on en déuit que pour tout $x\in\,]-1,+\infty]$, $A-B\geq 0$ donc $A\geq B$.

$$A-C=\frac{1}{1+x}-(1-x+x^2)=\frac{1-(1+x)(1-x+x^2)}{1+x}=\frac{1-(1-x^2)-x^2(1+x)}{1+x}=\frac{x^2-x^2-x^3}{1+x}$$

Soit $A-C=\frac{-x^3}{1+x}$. On en déduit que pour tout $x\in\,]0;\,+\infty[$, $A-C\leq 0$ donc $A\leq C$.

Conclusion : **pour tout $x\in\,]0,+\infty]$, $1-x\leq\frac{1}{1+x}\leq 1-x+x^2$.**

Pour $x=10^{-8}$, l'encadrement précédent s'écrit $1-10^{-8}\leq\frac{1}{1+10^{-8}}\leq 1-10^{-8}+10^{-16}$ c'est-à-dire

$0{,}999\,999\,99\leq\frac{1}{1+10^{-8}}\leq 0{,}999\,999\,990\,000\,000\,1$.

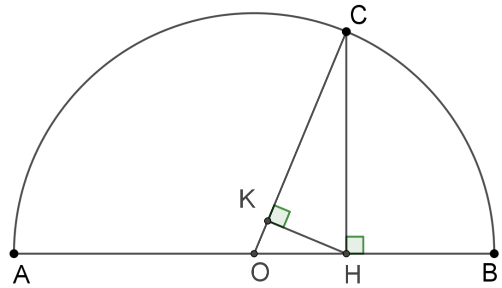
Les 15 premières décimales de $\frac{1}{1+10^{-8}}$ sont 999 999 990 000 000.

Exercice 7. Comparaison de moyennes

1. Étude algébrique

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs, on appelle respectivement moyenne arithmétique, moyenne géométrique et moyenne harmonique les trois réels suivant :

$m=\frac{a+b}{2}$, $g=\sqrt{ab}$ et $h=\frac{2ab}{a+b}$.
Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b, $m\geq g\geq h$.
2. Étude géométrique
Dans la figure ci-contre, si on note $\mathrm{AH}=a$ et $\mathrm{HB}=b$, montrer que :
$\mathrm{OC}=\frac{a+b}{2}$, $\mathrm{CH}=\sqrt{ab}$ et $\mathrm{CK}=\frac{2ab}{a+b}$.
(on pourra utiliser les résultats obtenus dans l'exercice sur les relations métriques dans un triangle rectangle).
Retrouver, grâce à la figure ci-contre, l'encadrement précédemment démontré algébriquement.



1. Étude algébrique
On s'appuie sur le principe (1) puis sur le principe (3) :
$m-g=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ ce qui justifie l'inégalité $m\geq g$.
En appliquant l'inégalité précédemment démontrée aux nombres $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, on obtient $\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}}\leq\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$
c'est-à-dire $\sqrt{\frac{1}{ab}}\leq\frac{\frac{a+b}{ab}}{2}$ soit $\frac{1}{\sqrt{ab}}\leq\frac{a+b}{2ab}$. Comme tous les nombres intervenant ici sont positifs, on obtient en prenant les inverses de part et d'autre de la dernière inégalité : $\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$.

2. Étude géométrique
On pose $\mathrm{AH}=a$ et $\mathrm{BH}=b$. On peut affirmer que $\mathrm{OC}\geq\mathrm{CH}\geq\mathrm{CK}$.
On remarque que $m=\mathrm{OA}=\mathrm{OC}$, $\mathrm{CH}=\sqrt{\mathrm{AH}\times\mathrm{BH}}=\sqrt{ab}$ (voir l'égalité (2) de l'exercice sur les relations métriques dans un triangle rectangle) et $\mathrm{CK}\times\mathrm{CO}=\mathrm{CH}^2$ (en se plaçant dans le triangle CHO pour appliquer l'égalité (1) de l'exercice sur les relations métriques dans un triangle rectangle). Cette dernière égalité s'écrit aussi $\mathrm{CK}=\frac{\mathrm{CH}^2}{\mathrm{CO}}$
c'est-à-dire $\mathrm{CK}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2ab}{a+b}=h$. L'encadrement $\mathrm{OC}\geq\mathrm{CH}\geq\mathrm{CK}$ donne donc $m\geq g\geq h$.

Exercice 8. Fonctions polynômes et équations

En cours, pour étudier la résolution d'une équation du second degré, on a « forcé » la factorisation de l'expression ax^2+bx+c : $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$ en ajoutant et en retranchant les mêmes termes pour faire apparaitre une identité remarquable ou des expressions déjà connues. On peut reprendre le principe dans d'autres situations.

On sait que pour tout réel x, $x^2-1=(x-1)(x+1)$.
On veut généraliser cette égalité, c'est-à-dire montrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel $n\geq 2$,
$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$
et que pour tous réels x et a et pour tout entier naturel $n\geq 2$,
$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1})$.
1. En remarquant que $x^3-1=x^3-x^2+x^2-x+x-1$, montrer que pour tout réel x, $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.
2. Factoriser de même x^4-1 puis x^n-1.

En remarquant que $x^n-a^n=a^n\left(\left(\frac{x}{a}\right)^n-1\right)$, montrer que pour tous réels x et a ($a\neq 0$)et pour tout entier naturel $n\geq$ 2,
$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1})$.
3. Le nombre positif x est tel que $x+\frac{1}{x}=5$.
Calculer $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$, $x^4+\frac{1}{x^4}$ et $x^5+\frac{1}{x^5}$.

1. Pour tout réel x, $x^3-1=x^3-x^2+x^2-x+x-1=x^2(x-1)+x(x-1)+(x-1)$
Soit $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.
2. De même, pour tout réel x,

$x^4-1=x^4-x^3+x^3-x^2+x^2-x+x-1=x^3(x-1)+x^2(x-1)+x(x-1)+(x-1)$
$x^4-1=(x-1)(\,x^3+x^2+x+1)$.
Et, pour tout entier naturel $n\geq 2$,

$$x^n-1=x^n-x^{n-1}+x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-2}-x^{n-3}\ldots+x^3-x^2+x^2-x+x-1$$

Soit $x^n-1=x^{n-1}(x-1)+x^{n-2}(x-1)+x^{n-3}(x-1)+\cdots+x(x-1)+(x-1)$
C'est-à-dire $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)$

3. Comme $a\neq 0$, on peut écrire $x^n-a^n=a^n\left(\left(\frac{x}{a}\right)^n-1\right)$ car $\frac{x^n}{a^n}=\left(\frac{x}{a}\right)^n$.

D'après la question 2, on a donc

$$x^n-a^n=a^n\left(\left(\frac{x}{a}\right)^n-1\right)=a^n\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}+\left(\frac{x}{a}\right)^{n-2}+\left(\frac{x}{a}\right)^{n-3}+\cdots+\frac{x}{a}+1\right)$$

Soit $x^n-a^n=a\left(\frac{x}{a}-1\right)\times\left(a^{n-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}+a^{n-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-2}+a^{n-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-3}+\cdots+a^{n-1}\frac{x}{a}+a^{n-1}\right)$
Soit $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1})$.

3. Dans chacun des cas, on va ajouter et retrancher des termes pour faire apparaitre les expressions précédemment calculées.

$x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=23$.

$x^3+\frac{1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x^3}+x+\frac{1}{x}-x-\frac{1}{x}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=23\times 5-5=110$.

$x^4+\frac{1}{x^4}=x^4+\frac{1}{x^4}+x^2+\frac{1}{x^2}-x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=110\times 5-23=527$.

$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=527\times 5-110=2525$.

On pourrait ainsi de proche en proche calculer $x^n+\frac{1}{x^n}$ pour tout entier naturel non nul n.