



MINISTÈRE DE  
L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE  
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR  
ET DE LA RECHERCHE



# Olympiades académiques de mathématiques

**Mercredi 20 mars 2013**

## **Classes de premières STI2D, STL, ST2S**

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.



partenaire de l'académie de Versailles

## Exercice 1 (Exercice proposé par la cellule nationale)

### Les nombres Harshad

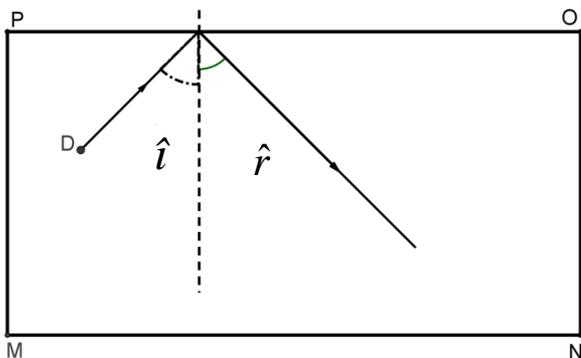
Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.

Par exemple,  $n = 24$  est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est  $2 + 4 = 6$ , et 24 est bien divisible par 6.

- Montrer que 364 est un nombre Harshad.
  - Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?
- Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.
  - Soit  $n$  un entier non nul. Donner un nombre Harshad de  $n$  chiffres.
- Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.
  - En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.
  - Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.
- Soit  $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$ . Calculer la somme des chiffres de  $A$ .
  - En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.
  - Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.
- En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.
  - Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.
- Soit  $i$  un chiffre compris entre 0 et 8.  
Soit  $p$  un entier dont le chiffre des dizaines est  $i$  et le chiffre des unités est 9.  
Montrer que soit la somme des chiffres du nombre  $p$  soit celle de  $p + 2$  est un nombre pair.  
En déduire que  $p$  et  $p + 2$  ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.
  - Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

## Exercice 2 (Exercice proposé par la cellule nationale)

### Un billard rectangulaire



On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.

Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes. Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence étant égal à l'angle de réflexion, comme sur la figure ci-contre ( ).

1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

a. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

b. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

c. Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

a. Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

b. Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

### Exercice 3 (Exercice proposé par la cellule académique)

#### Un triangle qui prend l'aire

Une unité de longueur est donnée dans le plan. On considère un carré ABCD de côté 1. Deux points E et F appartenant au côté [CD] sont tels que les demi-droites [AE) et [BF) sont sécantes en un point M situé dans le demi-plan de frontière (CD) qui ne contient pas A.

L'aire du triangle EFM est  $\frac{2}{3}$ .

Quelle est la longueur du segment [EF] ?

### Exercice 4 (Exercice proposé par la cellule académique)

#### 17 et 23 en leitmotiv

On écrit à la suite 2 013 chiffres non nuls de telle sorte que, chaque fois qu'on considère deux termes consécutifs, le nombre de deux chiffres qu'ils forment est un multiple de 17 ou un multiple de 23.

Un début possible serait par exemple : 3 4 6 8 ... , car 34 est un multiple de 17, 46 un multiple de 23 et 68 un multiple de 17.

Quels peuvent être les cinq derniers chiffres de la suite ?