Éléments de solution

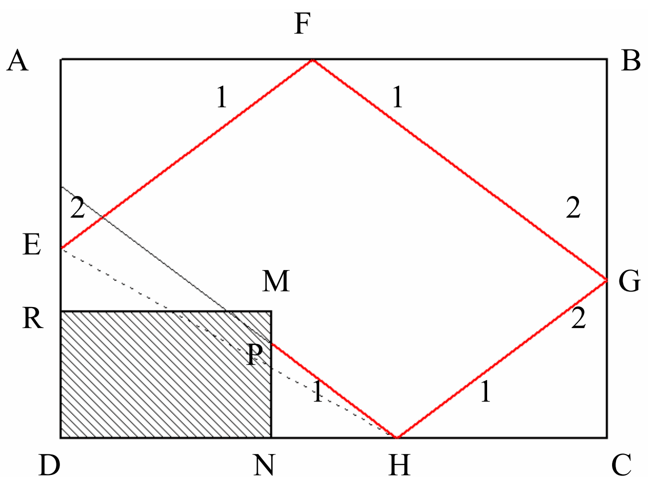
Ce texte est une réflexion sur le sujet, non une rédaction de la solution. Ce n'est ni le travail d'un supposé élève, ni le corrigé d'un supposé professeur.

Exercice 1

Le nombre 10^{2006} s'écrit avec 2 007 chiffres, un 1 suivi de deux mille six 0. Le nombre $10^{2006}-1$ s'écrit avec deux mille six 9, et le nombre $10^{2006}-1-2005$ s'écrit avec deux mille deux 9 suivis d'un 7, deux 9 et un 4, soit deux mille six chiffres, dont la somme est $2002\times 9+7+9+9+4$, c'est-à-dire 18 047.

Exercice 2

On a codé 1 et 2 les angles de même mesure (ces angles sont deux à deux complémentaires).
Le théorème de Pythagore permet d'établir que AF = 6. De proche en proche, en utilisant le théorème de Pythagore et le rapport $\dfrac{\text{côté}}{\text{hypoténuse}}$, on obtient PN = 2,25.
D'après le théorème de Thalès, si les points H, P et E étaient alignés, on aurait PN = 1,6875. Donc ils ne sont pas alignés.



Exercice 3

Décomposition	Produit associé
7 = 1+1+1+1+1+1+1	1
7 = 1+1+1+1+1+2	2
7 = 1+1+1+1+3	3
7 = 1+1+1+2+2	4
7 = 1+1+1+4	4
7 = 1+1+2+3	6
7 = 1+1+5	5
7 = 1+2+2+2	8
7 = 1+2+4	8
7 = 1+3+3	9
7 = 1+6	6
7 = 2+2+3	12
7 = 2+5	10
7 = 3+4	12

Considérons une décomposition du nombre 28 faisant apparaître 1 et le nombre n, et appelons s la somme des autres nombres intervenant sans la décomposition. On peut écrire :
$28 = 1 + n + s$. Le produit associé est $1\times n\times k$, où k est le produit des nombres de la décomposition dont la somme vaut s.
On peut aussi écrire :

$28 = (1 + n) + s$. Le produit associé à cette décomposition est $(n + 1)k$ c'est-à-dire $nk + k$. Il est donc plus grand que le précédent.

Considérons une décomposition de 28 où apparaît le nombre 5. Comme ci-dessus, on peut écrire : $28 = 5 + n$. Appelons k le produit des nombres de la décomposition dont la somme vaut n. Le produit associé à cette décomposition est $5\times k$.
$28 = 2 + 3 + n$ est une autre décomposition de 28, dont le produit associé est $2\times 3\times k$, c'est-à-dire $6\times k$, qui est plus grand que le précédent.

Il faut généraliser un peu, et considérer que les décompositions pouvant apporter le plus grand produit sont celles constituées de 2, de 3 et de 4 (toute décomposition faisant apparaître un 4 a une décomposition jumelle faisant apparaître deux 2, et comme $2\times 2 = 4$, elles ont le même produit associé). Un maximum de 3 est souhaitable, attendu que 3×3 est supérieur à $2\times 2\times 2$…

(pour aller plus loin, voir Paul HALMOS, Problèmes pour mathématiciens petits et grands, Éditions Cassini)

Exercice 4

L'aire du demi disque de diamètre AB est $\frac{\mathrm{AB}^2}{8}\pi$, celles des demi disques de diamètres AC et BC sont $\frac{\mathrm{AC}^2}{8}\pi$ et $\frac{\mathrm{BC}^2}{8}\pi$. L'aire de la zone hachurée est donc $s = \frac{\pi}{8}\left(\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2\right)$, et on applique le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles AMC et BMC.

Le quadrilatère CNMP est un rectangle (angles droits inscrits dans des demi cercles). Ses diagonales [NP] et [CM] ont même longueur et même milieu I. Les segments [IC] et [IP], par exemple, ont même longueur et la droite (IC) est tangente au cercle de diamètre [CB]. D'où on déduit que la droite (IP) est aussi tangente à ce cercle…