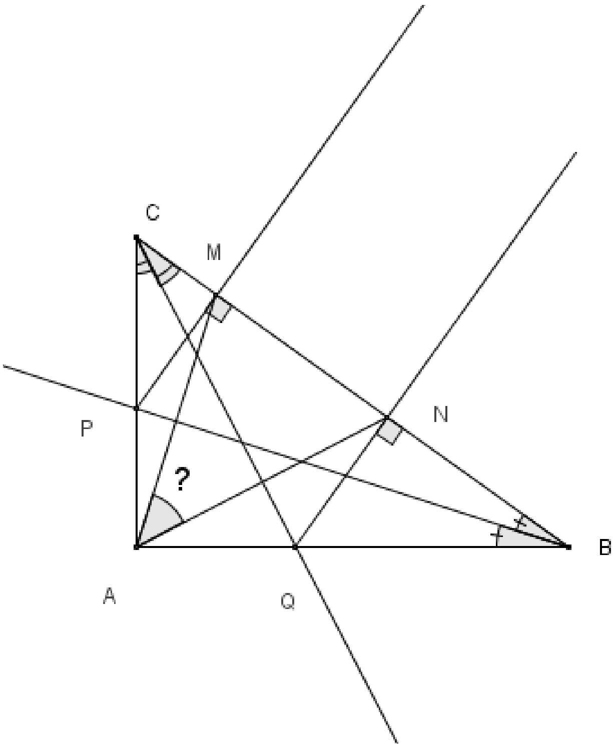
## Exercice numéro 1

## Ils courent, ils courent...

On admet que les coureurs courent chacun à sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours. Le coureur B a 90 m d'avance sur C pour les neuf dixièmes du parcours. Il aura donc 100 m d'avance après les dix dixièmes.

## Exercice numéro 2

## La bonne mesure




Le point P est équidistant des demi-droites [BC) et [BA). Le point Q est équidistant des demi-droites [CA) et [CB). Le triangle AQN est isocèle de sommet principal Q et le triangle APN est isocèle de sommet principal P.

On en déduit que la mesure de l'angle $\widehat{NAQ}$ est la moitié de celle de $\widehat{NQB}$ et que la mesure de l'angle $\widehat{PAM}$ est la moitié de celle de $\widehat{CPM}$ (somme des angles d'un triangle et angles supplémentaires).

Mais les angles $\widehat{NQB}$ et $\widehat{PCM}$ d'une part, $\widehat{CPM}$ et $\widehat{NBQ}$ d'autre part, ont même mesure (ils ont respectivement même complémentaire).

La somme des angles $\widehat{PAM}$ et $\widehat{NAQ}$ est donc la demi-somme des angles non droits du triangle rectangle ABC, c'est-à-dire 45 degrés.

L'angle $\widehat{NAM}$ mesure donc 45 degrés.

## Exercice numéro 3

## Le bon motif, ou le triomphe du calcul posé

| 1 | 4 1 |
|---|---|
| 1 0 0 | |
| 1 8 0 | 0 , 0 2 4 3 9 |
| 1 6 0 | |
| 3 7 0 | |
| 1 | |

| 1 | 1 3 |
|---|---|
| 1 0 | |
| 1 0 0 | 0 , 0 7 6 9 2 3 |
| 9 0 | |
| 1 2 0 | |
| 3 0 | |
| 4 0 | |
| 1 | |

Ces deux calculs montrent comment on trouve le motif : en attendant que le reste d'une des divisions partielles à effectuer soit 1.

On divise un nombre se terminant par un 0 par 97 ; le quotient est un nombre à un chiffre et on trouve comme reste 1. Le chiffre cherché est donc 7.
7 fois 97 font 679. Le nombre qui a fourni le chiffre 7 était donc 680. À l'étape précédente, on a divisé un nombre se terminant par un 0 par 97, le quotient était un nombre à un chiffre et le reste 68. Le chiffre cherché est donc 6. 6 fois 97 font 582. Le nombre qui a fourni le chiffre 6 était donc 582+68=650. À l'étape précédente, on a divisé un nombre se terminant par un 0 par 97, le quotient était un nombre à un chiffre et le reste était 65. Le chiffre cherché est donc 5. 5 fois 97 font 485. Le nombre qui a fourni le chiffre 5 était donc 485+65=550.

Les trois derniers chiffres de la période de $\frac{1}{97}$ sont donc 5,6 et 7.

Autre version trouvée par un candidat : le produit du motif du nombre $\frac{1}{n}$ par $n$ est 0,99999...(un certain nombre de chiffres 9 selon la longueur du motif). On doit donc résoudre : $....\times 97 = ....9999$ . Le dernier 9 s'obtient en multipliant 97 par 7. $7\times 97 = 679$ . $9999 - 679 = 9320$. Le chiffre 2 s'obtient en multipliant 97 par 6, etc.

## Exercice numéro 4

## Et à la fin, que reste-t-il ?
## ... ou le triomphe du calcul littéral

1. Si on procède systématiquement et en commençant par la gauche, les premiers éléments de la liste sont remplacés successivement par 2, 3, 4, etc. Pour étayer la conjecture qui consiste à se dire qu'on obtient 100 à la fin, il faudrait dire que si on traite en commençant par la gauche la liste $n, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ..., \frac{1}{100}$, on est conduit à calculer $n + \frac{1}{n+1} + n\times\frac{1}{n+1}$, qu'on trouve précisément égal à $n+1$, ce qui réduit la liste à $n+1, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, ..., \frac{1}{100}$, ce qui aurait définitivement emporté l'adhésion avant la formalisation du raisonnement par récurrence, et qui l'emporte encore aujourd'hui.
2. On parvient à un résultat analogue.
3. Il s'agit de se convaincre que l'ordre dans lequel on procède n'a pas d'influence sur le résultat. Pour cela, considérons les nombres $x, y$ et $z$ pris dans la liste et traitons le remplacement de $y$ et $z$ en premier. On obtient d'abord la liste $x, y+z+yz$, puis la liste à un seul nombre $x+y+z+xy+yz+zx+xyz$. Tout autre traitement (en commençant par $x$ et $y$ ou par $x$ et $z$) donne le même résultat ($x$, $y$ et $z$ jouent des rôles identiques). Le calcul proposé est donc indépendant de l'ordre dans lequel on l'effectue.