académie Versailles

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades académiques de mathématiques

Mercredi 20 mars 2013

Classes de premières S

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Inria
INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

partenaire de l'académie de Versailles

Exercice 1 (Exercice proposé par la cellule nationale)

Les nombres Harshad

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.

Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. *a.* Montrer que 364 est un nombre Harshad.

b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. *a.* Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. *a.* Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

b. En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. *a.* Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

b. En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. *a.* En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

b. Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. *a* Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.

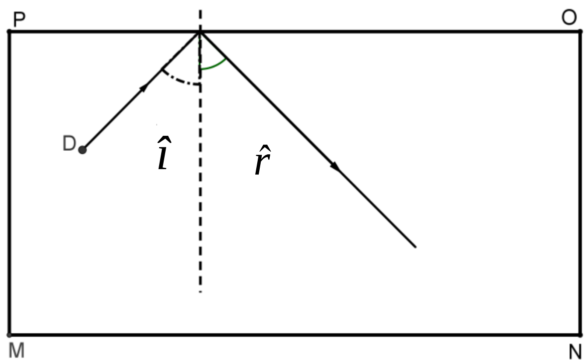
Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.

Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair.
En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

b. Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

Exercice 2 (Exercice proposé par la cellule nationale)

Un billard rectangulaire



On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.

Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence étant égal à l'angle de réflexion , comme sur la figure ci-contre (.

1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

a. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

b. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

c. Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

a. Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

b. Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

Exercice 3 (Exercice proposé par la cellule académique)

La devinette de Clara

Clara a pensé à quatre nombres.

Elle calcule les six sommes de ces nombres pris deux à deux.

Elle écrit au tableau cinq de ces six sommes : $-2, 1, 2, 3, 6.$

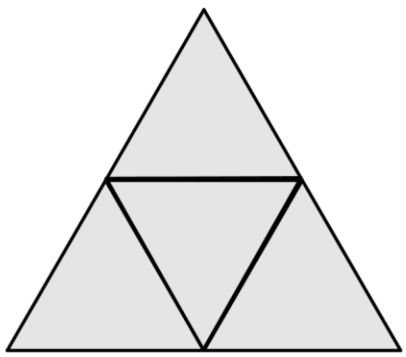
Quels sont les quatre nombres auxquels Clara pensait ?

Exercice 4 (Exercice proposé par la cellule académique)

Sommes de sommets

Première partie

Un triangle équilatéral de côté de longueur 2 est partagé en quatre triangles équilatéraux comme le montre la figure. À chaque sommet de ces 4 triangles est écrit un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, utilisé chacun une seule fois. À l'intérieur de chacun des quatre triangles, on inscrit la somme des nombres écrits à ses sommets.

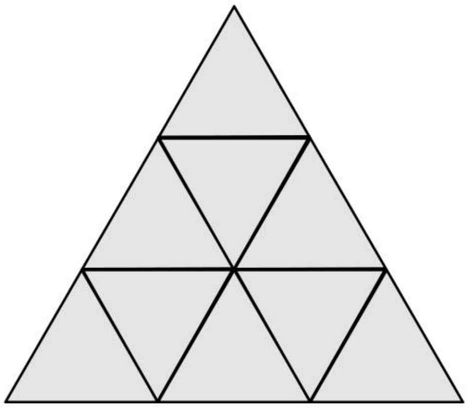


1. Est-il possible que les nombres inscrits dans les triangles soient tous égaux ?

2. Est-il possible que la différence entre le plus grand de ces nombres et le plus petit soit égale à 1 ? Si oui, donner un exemple de répartition convenable.

Tournez la page s'il vous plaît

Deuxième partie



Dans cette partie, on utilise un triangle équilatéral de côté 3 partagé en neuf triangles aux sommets desquels on écrit les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, utilisés chacun une seule fois, et on affiche les sommes obtenues pour chacun des neuf triangles.

1. Prouver que, quelle que soit la répartition des nombres sur les 10 sommets, trois au moins des nombres inscrits dans les triangles sont supérieurs ou égaux à 12.

2. Prouver que, quelle que soit la répartition des nombres sur les 10 sommets, trois des nombres inscrits dans les triangles ont une somme supérieure ou égale à 48.

3. Est-il possible que les nombres inscrits dans les triangles soient tous de même parité ?

4. Est-il possible que la différence entre le plus grand et le plus petit des nombres inscrits dans les triangles soit égale à 1 ?

5. Prouver, en donnant un exemple de distribution correspondant, qu'il est possible que la différence entre le plus grand et le plus petit de ces nombres soit égale à 2.