Éléments de solution

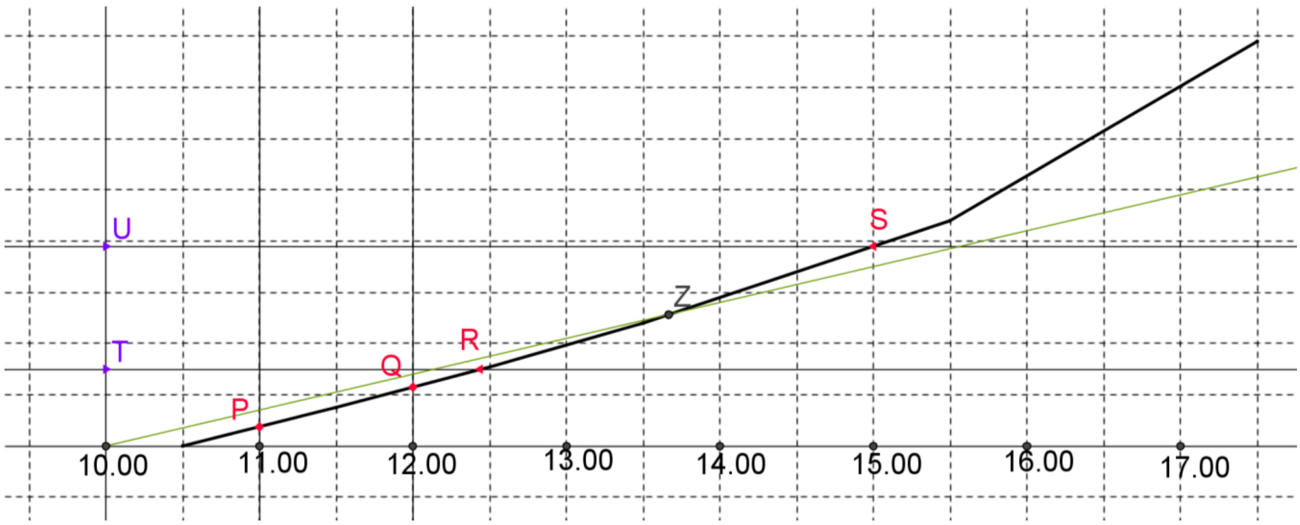
Concours René Merckhoffer

Exercice 1 Course poursuite

Une course à pied d'un type nouveau a été créée récemment.
Les coureurs partent tous en même temps et n'ont pas de ligne d'arrivée à franchir. Une voiture part à leur poursuite une demi-heure plus tard. Tout coureur dépassé par la voiture est éliminé. Le dernier coureur dépassé est alors déclaré vainqueur de la course.
L'objectif de chaque coureur est donc de parcourir la plus grande distance possible, avant d'être rattrapé par la voiture.

Voici l'organisation de la course :
Les coureurs s'élancent à 10 heures du matin.
La voiture qui les poursuit démarre 30 minutes plus tard. Elle accroît sa vitesse progressivement :
Pendant la première heure, elle roule à 15 km.h^{-1}, l'heure suivante, elle roule à 16 km.h^{-1}, l'heure suivante, elle roule à 17 km.h^{-1}, les deux heures suivantes, elle roule à 20 km.h^{-1}. Elle stabilise ensuite sa vitesse à 35 km.h^{-1}.

1. Robert s'est fait rattraper par la voiture une heure après son départ. Quelle distance a-t-il parcourue ?
2. Michèle s'est fait rattraper par la voiture deux heures après son départ. À quelle vitesse moyenne a-t-elle couru ?
3. Philippe a parcouru 30 km avant d'être rattrapé. À quelle heure a-t-il été repris par la voiture ?
4. Le vainqueur de la course de l'an passé a parcouru 78 km.
   Combien de temps a-t-il couru, et à quelle vitesse moyenne ?
5. Victoire pense cette année pouvoir courir pendant des heures à 14 km.h^{-1}.
   Si elle y parvient, quelle distance parcourra-t-elle ?



Le graphique ci-dessus représente le mouvement de la voiture (courbe noire) et les points de cette courbe correspondant aux questions posées :

1. Robert a été rattrapé au bout d'une heure de course (point P). La voiture a roulé une demi-heure, donc a parcouru 7,5 km. Robert aussi.
2. Michèle a couru pendant deux heures. Elle est rattrapée par la voiture (point Q) lorsque celle-ci a roulé une heure et demie et a donc parcouru 15 + 8 = 23 km. Michèle a donc couru à la vitesse moyenne de 11,5 km.
3. Philippe a couru 30 km au moment où il est rattrapé. Pour parcourir ces 30 km la voiture a mis une heure plus 15/16 d'heure, c'est-à-dire 1 h 56 min 15 sec. Philippe a été rattrapé à 12 h 26 min 15 sec (point R).

4. Le coureur qui a parcouru 78 km a été rattrapé par la voiture lorsque celle-ci a roulé 1 heure (15 km), une deuxième heure (total 31 km), une troisième heure (total 48 km), une quatrième heure (68 km) et une demi-heure (total 78 km). La voiture a roulé 4 h 30 min. Le coureur a couru 5 heures. Sa vitesse moyenne est donc 15,6 km.h^{-1}.

5. À 10 h 30, si tout se passe comme elle le prévoit, Victoire aura parcouru 7 km. À 11 h 30, elle en aura parcouru 21 et la voiture 15, à 12 h 30, elle en sera à 35 km et la voiture à 31, à 13 h 30 Victoire aura parcouru 49 km et la voiture 48. Victoire sera donc rattrapée peu après 13 h 30. On peut écrire une équation dont l'inconnue est la durée (en heures) séparant 13 h 30 de la date du dépassement :

$$49 + 14t = 48 + 20t.$$

La solution de cette équation est $\frac{1}{6}$. Si ses pronostics sont exacts, Victoire serait rattrapée à 13 h 40, après avoir parcouru 51, 333 km (résultat arrondi au mètre)

Exercice 2 : Coupe du monde

Camille et Dominique ont trouvé une façon originale de disposer dans un album les 250 photographies constituant leur collection de portraits de champions :

« Nous avons mis sur la première page la photo de notre champion préféré. Ensuite, chaque page contient soit le même nombre de photos que la précédente, soit le double »

Combien l'album comporte-t-il de pages au minimum ?

Les pages contiennent toutes un nombre de photos qui est une puissance de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ou 128. La puissance suivante, 256, ne convient pas. Par ailleurs, toutes les puissances de 2 doivent correspondre à l'effectif d'au moins une page, de 1 à la plus grande d'entre elles.

Si la plus grande puissance de 2 utilisée était 128, on aurait au moins 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 255 photos. Cela ne convient pas.

Si la plus grande puissance de 2 utilisée est 64, on place au moins 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127 photos, et il reste à trouver des puissances de 2 inférieures ou égales à 64 dont la somme soit 123. Pour rendre le nombre de pages minimal, ces puissances doivent être les plus grandes possibles. On utilise 64, il reste 59, on utilise 32, il reste 27, on utilise 16, il reste 11, on utilise 8, il reste 3, on utilise 2, puis 1.

La distribution minimale est donc : 1, 1, 2, 2, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32, 64, 64. L'album comporte 13 pages au minimum (on peut répondre 14, si on considère que le nombre de pages d'un ouvrage relié est nécessairement pair).

Exercice 3 : Un programme de calcul

Voici un programme de calcul :
Soit N un nombre entier naturel écrit dans le système décimal

Étape n°1 : Repérer le chiffre X des unités de N.

Étape n°2 : Calculer $N - X$. Soit M le nombre obtenu.

Étape n°3 : Diviser M par 10. Soit D le nombre obtenu.

Étape n°4 : Calculer $D + 2X$. Soit R le nombre obtenu.

Étape n°5 : Si R est différent de N, alors passer à l'étape n° 6. Sinon, arrêter et afficher R.

Étape n°6 : Si R s'écrit avec un seul chiffre, alors arrêter et afficher R. Sinon, donner à N la valeur R et reprendre le programme de calcul à l'étape n°1.

1. Quel résultat affiche-t-on lorsqu'on introduit $N = 15$ dans le programme de calcul ?
2. Que se passe-t-il lorsqu'on introduit $N = 2\,015$ dans le programme de calcul ?
3. Quels sont les nombres susceptibles de figurer à l'affichage final ?

1. On fait suivre l'algorithme au nombre 15 :

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
N	X	M	D	R	$R \neq N$?	$R < 10$?
15	5	10	1	11	OUI	NON
11	1	10	1	3	OUI	OUI
						3

2. On fait suivre l'algorithme au nombre 2 015 :

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
N	X	M	D	R	$R \neq N$?	$R < 10$?
2 015	5	2 010	201	211	OUI	NON
211	1	210	21	23	OUI	NON
23	3	20	2	8	OUI	OUI
						8

3. Par définition, l'affichage final ne peut contenir que des nombres solutions de $D + 2X = N$, l'algorithme prenant fin à l'étape 5, ou des entiers s'écrivant avec un seul chiffre, l'algorithme prenant fin à l'étape 6.
Examinons l'équation $D + 2X = N$:

$$\frac{N - X}{10} + 2X = N$$

Elle s'écrit aussi : $19X = 9N$
X étant un nombre s'écrivant avec un seul chiffre, les seules possibilités sont $X = 9$ et $N = 19$, et $N = X = 0$.
On vérifie que l'introduction de 19 dans l'algorithme provoque l'affichage 19 (ce n'est pas le seul, les multiples de 19 provoquent aussi la sortie 19, mais ce n'est pas la question) et, naturellement, l'introduction de 0 la sortie 0.

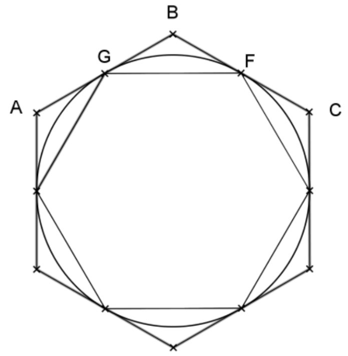
Pour que l'affichage final propose un nombre s'écrivant avec un seul chiffre, ce nombre, que nous appelons *R*, est issu d'un entier *N* vérifiant $\frac{N-X}{10}+2X=R$, c'est-à-dire $N+19X=10R$. Raisonnons par disjonction des cas, en faisant un tableau :

R	$N+19X$	X	N	R	$N+19X$	X	N
0	0	0	0	6	60	3	3
1	10	0	10	7	70	0	70
2	20	0	20	7	70	1	51
2	20	1	1	7	70	2	32
3	30	0	30	7	70	3	13
3	30	1	11	8	80	1	61
4	40	0	40	8	80	0	80
4	40	1	21	8	80	1	61
4	40	2	2	8	80	2	42
5	50	0	50	8	80	3	23
5	50	1	31	8	80	4	4
5	50	2	12	9	90	0	90
6	60	0	60	9	90	1	71
6	60	1	41	9	90	2	52
6	60	2	22	9	90	3	33

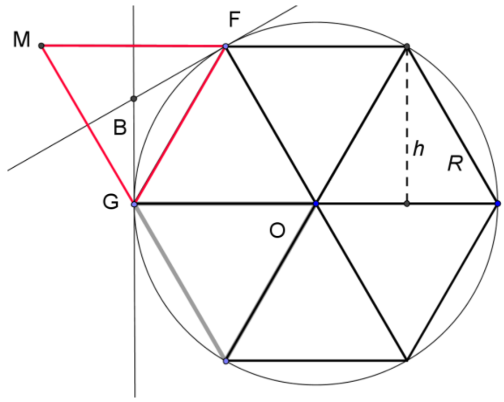
Les équations $N+19X=10R$ se résolvent, pour chaque valeur de *R*, en proposant les entiers *X* tels que $19X \leq 10R$ et en donnant un *N* correspondant. Naturellement, ce *N* n'est pas le seul possible, mais seulement celui par lequel commence la dernière série d'étapes de l'algorithme. On voit que tous les nombres s'écrivant avec un seul chiffre sont des affichages terminaux possibles (avec 19).

Exercice 4 : Hexagones gigognes

Soit H_1 un hexagone régulier inscrit dans un cercle et H_2 un hexagone régulier circonscrit au même cercle.
Sur la figure ci-dessous (qui n'est pas en vraie grandeur), les points A, B et C désignent trois sommets consécutifs de l'hexagone H_2 et les points G et F sont, d'une part les milieux respectifs des segments [AB] et [BC], d'autre part deux sommets consécutifs de l'hexagone H_1.
L'hexagone H_2 a une aire de 340 cm². Quelle est celle de l'hexagone H_1 ?



L'hexagone H_2 est la réunion de six triangles équilatéraux dont le côté est le rayon R du cercle circonscrit à l'hexagone. Si on appelle h la hauteur d'un tel triangle, l'aire A_2 de l'hexagone s'écrit $A_2 = 6 \times \frac{1}{2}hR$, ou encore $A_2 = 3hR$.
Les angles du triangle OFG mesurent 60° et l'angle $\widehat{\text{OFB}}$ mesure 90° (la droite (FB) est tangente au cercle). Il s'ensuit que l'angle $\widehat{\text{GFB}}$ mesure 30° et que (FB) est une hauteur du triangle équilatéral GMF. Ce triangle a le même côté que ceux qui composent l'hexagone H_2, il a donc la même aire qu'eux, et cette aire est le triple de celle du triangle GBF (les triangles GBF, BFM et BMG ont les mêmes côtés et les mêmes angles).



La différence des aires A_1 et A_2est la sommes des aires identiques de six triangles isocèles ayant chacun l'aire du triangle BFG, cette aire étant le tiers de celle du triangle OFG, par exemple. Il s'ensuit que $A_2 = \frac{4}{3}A_1$. Ou encore $A_1 = \frac{3}{4} \times 340$. Donc $A_1 = 255$.