Exercice 1 : Essuie-glaces

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur approchée au cm^2 près.

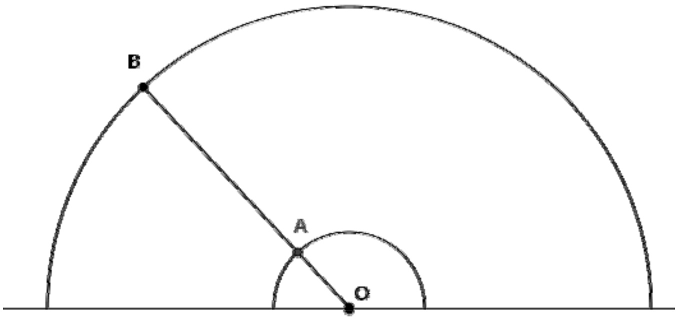


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

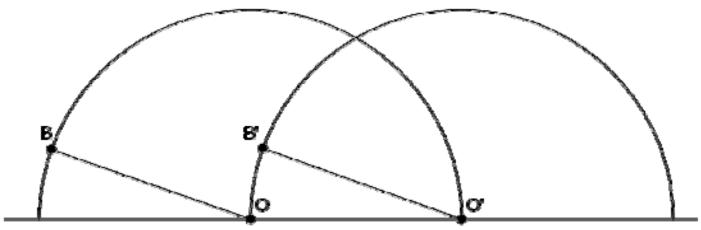


Fig. 2

3.1. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, CB = 4 CA et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose CA = a.
Démontrer que le triangle AOC est isocèle.

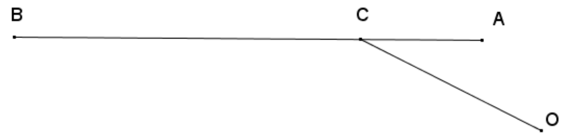


Fig.3

3.2. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.
Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de a l'aire de la surface essuyée par le balai.

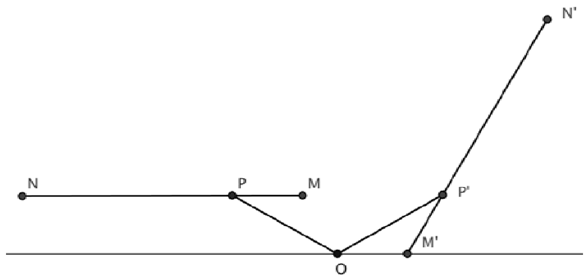


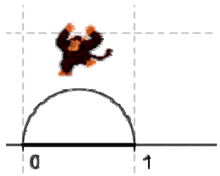
Fig. 4

Exercice 2 : Le singe sauteur

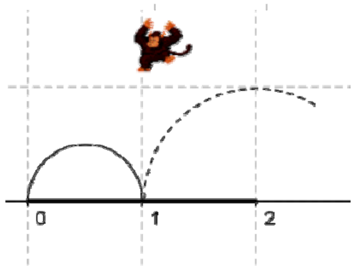
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre n est dit *atteignable* si le singe peut, en partant de l'origine (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en exactement n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, n (effectués dans cet ordre) et sans jamais sortir du segment $[0\ ;\ n]$.

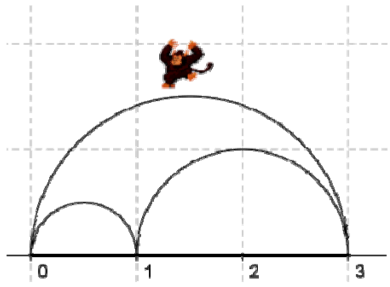
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle $[0\ ;\ 3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis.*

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier m, on a : $1+2+3+....+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5. *a.* Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.

b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose N $\geq$ 6 et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 … Montrer que N + 4 est aussi atteignable.

Exercice 3 : Loto

On dispose de 101 jetons, numérotés de 1 à 101. On les répartit en deux tas, A et B.

Le jeton numéro 40 se trouve dans le tas A. On le prend et on le met dans le tas B. De ce fait, la moyenne des numéros des jetons du tas A augmente de 0,25 et la moyenne des jetons du tas B augmente elle aussi de 0,25.

Combien y avait-il de jetons dans le tas A ?

Exercice 4 : Somme et produit se ressemblent

Au tableau sont écrits 16 nombres entiers positifs consécutifs. On note respectivement S et P la somme et le produit de ces nombres.

1. *a.* Justifier que P est un multiple de 16.

b. Justifier que P est un multiple de 125.

c. Quels sont les trois derniers chiffres de P ?

2. *a.* Exprimer S en fonction du plus petit n des 16 nombres écrits.

b. Donner un exemple de série de 16 nombres entiers consécutifs dont les trois derniers chiffres de la somme sont les mêmes que les trois derniers chiffres du produit.

3. Prouver que, quels que soient les 16 entiers consécutifs écrits, il est impossible que les quatre derniers chiffres de leur somme soient égaux aux quatre derniers chiffres de leur produit.