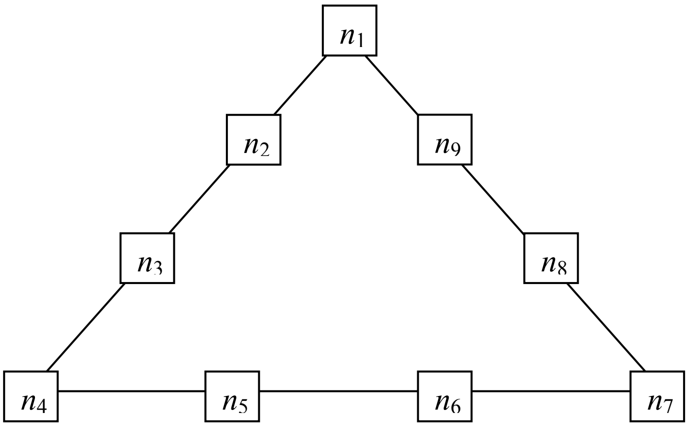
Exercice 1
Les triangles magiques

Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.
1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2- Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

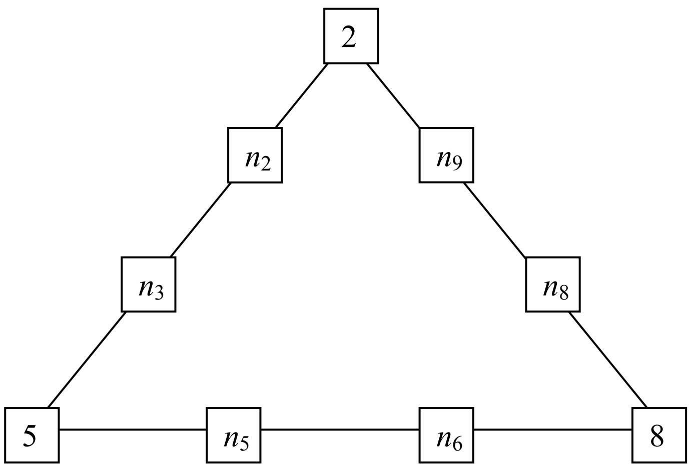


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur *S*, on dit que le triangle est *S*-magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2- On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
  a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
  b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$
  c. Donner la liste des couples (S , T) ainsi envisageables.

3- Proposer un triangle 17-magique.

4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5- **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
b. Proposer un triangle 19-magique.

6- Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.

7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

Exercice 2
Des ciseaux et du papier

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

<u>On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange</u> (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

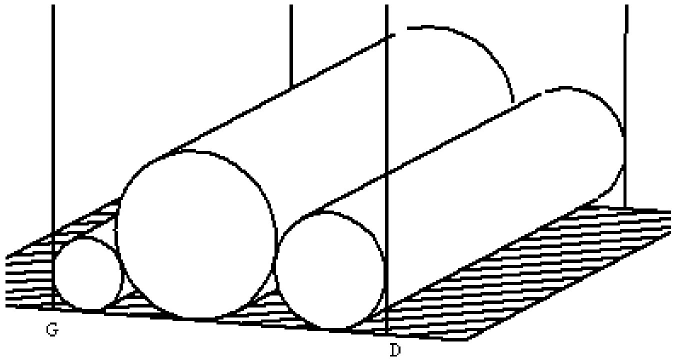
3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4- À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3
Tas de bois



Trois rondins cylindriques sont posés côté à côte sur une même surface plane horizontale. Sur la figure, les cercles apparents sont situés dans un même plan P perpendiculaire aux axes des cylindres. Les points G et D sont les intersections de deux droites contenues dans P, verticales et tangentes au premier et au dernier cercle.

À chaque ensemble de trois rondins, dont les rayons sont notés, de gauche à droite, *a*, *b* et *c*, on associe la distance GD, appelée largeur et notée $\ell(a,b,c)$. On étudie cette largeur en fonction des rayons des rondins et de leur position. On se place dans le cas où le cylindre central est tangent aux deux autres et où les verticales passant par G et D ne sont au contact que d'un seul cylindre chacune.

1- Montrer que $\ell(9,16,36)=117$. Calculer $\ell(16,9,36)$.

2- **a.** Calculer $\ell(a,b,c)$ en fonction de *a*, *b* et *c*.

b. Calculer $\ell(b,a,c)-\ell(a,b,c)$. *On pourra faire apparaître* $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ *en facteur.*

3- On utilise dans cette question trois rondins de rayons respectifs 1, *x* et *y*. On suppose que $1<x<y$. Dans quel ordre faut-il les placer pour que la largeur soit :

a. La plus grande possible ?

b. La plus petite possible ? *Discuter.*

Exercice 4
Moyennes de puissances de 2

Dans cet exercice, ont dit qu'un entier naturel non nul est *joli* s'il peut s'écrire comme la moyenne d'un certain nombre de puissances de 2, non nécessairement distinctes.

Par exemple, 92 est *joli*, car $92=\dfrac{2^7+2^7+2^7+2^7+2^7+2^5+2^5+2^5}{8}$; on a aussi : $92=\dfrac{2^8+2^4+2^2}{3}$.

1- **a.** Montrer que si *n* est *joli*, alors $n+1$ est *joli*.

b. Quel est l'ensemble des entiers *jolis* ?

c. Donner une décomposition de 2009 comme moyenne arithmétique d'un certain nombre de puissances de 2.

2- On dit qu'un entier naturel non nul est *superbe* s'il peut s'écrire comme moyenne arithmétique d'un certain nombre de puissances de 2, **deux à deux distinctes.**

Par exemple, 92 est *superbe*, puisque $92=\dfrac{2^8+2^4+2^2}{3}$.

a. Prouver que 7 est *superbe*.

b. Prouver que l'entier *n* est *superbe* si et seulement si 2*n* est *superbe*.

c. Prouver que 13 n'est pas *superbe* (on pourra admettre que, pour tout entier *k* supérieur ou égal à 7, $13k<2^k-1$).