Olympiades de mathématiques de quatrième 2007

Éléments de solution

Exercice 1 (Deux mille sept 2 007)

1. La somme des chiffres de N est un multiple de 9.
2. Posons $N = 9\,P$.

$P = 22\ 302\ 230\ 223\ 022 \ldots \ldots 022\ 302\ 230\ 223$
Dans l'écriture de P, le bloc de chiffres 2, 2, 3 se retrouve 2 007 fois. La somme des chiffres de P est donc un multiple de 2007, donc un multiple de 9, et N est un multiple de 81.

Exercice 2 (Losange médian)

1. Les point M et N sont les centres de gravité des triangles ABC et ADC. Les segments [AF], [CE], [AG] et [CH] ont la même longueur (ce sont les hypoténuses de triangles rectangles dont les côtés homologues de l'angle droit ont la même longueur). Les segments [AM], [MC], [CN] et [NA] ont donc aussi même longueur (les deux tiers de celle de ces médianes).
2. L'aire du « coin » ABCM est la somme des aires des triangles MAE, MEB, MBF et MFC. Ces aires sont égales (propriété de la médiane pour MAE et MEB comme pour MBF et MFC, les égalités BE = BF et MF = ME prouvant par ailleurs que M est sur la bissectrice de l'angle EBF), et égales chacune au tiers de l'aire du triangle ABF, elle-même égale au quart de l'aire du carré. Quatre tiers d'un quart font un tiers. Il en va de même de l'autre « coin » et il reste $\frac{1}{3}$ pour l'aire du losange.

Exercice 3 (Fractions égyptiennes)

1. Si deux nombres positifs ont pour somme 1, l'un est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Les entiers dont l'inverse est supérieur à $\frac{1}{2}$ sont 1 et 2. L'entier 1 ne convient pas car l'équation restante en b n'a pas de solution. L'entier 2 ne convient pas, car l'équation en b restante a pour solution $b = 2$, or a et b doivent être distincts.
2. Les entiers 3 et 6 conviennent.
3. Les entiers 2, 3 et 6 conviennent.
4. Les entiers 2, 3, 9 et 18 conviennent ($\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$ ou encore $\frac{1}{6} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$).
5. Une méthode consiste à poursuivre la technique précédente : il reste toujours un nombre dont l'écriture fractionnaire a pour numérateur 1 (ça c'est intangible) et pour dénominateur un entier pair. Ce nombre est écrit comme le produit par $\frac{1}{2}$ d'une fraction égyptienne. D'autres décompositions sont naturellement convenables, comme $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$.

Exercice 4 (La machine à rectangles pythagoriciens)

1. Sa diagonale a pour longueur 5.
2. Sa diagonale a pour longueur 97
3. D'après le théorème de Pythagore, la longueur ℓ de la diagonale d'un tel rectangle vérifie :

$\ell^2 = \left(p^2 - q^2\right)^2 + (2pq)^2$.

On développe :

$\ell^2 = p^2 \times p^2 - p^2 \times q^2 - q^2 \times p^2 + q^2 \times q^2 + 4pqpq$.

$\ell^2 = p^2 \times p^2 + p^2 \times q^2 + q^2 \times p^2 + q^2 \times q^2$

$\ell^2 = \left(p^2 + q^2\right)\left(p^2 + q^2\right)$

$\ell^2 = \left(p^2 + q^2\right)^2$

et donc, ℓ étant un nombre positif, $\ell = p^2 + q^2$, qui est lui aussi un entier naturel.

4. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle OIP donne : $\mathrm{OI}^2 + \mathrm{IP}^2 = 1$

Le théorème de Thalès appliqué au triangle GEB et à la sécante (IP) donne : $\dfrac{\mathrm{IP}}{\mathrm{EB}} = \dfrac{\mathrm{GI}}{\mathrm{GE}}$, ou encore : $\mathrm{IP} = \dfrac{1 + \mathrm{OI}}{2}$.

En remplaçant OI par $2\mathrm{IP} - 1$ dans la première relation, il vient : $5\mathrm{IP}^2 - 4\mathrm{IP} = 0$ et donc $\mathrm{IP} = \dfrac{4}{5}$, puis $\mathrm{OI} = \dfrac{3}{5}$.

(pour la suite de cette histoire voir « The book of numbers » de John CONWAY et Richard GUY, éditions Copernicus, p.171)