

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 – Divers types de raisonnement

En mathématiques, on énonce des *définitions* et on établit des *théorèmes*. Tout théorème énonce une vérité qui vaut pour tous les types d'objets concernés. On établit un théorème (ou une propriété) grâce à un *raisonnement* (une *démonstration*). Il existe divers types de raisonnements. Le plus souvent utilisé est le raisonnement déductif (construit à l'aide d'une suite d'implications) mais d'autres types de raisonnement peuvent parfois s'avérer plus appropriés.

L'objectif de cet exercice est de bien appréhender trois types de raisonnement : le raisonnement par contre-exemple, le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par disjonction de cas.

1. Contre-exemple

Une affirmation mathématique qui a l'allure d'un théorème n'en est pas un si un des objets dont elle traite apporte la contradiction. On dit qu'on a affaire à un contre-exemple : un exemple d'objet mathématique (nombres, figures géométriques, fonctions...) pour lequel l'affirmation est fausse.

Remarque : un exemple ne suffit pas à prouver qu'une affirmation est vraie mais un contre-exemple suffit à prouver qu'une affirmation est fausse.

Peut-on affirmer que :

- si $x < 2$, alors $x^2 < 4$?
- deux rectangles de même périmètre ont même aire ?
- le produit de deux entiers impairs est un entier impair ?

2. Par l'absurde

Utiliser un raisonnement par l'absurde pour démontrer la véracité d'une affirmation consiste à montrer que la négation de cette affirmation est fausse. Dans le cas d'une implication, cela revient à supposer que la conclusion est fausse pour aboutir à une contradiction.

- Principe des tiroirs* : Maxime a 100 billes de trois catégories différentes. Il veut les ranger par catégorie dans trois boîtes. Montrer que l'une des boîtes contient au moins 34 billes.
- Montrer que l'équation $3n^3 + 4n^2 - 6n = 5$ n'a pas de solution entière.

3. Par disjonction des cas

Le raisonnement par disjonction de cas est une forme de raisonnement mathématique qui consiste à décomposer la proposition que l'on cherche à démontrer en un nombre fini de cas (sous-propositions) vérifiés indépendamment, ces cas ne se chevauchant pas et couvrant à eux tous toutes les possibilités (on parle alors de *partition* des cas).

- Montrer que pour tout entier n , $n^2 + n + 8$ est un nombre pair.
- Montrer que pour tout nombre réel x , $x < \sqrt{x^2 + 1}$.

Quelques principes de base dans le traitement d'inégalités :

- Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence.
- Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.
- Pour étudier le signe d'une expression, on peut l'écrire sous forme de produit ou de quotient.

Exercice 2 – Inégalités en cascades

- Démontrer que pour tous nombres réels a et b , $a^2 + b^2 \geq 2ab$ et $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.
- On suppose que $a^2 + b^2 = 1$. Démontrer que $-\frac{1}{2} \leq ab \leq \frac{1}{2}$.
- Démontrer que pour tous nombres réels a et b strictement positifs, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Exercice 3 – Position relative de courbes

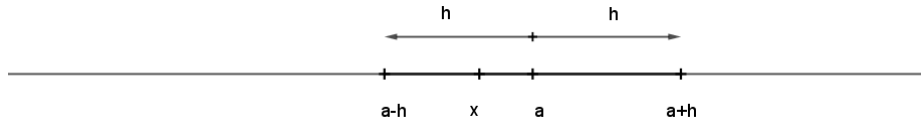
On considère les fonctions f, g et h définies sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = 1 - x$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$ et $h(x) = 1 - x + x^2$.

1. Représenter ces trois fonctions dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et conjecturer des inégalités vérifiées pour tout réel x de $] -1, +\infty[$ entre $f(x), g(x)$ et $h(x)$.
2. Étudier, suivant les valeurs de x dans $] -1, +\infty[$, le signe de $g(x) - f(x)$ et de $h(x) - g(x)$.

Quelques définitions :

Soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif.

- On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a - h \leq x \leq a + h$.



Cela signifie que la distance entre les réels a et x est inférieure ou égale à h .

- On dit que a est une valeur approchée de x par défaut à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a \leq x \leq a + h$.
 - On dit que a est une valeur approchée de x par excès à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a - h \leq x \leq a$.
3. En déduire l'écriture décimale d'une valeur approchée à 10^{-20} de $\frac{1}{1+10^{-10}}$.

Exercice 4 – Transformations d'écriture et résolution d'équations

Définition : Soit n un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré n , une fonction P pour laquelle il existe des réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout réel x , $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de P .

Propriété : soit P et Q deux fonctions polynômes. P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x , $P(x) = Q(x)$) si et seulement si P et Q ont le même degré et les mêmes coefficients.

1. Soit P le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.
 - a. Montrer que pour tout nombre réel x différent de 1, $P(x) = \frac{1-x^4}{1-x}$.
 - b. En déduire que l'équation $P(x) = 0$ n'admet qu'une solution et déterminer cette solution.
2. Soit P le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$.
 - a. Montrer qu'il existe trois nombres réels a, b, c tels que, pour tout réel x , $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
 - b. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 5 – Mises en équation

Une bonne mise en équation repose sur un choix judicieux de l'inconnue et sur des conditions imposées aux solutions (comme le signe positif pour une distance)

1. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 8$ et $AC = 3$. On considère les points D et E situés respectivement sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que $AE = BD$.
Existe-t-il une position de ces points D et E telle que l'aire du triangle ADE soit égale à l'aire du quadrilatère BCED ?
2. Déterminer le nombre entier N à deux chiffres tel que :
 - la somme de ses chiffres est égale à 13 ;
 - si on ajoute 34 au produit de ses chiffres, on obtient le nombre « renversé » (mêmes chiffres mais avec des positions échangées).

Exercice 6 – Un peu de calcul vectoriel

Le calcul vectoriel est un outil puissant qui permet notamment de caractériser certaines configurations :

- Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\vec{AI} = \vec{IB}$.
- Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si, pour tout point M du plan, $\vec{MI} = \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MB})$.
- Le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme si et seulement si $\vec{MN} = \vec{QP}$.
- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires.

La relation de Chasles permet de travailler sur les égalités vectorielles.

Dans tout exercice de géométrie, on commence par faire une figure.

Soit ABC un triangle. On considère les points M et N définis par $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Les points P et Q désignent les milieux respectifs des segments [MN] et [MC].

1. Démontrer que les points A, M et N sont alignés.
2. Déterminer la nature du quadrilatère ABPQ.