Exercice 1 : la grille infernale

1. Première grille

3	11	19
8	16	24
13	21	29

2. Deuxième grille

La somme des neuf nombres de cette grille est 126. Elle est indépendante de a. Il ne faut pas s'en étonner : la somme des nombres figurant dans la première colonne est le triple de 5, la somme des nombres figurant dans la troisième colonne est le triple de 23, et la somme des nombres figurant dans la deuxième colonne est la demi somme des sommes obtenues dans les colonnes voisines. $3\times 5+3\times 23+\dfrac{3\times 5+3\times 23}{2}=126$.

a	$9+a$	$18+a$
5	14	23
$10-a$	$19-a$	$28-a$

3. Troisième grille

Les cases occupées par □ et ○ fournissent les équations :

$14-x=2y-20$ et $9+y=20+x$

Ces équations expriment des conditions nécessaires, qui conduisent à $x=4$ et $y=15$.

x	7	□
9	○	y
		20

En complétant la grille comme suit, on montre que ces conditions sont suffisantes.

4	7	**10**
9	**12**	**15**
14	17	20

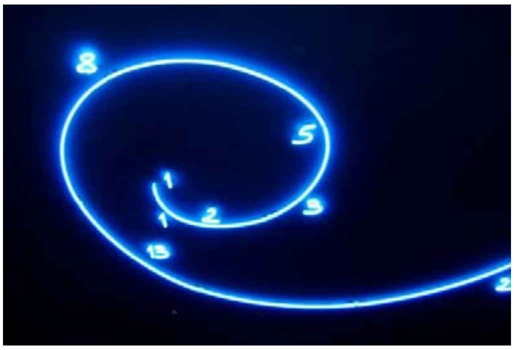
Exercice 2 Une spirale

1. Le rayon d'un des quarts de cercles est la somme des rayons des deux quarts de cercles qui le précèdent.

Ces rayons sont donc : 1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – 55 – etc

2. On fait la somme : 610 + 987 = 1 597

3. Pour obtenir le rayon du vingtième quart de cercle, on peu démarrer les calculs du seizième :
- le rayon du 18$^{\text{ème}}$ quart de cercle est 1 597 + 987 = 2 584
- le rayon du 19$^{\text{ème}}$ quart de cercle est 2 584 + 1 597 = 4 181
- le rayon du 20$^{\text{ème}}$ quart de cercle est 4 181 + 2 584 = 6 765



A droite : Spirale de Fibonacci dans le métro de Naples, station Vanvitelli

.

Exercice 3 : billes en sacs

1. Voici une façon de procéder (il y en a beaucoup, mais celle-ci est généralisable) :

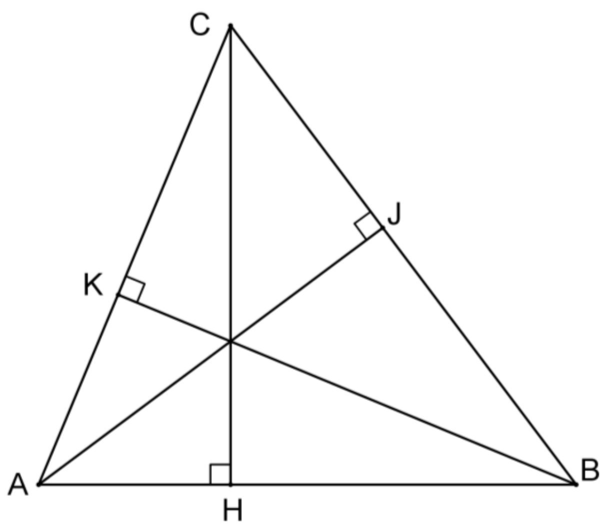
25	16	Situation de départ
10	1	On ôte 15 billes dans chaque sac
10	16	On multiplie par deux le contenu du sac de droite jusqu'à ce que son contenu dépasse celui de gauche *On a fait une boucle : tant que le contenu de droite ne dépasse pas celui de gauche, on le double*
1	7	On ôte 9 billes dans chaque sac, ramenant à 1 le contenu du sac le moins plein (à gauche)
8	7	Même *boucle* que plus haut
2	1	On ramène à 1 le contenu du sac le moins plein
2	2	Cette fois, le produit par 2 conduit à une égalité
0	0	C'est fini

On peut montrer que la réduction à 1 du nombre de boules dans le sac le moins plein, suivie du remplacement de son effectif par la puissance de 2 immédiatement supérieure à l'effectif de l'autre conduit à une réduction de l'effectif de chaque sac.

Il est alors certain que la succession de telles opérations conduit à une diminution stricte des effectifs de boules dans les sacs. La situation 2 – 1 ou 1 – 2 est inéluctable et elle est gagnante.

2. En revanche, le triplement ne garantit pas la stricte décroissance des effectifs. Dans l'exemple proposé, si on passe de la situation 2 – 1 à la situation 2 – 3, l'étape suivante conduit soit à augmenter les effectifs, soit à retrouver la situation 1 – 2.

Exercice 4 : des triangles et des nombres



1. On écrit les conséquences du théorème de Pythagore dans les triangles ACH et BCH, rectangles en H :

$CH^2 = AC^2 – AH^2$
$CH^2 = BC^2 – BH^2$,
Elles conduisent à :
$(BH – AH)(BH + AH) = BC^2 – AC^2$.

D'où $BH – AH = 4$, et comme $BH + AH = 14$, on en déduit que $AH = 5$ et $BH = 9$.

Finalement $CH = 12$

2. Les longueurs AJ et BK peuvent être déterminées de manière analogue, ou grâce à des considérations d'aire. L'aire du triangle ABC est le demi-produit $CH \times AB$, ou encore le demi-produit $AJ \times BC$ ou encore le demi-produit $BK \times AC$. Il s'ensuit que $AJ = 11{,}2$ et que $BK = \frac{168}{13}$

3. Un triangle dont les trois côtés et les trois hauteurs sont des entiers peut être obtenu en multipliant les longueurs des côtés du précédent par 65.