académie Rouen

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades académiques de mathématiques

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Jeudi 3 avril 2014

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Exercice 1 : des pyramides de Pascale

1. a. On complète l'exemple de pyramide de Pascale donné en exemple par le sujet :

7	2				
7	9	2			
7	16	11	2		
7	23	27	13	2	
7	30	50	40	15	2

   b. On obtient $L_1 = 9$ sur la 1ère ligne, $L_2 = 18$ sur la 2ème ligne, $L_3 = 36$ sur la 3ème ligne, $L_4 = 72$ sur la 4ème ligne et $L_5 = 144$ sur la 5ème ligne.
   On remarque que la somme double lorsque l'on passe d'une ligne à celle située en dessous.

2. Si l'on considère la pyramide de Pascale associée aux nombres entiers $m = 1$ et $n = 1$, alors sur la 1ère ligne la somme des nombres est égale à 2.
   D'après la règle vue ci-dessus, la somme des nombres sera égale à :
   $4 = 2^2$ sur la 2ème ligne, $8 = 2^3$ sur la 3ème ligne, …, $256 = 2^8$ sur la 8ème ligne, $512 = 2^9$ sur la 9ème ligne et enfin $1024 = 2^{10}$ sur la dixième ligne.

3. Si on remplit la pyramide de Pascale avec deux nombres entiers positifs m et n, on obtient :

m	n				
m	m+n	n			
m	2m+n	m+2n	n		
m	3m+n	3m+3n	m+3n	n	
m					n

   La somme des nombres de la troisième ligne est égale à $S = 4m + 4n$ et la somme des nombres sur la quatrième ligne est égale à $S' = 8m + 8n = 2(4m + 4n) = 2S$

4. Si on note n le nombre entier inconnu sur la première ligne, on obtient :

3	n				
3	$3 + n$	n			
3	$6 + n$	$3 + 2n$	n		
3	$9 + n$	$9 + 3n$	$3 + 3n$	n	
3	$12 + n$	**46**	$12 + 6n$	$3 + 4n$	n

   Par conséquent, selon les règles de la pyramide : $(9 + n) + (9 + 3n) = 46$ soit $n = 7$.

   On obtient aisément la pyramide en remplaçant n par 7

Exercice 2 : la frise

En assemblant les quatre premières formes (une blanche, une gris clair, une gris foncé puis une hachurée), Christophe a obtenu un motif dont le périmètre est égal à 42cm. Afin de réaliser la frise dans son ensemble, il peut, dans un premier temps, construire dix motifs identiques au précédent. Il doit ensuite les assembler les uns à la suite des autres. Du fait de l'emboîtement des deux pièces (respectivement hachurée et blanche), pour chaque nouveau motif ajouté, le périmètre de l'ensemble augmente de $32 = 42 - 10$.
Au final, lorsqu'il aura assemblé les dix motifs (c'est-à-dire les 40 formes découpées), le périmètre du puzzle sera égale à $P = 42 + 9 \times 32 = 330$ (ou $P = 10 \times 42 - 9 \times 10$)

Exercice 3 : le tableau

De nombreuses propriétés peuvent être observées et conjecturées dans le tableau : l'une d'elles consiste à remarquer que l'on peut parcourir les cases successivement en rajoutant +3 à chaque étape afin d'obtenir la suite des nombres entiers du tableau. En remarquant alors que :

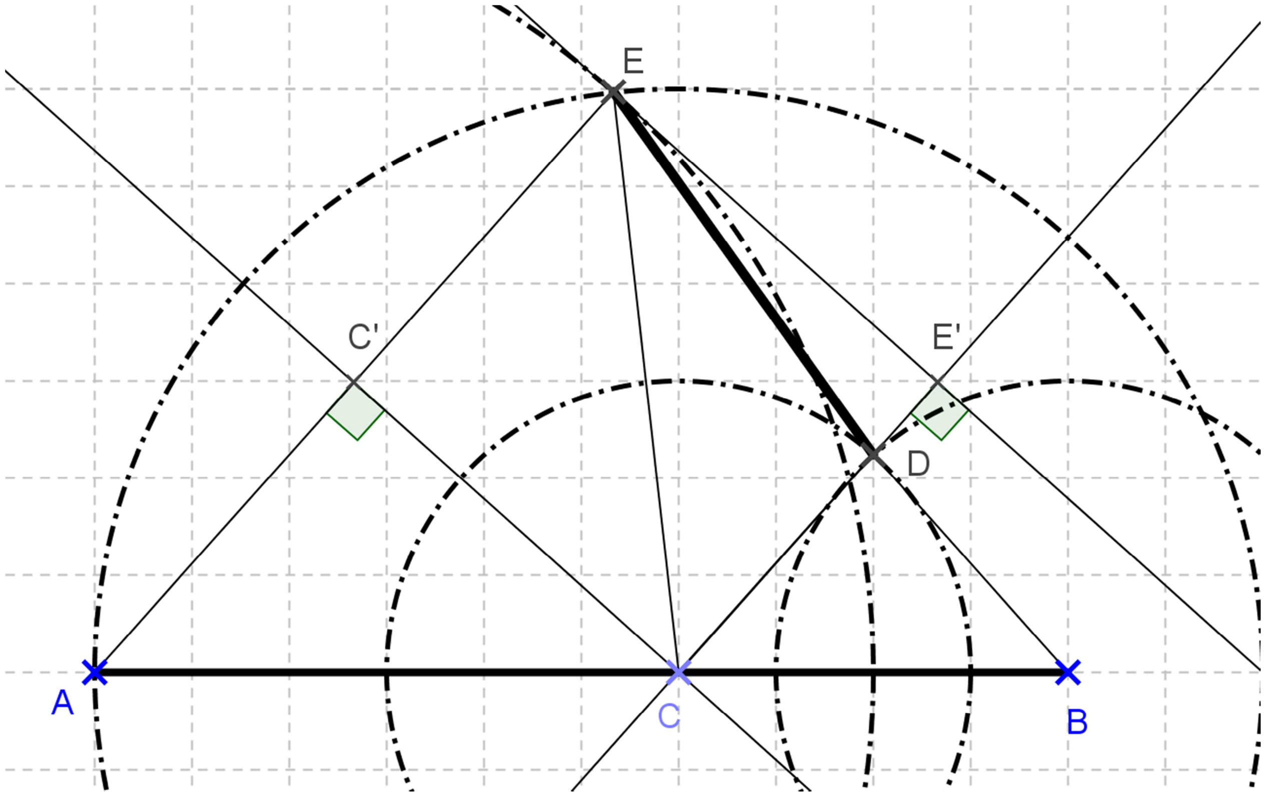
$$2014 = 1 + 671 \times 3$$

On peut affirmer que 2014 se trouvera dans le tableau à la 672$^{\text{ème}}$ case (si on le remplit en inscrivant les nombres entier du tableau dans un ordre croissant à partir de la 1$^{\text{ère}}$ case contenant l'entier 1).

On peut alors ensuite remarquer que pour remplir deux lignes, il y a 8 cases. Or $672 = 84 \times 8$! la 672$^{\text{ème}}$ case se trouve donc sur la colonne A et sur la 168$^{\text{ème}}$ ligne.

A	B	C	D	E
	1	4	7	
22	19	16	13	10
	25	28	31	
46	43	40	37	34
	49	52	55	
70	67	64	61	58

Exercice 4 : d'une distance à l'autre



Parmi les différentes démarches possibles, l'une d'elles consiste à démontrer que les droites (AE) et (CD) sont parallèles (ACDE est un trapèze) :
Les triangles BCD et CAE sont isocèles respectivement en D et en C donc

$$\cos\left(\widehat{BCD}\right) = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \cos\left(\widehat{CAE}\right).$$

Les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CAE}$ sont donc égaux et les droites (AE) et (CD) sont parallèles.

Si on appelle C' le milieu du segment [AE] et E' le projeté orthogonal du point E sur la droite (CD), alors CC'EE' est un rectangle avec $CE' = C'E = 4$ et $CC' = EE' = 2\sqrt{5}$.
On obtient la longueur DE dans le triangle rectangle DEE' : $DE = \sqrt{21}$ (on a $DE' = 4 - 3 = 1$)